
इकाई 9 भिन्न की संक्रियाएं

इकाई की रूपरेखा

- 9.1 परिचय
उद्देश्य
- 9.2 जोड़ और घटाने की समझ को विकसित करना
- 9.3 गुणा और भाग की समझ को विकसित करना
- 9.4 सारांश
- 9.5 अभ्यासों पर टिप्पणियां

9.1 परिचय

पिछली इकाइयों और अपने अनुभव के आधार पर आप उन तमाम गलतियों से परिचित ही होंगे जो बच्चे भिन्न संख्याओं के संदर्भ में करते हैं। मगर हममें से कितने लोगों ने इन गलतियों के सम्भावित कारणों का पता लगाने की कोशिश की है?

खंड 2 में हमने चर्चा की थी कि पूर्णांक संख्याओं की चार गणितीय क्रियाओं में होने वाली आप गलतियों से निपटने में बच्चों की मदद कैसे की जाय। इस इकाई में आप देखेंगे कि भिन्न संख्याओं के साथ वही चार क्रियाएं करते वक्त जो गलतियां और गलतफहमियां होती हैं, वे पूर्णांक संख्याओं से अलग हैं। लिहाजा इनसे निपटने में बच्चों की मदद करने के लिए थोड़ी अलग-अलग सिखाने के तरीके अपनाने होंगे। यह जरूर है कि भिन्न संख्याओं में पूरी समझ होना आवश्यक है। इस इकाई में हम ऐसी अन्य संकल्पनाओं व विधियों की चर्चा भी करेंगे जिन पर बच्चों को महारत हासिल करना होगा, इसके बाद ही वे भिन्न संख्याओं पर चारों संक्रियाओं को सफलतापूर्वक लागू कर सकेंगे।

इस पूरी इकाई में हमने ऐसे कई शिक्षण साधनों की चर्चा की है जिनका उपयोग करके इन संक्रियाओं को सही ढंग से करने में बच्चों की मदद की जा सकती है। उम्मीद है कि इन इकाई से आपको सिखाने के लिए और भी कई साधनों के बारे में सोचने में मदद मिलेगी।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ाने के बाद आप

- ऐसे कई गतिविधि-आधारित तरीके इस्तेमाल कर पाएंगे जिनसे बच्चों को भिन्न संख्याओं के जोड़, घटाना, गुणा व भाग सीखने में मदद मिलेगी।
- भिन्न संख्याओं का संयोजन करने के नियम समझने में मदद दे पाएंगे।
- अपने सिखाने के तरीकों का निरन्तर मूल्यांकन करने के तरीके विकसित कर पाएंगे।

9.2 जोड़ और घटाना की समझ को विकसित करना

“मैंने कितनी बार इन्हें बताया कि दो भिन्नों को कैसे जोड़ते हैं। फिर भी ये $\frac{2}{3} + \frac{4}{8}$ का

उत्तर निकालने में गलती करते हैं। कुछ ने इसका उत्तर $\frac{6}{8}$ लिखा है तो कुछ ने $\frac{6}{11}$...।”

यह एक हताश गणित शिक्षक का कहना था। मैं एक दिन उनसे मिलने गई थी जब वे कक्षा 4 के बच्चों की उत्तर पुस्तिकाएं जांच रही थी। क्या आपने ऐसी टिप्पणियां अन्य शिक्षकों से भी सुनी हैं? हो सकता है कभी आप भी इसी तरह हताश हुए हों?

इस मामले में वे ज्यादा हताश इसलिए थीं क्योंकि उन्हें वही बात समझाने में काफी कोशिश करनी पड़ी थी, परन्तु नतीजा कुछ नहीं निकला मगर क्या उन्होंने रुककर यह सोचा कि गलती क्या थी? आखिर उनके विद्यार्थी भिन्न के जोड़ के सिद्धांतों को क्यों नहीं समझ पा रहे थे?

मैंने सोचा कि उन्हें थोड़ा सोचने को उकसाया जाए। इसलिए मैंने उनसे निम्नलिखित सवाल किए:

- क्या आप जानती हैं कि बच्चों में जोड़ को लेकर और भिन्न को लेकर क्या धारणा है?
- क्या आपने उनके उत्तरों में कोई क्रम देखा है? और क्या कभी यह सोचा है इस क्रम के सम्भावित कारण क्या हो सकते हैं?
- क्या आप कुछ अन्य गतिविधियां सोच सकती हैं जो इसी प्रकार की बातों के लिए बनी हों और बच्चों की समझ में अवरोध को पार करने में मदद कर सकें?

उन्होंने थोड़ी देर इन सवालों पर विचार करके कहा, “हां, यह सही है कि शायद मैंने ऐसे तरीके नहीं सोचे जिनसे बच्चों को यह संकल्पना समझने में मदद मिले। मैं तो बस वही बात बार-बार दोहराती गई।” उन्होंने फैसला किया कि वे अपने साथी शिक्षकों से बात करेगी कि बच्चों के लिए सीखने व अभ्यास के वैकल्पिक तरीके क्या हो सकते हैं। वे यह समझ गई थी कि

बार-बार एक ही व्याख्या को दोहराना बच्चे को कोई संकल्पना सिखाने का सर्वोत्तम तरीका नहीं है।

आइए अब भिन्नों के जोड़ व घटाना सिखाने के कुछ तरीकों पर विचार करते हैं। उसके बाद हम यह भी देखेंगे कि ये तरीके कितने प्रभावी हैं।

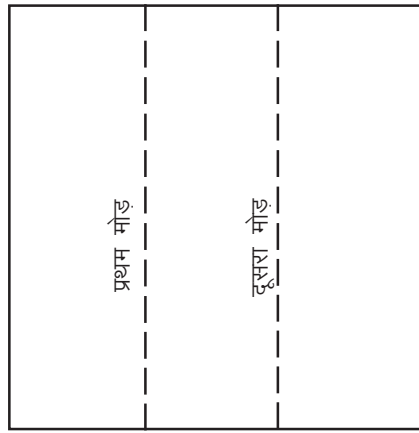
उदाहरण 1

सबसे पहले मेरी एक सहेली के अनुभव पर विचार करते हैं। वह प्राथमिक विद्यालय में शिक्षिका है। वह कक्षा 4 के बच्चों की गलतियां सुधारने का सत्र (session) ले रही थी।

ये बच्चे $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ जैसी सामान्य गलतियां करते थे। बच्चों से बातचीत के दौरान उसे

यह समझ में आ गया कि समस्या की जड़ यह है कि बच्चों को ‘जोड़ का नियम’ मात्र रटवा दिया गया है और प्रश्न हल करने को कहा गया है। उन्हें यह नहीं समझाया गया है कि नियम कैसे लागू होता है। अतः उसने बच्चों को इस नियम के कुछ ठोस उदाहरण देने के लिए कुछ आसान से शिक्षण साधन प्रयोग करने का विचार बनाया।

सबसे पहले उसने बच्चों को यह समझाने की कोशिश की कि आखिर $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ होता क्या है? उसने सब बच्चों को एक-एक कागज़ दे दिया। अब उसने खुद भी एक कागज़ लिया और तीन भागों में तह करके वापिस खोल दिया (चित्र 1) और बच्चों से भी वैसा ही करने को कहा।



चित्र 1

शिक्षक : अब बताओं कागज़ का हर भाग कितना भाग दर्शाता है।

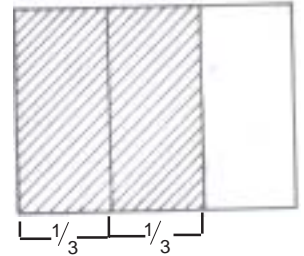
बच्चे : $\frac{1}{3}$

शिक्षक : ठीक, अब पहले भाग को रंगकर उस पर $\frac{1}{3}$ लिख दो। उसके बाद अगले भाग को रंगकर उस पर भी $\frac{1}{3}$ लिख दो (चित्र 2 देखें)। (बच्चे यह कार्य कर लेते हैं) अब बताओ कि किसे भाग रंगीन हैं?

बच्चे : दो।

शिक्षक : तीन में से दो। तो, रंगीन भाग कितने भाग को दर्शाता है?

बच्चे : $\frac{2}{3}$



चित्र 2

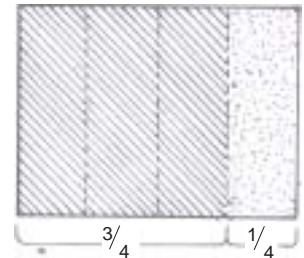
शिक्षक : तो क्या हम $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ लिख सकते हैं?

बच्चे : जी, मैडम।

शिक्षक : चलो, अब $\frac{3}{4}$ और $\frac{1}{4}$ को जोड़कर देखते हैं। एक और कागज़ ले लो। कागज़ को कितने भागों में मोड़ेंगे?

बच्चे : चार भाग।

शिक्षक : ठीक। कागज़ को चार भागों में मोड़ लो फिर पहले इसके तीन भागों में रंग भरो (पहले भाग में रेखाएं डालना) और उसके बाद एक भाग में रंग भरो। (बिन्दु डालकर) (चित्र 3 देखें)। अब रंगीन भाग कितना भाग दर्शा रहा है?



चित्र 3

बच्चे : 3 बटा 4 (शिक्षक बोर्ड पर $\frac{3}{4}$ लिखती है।)

शिक्षक : और वह भाग जिसमें बिन्दु भरे गये हैं।

बच्चे : एक बटा चार। (शिक्षक 3 बटा 4 के पास 1 बटा 4 भी लिखती है।)

शिक्षक : तो कागज़ का कितना भाग रंगीन है?

बच्चे : पूरा/समूचा/पूरा कागज़।

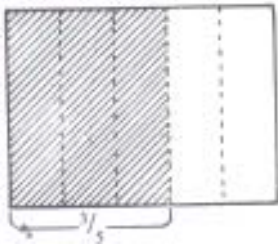
शिक्षक : क्या इसका अर्थ यह हुआ कि $\frac{3}{4}$ और $\frac{1}{4}$ का जोड़ 1 होता है?

बच्चे : जी मैडम।

शिक्षक : क्या मैं ऐसे लिख सकती हूँ $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$?

बच्चे : जी मैडम।

इसके बाद शिक्षक ने इसी तरह के कुछ और प्रश्न हल करने को दिए। अगले दिन उसने इसी तरीके का प्रयोग कुछ ज्यादा कठिन प्रश्नों पर किया। जैसे $\frac{3}{5} + \frac{3}{5}$, इस बार उसने बच्चों से पूछा कि कैसे आगे बढ़ें?



चित्र 4

एक बच्चा : कागज़ को पांच भागों में मोड़ेंगे। (कुछ देर बाद) $\frac{3}{5}$ का अर्थ है 5 भागों में से 3 भाग। तो हम पहले 5 में से 3 भागों को रंग देंगे (रेखाएं डालके)

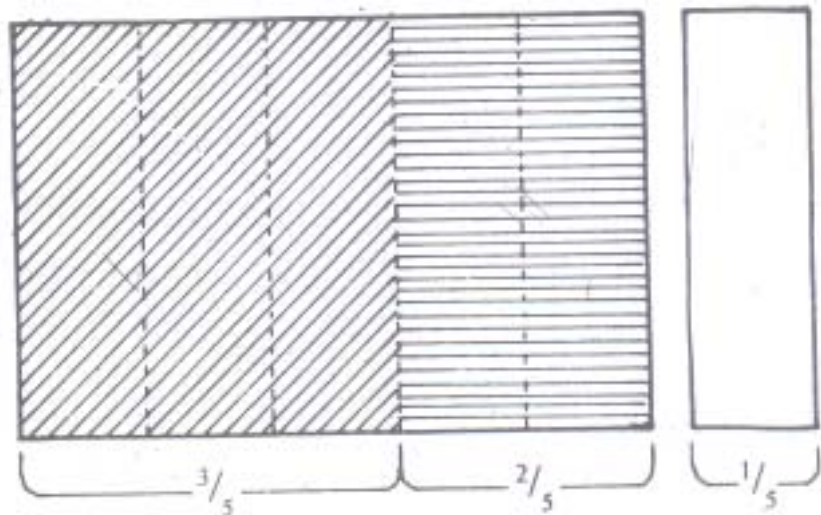
(चित्र 4) $\frac{3}{5} + \frac{3}{5}$ का अर्थ है कि हम कागज़ के बाकी भाग में तीन और भागों में रंग भरना पड़ेगा। (बच्चा थोड़ा असमंजस में है) मगर अब 2 ही भाग बचे हैं। अब क्या करें?

शिक्षक : (शिक्षक ने बाकी बचे दो भागों में आड़ी रेखाएं डालके रंग भर दिया) अब बताओं यह क्या दर्शाता है?

(कक्षा में चुप्पी)

क्या हम एक और कागज़ ले सकते हैं?

दूसरा बच्चा : हां हम एक और कागज़ को पांच भागों में मोड़ लेंगे। अब इनमें से 1 भाग लेंगे। इस प्रकार से कुल तीन भाग हो जाएंगे।



चित्र 5

शिक्षक ने एक और कागज़ लेकर उसे पांच भागों में मोड़कर एक भाग काट लिया और इस भाग में आड़ी रेखाएं डालके रंग भर दिया। यह एक भाग उसने बच्चे को दे दिया। बच्चे ने उसे अपने कागज़ के साथ सटाकर रख लिया (चित्र 5)।

शिक्षक : परन्तु तुम $\frac{3}{5} + \frac{3}{5}$ के बारे में क्या कहोगे?

बच्चा : यह तो 1 से ज़्यादा है।

शिक्षक : ठीक, परन्तु 1 से कितना ज़्यादा है?

दूसरा बच्चा : (थोड़ा रुककर) एक भाग ज़्यादा है?

शिक्षक : कितने में से एक भाग ज़्यादा है?

बच्चे : पांच भाग में से एक भाग।

शिक्षक : क्या इसका अर्थ यह हुआ कि जोड़, 1 से $\frac{1}{5}$ भाग ज़्यादा है?

बच्चे : जी, मैडम।

शिक्षक : तो $\frac{3}{5} + \frac{3}{5}$ कितना हुआ?

एक छात्र : जोड़ होगा $1 + \frac{1}{5}$

दूसरा छात्र : $1\frac{1}{5} = \frac{6}{5}$ होगा।

शिक्षक : सही। तो क्या मैं इसी बात को इस तरह लिख सकती हूँ :-

$$\frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{5}{5} + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}?$$

बच्चे : जी मैडम।

शिक्षक : (कक्षा में अब तक की बात को एक साथ बताते हुए) तो हमने देखा कि

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4}$$

$$\frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$$

क्या अब तुम कागज़ मोड़े बिना बता सकते हो कि $\frac{2}{7} + \frac{4}{7} =$ क्या होगा?

एक बच्चा : $\frac{6}{7}$ मैडम।

शिक्षक : बहुत बढ़िया। कैसे पता लगाया?

बच्चा : अंश की संख्याओं को जोड़ दिया और सामान्य हर लिख दिया।

शिक्षक : शाबाश। क्या तुम्हें याद है कि सामान्य हर वाली भिन्नों को क्या कहते हैं?

कुछ बच्चे : जी मैडम। उन्हें समान भिन्न कहते हैं।

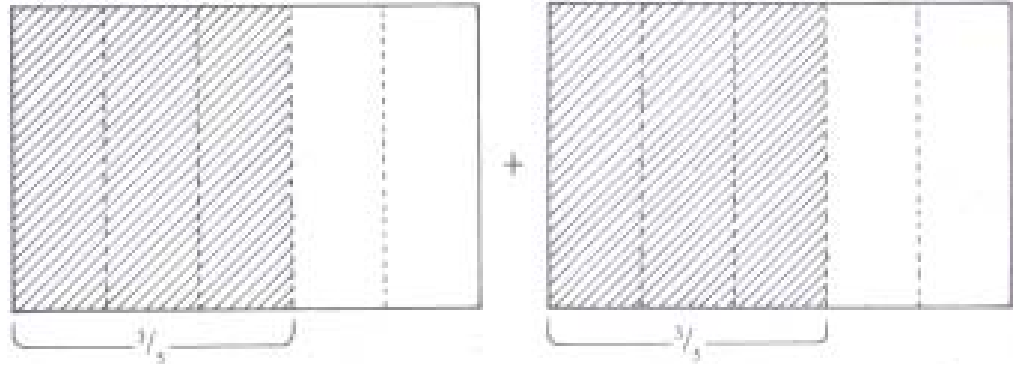
शिक्षक : बढ़िया। तो समान भिन्नों का जोड़ निकालने के लिए तुम उनके अंशों को जोड़ दोगे और हर वही रहेगा जो उनका सामान्य हर है।

इसके बाद शिक्षक ने बच्चों को ढेर सारे सवाल करने को दिए।

—————X—————

यहां हम एक बात नोट करना चाहेंगे।

नोट 1: बच्चों को $\frac{3}{5} + \frac{3}{5}$ समझाते समय एक बात का ध्यान रखें। बेहतर होगा कि दो कागजों का चित्र 6 की तरह सटाकर न रखा जाए।



चित्र 6

ऐसा देखा गया है कि ऐसा करने पर बच्चों में यह गलत धारणा घर कर जाती है कि $\frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ होता है क्योंकि वे दोनों कागजों के कुल भाग $5 + 5 = 10$ गिन लेते हैं। अब चूंकि दोनों कागजों को कुल $5 + 5 = 10$ भागों में बांटा गया है, इसलिए वे हर के स्थान पर 10 लिख लेते हैं।

यह यही है कि बच्चे कई कारणों से गलत धारणा अपना लेते हैं। कई बार ऐसा हो जाता है कि आप चाहे जितनी गतिविधियां करवाएं मगर कोई बच्चा $\frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ ही मानता रहता चला जाता है। ऐसी स्थिति में बेहतर यही होता है कि कुछ गतिविधियों के बाद बच्चे को यह तथ्य बता दिया जाए कि $\frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$ होता है।

चलिए अब इस सबके बारे में कुछ अभ्यास कर लिए जाएं।

E 1) क्या कागज़ मोड़ने की गतिविधि भिन्नों का जोड़ सिखाने के लिए अच्छी गतिविधि है? आपका क्या विचार है? इससे आगे जाकर आप उन्हें सदृश भिन्न घटाने के सवाल कैसे सिखाएंगे? उदाहरण के तौर पर उन्हें $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$ को हल कराना।

E 2) भिन्न के जोड़ व घटाना सिखाने के लिए कोई सामूहिक गतिविधि सुझाइए।

आप इस बात से ज़रूर सहमत होंगे कि समान भिन्नों का जोड़ सिखाने के लिए कागज़ मोड़ना एक कारगर शिक्षण साधन हो सकता है। परन्तु यह देखा गया है कि असमान भिन्नों के जोड़ सिखाने में यह तरीका इतना उपयोगी नहीं होता। तो देखते हैं कि शिक्षक इसके लिए क्या करते हैं।

उदाहरण 2

अगली कक्षा में शिक्षक अपने साथ कुछ 'भिन्न चार्ट' लेकर पहुंची (चित्र 7 देखें)। विद्यार्थी इनका उपयोग तुल्य भिन्न (इकाई 8 देखें) सीखने के लिए कर चुके थे। अतः वे इनसे परिचित थे। शिक्षक ने चार्ट को ब्लैक बोर्ड के पास रख दिया और पाठ की शुरुआत की। सबसे पहले उसने यह जांचने की कोशिश की कि क्या बच्चे मिश्रित भिन्न और भिन्नों की तुल्यता की बात समझ चुके हैं। इससे पहले कि बच्चे भिन्न संख्याओं की क्रियाओं को समझें ये संकल्पनाएं जानना उनके लिए ज़रूरी है। जब शिक्षक बच्चों के प्रदर्शन से संतुष्ट हो गई तब उसने भिन्नों के जोड़ की बात प्रारम्भ की।

1							
$\frac{1}{2}$				$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

(क)

1					
$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$		
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

(ख)

चित्र 7

शिक्षक : $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} =$ क्या होगा?

सारे बच्चे : $\frac{1}{2}$

शिक्षक : $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = ?$

बच्चे(चिल्लाए) : $\frac{2}{3}$ मैडम।

कक्षा में सारे बच्चों के एकमत होने का यह अर्थ नहीं है कि हर बच्चे को संकल्पना समझ आ चुकी है। वास्तव में कक्षा में अलग-अलग बच्चे से पूछकर मूल्यांकन करना चाहिए कि क्या हर बच्चे को संकल्पना समझ आ चुकी है?

शिक्षक : $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ क्या होगा?

एक बच्चा : एक होगा।

(कुछ देर चुप्पी के बाद)

शिक्षक : क्या तुम बता सकते हो कि क्यों?

राजू : (चार्ट की तीसरी पंक्ति की ओर इशारा करते हुए) मैडम हर भाग $\frac{1}{3}$ है। पहले मैं दो भागों में रंग भर दूंगा (रेखाएं डाल कर) तो मुझे $\frac{2}{3}$ मिल जाएगा। फिर तीसरे भाग में रंग भरूंगा (अलग रेखाएं डाल कर) तो $\frac{1}{3}$ और मिल जाएगा। अब पूरी पट्टी पर रंग है। इसलिए यह 1 हो गया।

शिक्षक : बहुत बढ़िया।

शिक्षक ने पहले यह जांच की कि सारे बच्चे इस बात को समझ गए हैं, फिर आगे बढ़ी।

शिक्षक : अब बताओ $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$ क्या होगा?

कक्षा में एकदम चुप्पी छा गई। शिक्षक ने राजू की ओर देखा।

राजू : आं

शिक्षक : क्या दिक्कत है?

राजू : मैडम, यदि ये दोनों संख्याएं एक ही पट्टी पर होतीं तो कर सकते थे। परन्तु ये दोनों तो अलग-अलग पट्टी पर हैं।

शिक्षक : ठीक। एक ही पट्टी की भिन्नों को देखों (चित्र 7) (चार्ट की दूसरी पंक्ति की ओर दिखाकर) इसमें पूरे (एक) को दो भागों में बांटा गया है। और हर भाग $\frac{1}{2}$ दर्शाता है।

इसके बाद शिक्षक ने तीसरी कतार की ओर इशारा करके इस तरह के सवाल पूछे कि खुद बच्चों ने ही बताया कि वहां एक को तीन भागों में बांटा गया है और हर भाग पूरे का $\frac{1}{3}$ दर्शाता है।

शिक्षक : यदि हम एक ही पट्टी पर $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{4}$ दिखाना चाहें, तो पूरे को कितने-कितने भागों में बांटना होगा? (थोड़ी देर बच्चों के उत्तर का इन्तज़ार करने के बाद) चलो 4 भाग करके देखते हैं। चार्ट की चौथी पंक्ति में पूरे के चार भाग किए गए हैं। क्या इस पर $\frac{1}{2}$ दिखा सकते हैं?

एक लड़की : जी मैडम। 4 भागों में से दो भाग $\left(\frac{2}{4}\right)$ और $\frac{1}{2}$ बराबर हैं।

शिक्षक : क्या हम इस पर $\frac{1}{3}$ दिखा सकते हैं?

एक लड़का : नहीं मैडम। नहीं दिखा सकते।

शिक्षक : चलो फिर पांचवी पंक्ति को देखते हैं।

सारे बच्चे : नहीं मैडम। पांचवी पंक्ति में न तो $\frac{1}{2}$ दिखा सकते हैं और न $\frac{1}{3}$ ।

शिक्षक : और छठी पंक्ति में? इसमें पूरे के 6 भाग हैं।

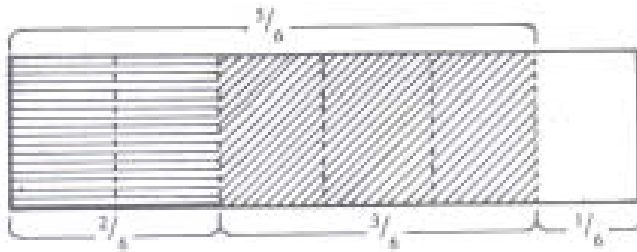
एक लड़का : जी हां मैडम। इस पंक्ति में दिखा सकते हैं। हर भाग $\frac{1}{6}$ है। यदि हम

6 में से 2 भाग ले लें तो $\frac{1}{3}$ हो जायेगा और यदि 6 में से 3 भाग ले

लें तो $\frac{1}{2}$ हो जायेगा।

शिक्षक : शाबाश।

शिक्षक ने बोर्ड पर एक पट्टी खींचकर उसे 6 भागों में बांट दिया। अब उसने एक बच्चे को बुलाकर कहा कि पहले 6 में से दो भागों को रंग दे और फिर बाकी बचे भागों में से 3 और भागों को रंग दे। चित्र 8 में यही दिखाया गया है।



चित्र 8 : $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$ सम्मिश्रण

शिक्षक : अब बताओं, कितने भाग रंगे हुए हैं?

बच्चे : 6 में से पांच भाग।

शिक्षक : तो $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ कितना हुआ?

कुछ बच्चे : $\frac{5}{6}$ मैडम।

शिक्षक : तो क्या यह कहना ठीक है कि

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}?$$

बच्चे : जी हां मैडम।

शिक्षक ने इसके बाद $\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$ जैसे कुछ और अभ्यास करवाए। धीरे-धीरे बच्चे भिन्नों के जोड़ को लेकर आत्मविश्वास नज़र आने लगे।

और अब आपके लिए एक अभ्यास।

E 3) क्या आपको लगता है कि उदाहरण 2 में दर्शाई गई विधि बच्चों को भिन्न सिखाने में कारगर होगी। इसके फायदे व नुकसान क्या हो सकते हैं?

शिक्षक ने देखा कि हर बार जब बच्चे किसी प्रश्न की गणना के संदर्भ में तर्क करते, तो उनकी सोच तेज़ होती जा रही थी। अब वे भिन्नों के जोड़ में क्रम पहचानने लगे थे। हालांकि उन्हें कोई बना बनाया नियम बताया नहीं गया था मगर वे खुद स्वाभाविक रूप से जोड़ के नियम की ओर बढ़ रहे थे।

नोट : बेशक हम ये सामान्य नियम जानते हैं कि समान हर वाली भिन्नों को जोड़ते समय अंशों को जोड़ा जाता है और हर वहीं रखा जाता है।

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + c \times b}{bd}$$

परन्तु यह सामान्य नियम इतना अमूर्त है कि बच्चों के लिए इसे इसी रूप में समझ पाना कठिन होता है। मगर आपने ऊपर के उदाहरण में देखा कि किसी विशिष्ट संदर्भ में वे इस नियम को पकड़ पाते हैं।

अभी तक हमने जो चर्चा की उसके आधार पर हम कह सकते हैं कि भिन्नों के जोड़ सिखाने के तीन चरण होते हैं:

- 1) बच्चों को भिन्नों की तुल्यता की संकल्पना समझने के लिए काफी समय दिया जाना चाहिए। अन्य काम करने से पूर्व यह संकल्पना स्पष्ट रूप से समझ आ जानी चाहिए।
- 2) सर्वप्रथम समान हर वाली भिन्नों को जोड़ने की बात की जानी चाहिए। इसके लिए टोस चीज़ों व चित्र मॉडलों का उपयोग करना चाहिए। इनसे उन्हें सामान्य क्रम देखने में मदद मिलती है।
- 3) असमान भिन्नों का जोड़।

यदि बच्चे पहले दो चरण अच्छी तरह करते हैं तो उन्हें यह समझ में आ जाता है कि भिन्नों के जोड़ के लिए समान हर की ज़रूरत क्यों होती है। इस तरह से वे यह भी समझ जाते हैं कि क्यों हम जोड़ते वक्त मूल भिन्न की जगह समान हर वाली तुल्य भिन्न का उपयोग करते हैं। एक उदाहरण से बात स्पष्ट हो जाएगी।

एक शिक्षक, जिन्होंने अपने विद्यार्थियों को भिन्न का जोड़ सीखने में मदद हेतु कई गतिविधियों का प्रयोग किया था, ने हमें भिन्नों के घटाने सम्बंधी अनुभव सुनाए। उनका मानना था कि

जब बच्चे भिन्नो का जोड़ इतनी गहराई से सीख चुके हैं, तब घटाना सिखाने के लिए ज्यादा समय लगाने की जरूरत नहीं है। इसलिए उन्होंने बोर्ड पर घटा के कुछ उदाहरण बताए और फिर विद्यार्थियों को निम्नलिखित प्रश्न हल करने को दिए:

$$(i) \quad \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \qquad (ii) \quad \frac{2}{3} - \frac{1}{5}$$

अगले अभ्यास में हमने आपके लिए कुछ और जानकारियां दी हैं तथा आपसे स्थिति का विश्लेषण करने को कहा है।

E4) एक कक्षा को ऊपर दिये गये सवाल (i) व (ii) हल करने को दिए। कुछ बच्चों ने

क्रमशः $\frac{1}{0}$, $\frac{1}{2}$ उत्तर दिये।

- i) आपके अनुसार घटाने के नियम की समझ में कमी के क्या कारण हो सकते हैं?
- ii) इन बच्चों के उत्तरों के आधार पर घटाने में वे किस नियम को लागू कर रहे हैं?
- iii) बच्चों ने यह गलत नियम कैसे हासिल कर लिया होगा?
- iv) इस गलत धारणा को दूर करने के लिए बच्चों को कौन सी गतिविधियों और अभ्यासों से मदद मिल सकती है?

आइए अब भिन्न सीखने से सम्बंधित एक महत्वपूर्ण बात पर ध्यान दें। जैसा कि हमने अन्य विषयों के बारे में कहा है, इस मामले में भी इस बात का बहुत महत्व है कि हर कदम पर किस तरह की भाषा का उपयोग किया जाता है। आपने ध्यान दिया होगा कि कई बार हम तुल्य के लिए 'एक सी' जैसे गलत मुहावरे का उपयोग कर जाते हैं। बच्चे इन्हें सुनते हैं और बगैर अर्थ समझे इनका उपयोग शुरू कर देते हैं। ये मुहावरे एक तरह से 'कक्षा शब्दावली' के अंग बन जाते हैं। यह कहना बहुत मुश्किल है कि किस हद तक ऐसे मुहावरे का असर सीखने की प्रक्रिया पर पड़ता है। मगर यह स्पष्ट है कि बच्चे इन मुहावरों का उपयोग शुरू कर देते हैं और हम समझते हैं कि वे इनसे सम्बंधित विचार भी समझ गए हैं। हमें पता नहीं है कि वास्तव में बच्चों के लिए इनका क्या अर्थ होता है या उनके दिमाग में क्या छवि बनती है। आप में से कुछ लोगों ने अवश्य ध्यान दिया होगा कि भिन्नो को जोड़ने व गुणा करने सम्बंधी ऐलगोरिदम में इस तरह के अपरिभाषित या असहयोगी शब्दों की भरमार होती है। अधिकतर बच्चे इन्हें किसी मंत्र की तरह दोहराते रहते हैं। आइए कुछ उदाहरण देखते हैं कि जैसे बच्चे 'उलटने', 'काटने' जैसे शब्दों को लेकर उलझते रहते हैं। ये वे शब्द हैं जो विभिन्न नियमों के संदर्भ में नज़र आते रहते हैं। यहां हम भिन्नो के जोड़ की बात करेंगे।

एक बार मैंने अपने पड़ोसी की बच्ची शांति को $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ हल करने को कहा। शांति पांचवी में पढ़ती है।

शांति : जोड़ने के लिए हर बराबर होने चाहिए। तो मैं $\frac{3}{4}$ को उलट देती हूँ। तो आ गया,

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

उत्तर 2 है।

यहां ध्यान दें कि उसे इतना तो पता है कि जोड़ने के लिए हर बराबर होना चाहिए। साथ ही उसे यह भी बताया गया है कि भाग देते वक्त भिन्न को उलट देते हैं। इसलिए उसने हर को बराबर करने के लिए 'उलटने' की विधि का गलत इस्तेमाल कर डाला। आप इसे ठीक कैसे करेंगे?

नियमों में एक और आम मुहावरा 'काट देना'। इसके गलत उपयोग का एक उदाहरण देखिए।

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$$

रीटा को जब $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ हल करने को दिया गया तो उसने कुछ यों किया:

"आं..... नीचे के अंक दोनों में बराबर होने चाहिए। तो पहले काट देते हैं..... दो एकम दो, और दो दूनी चार। अब..... तीन एकम तीन, तो यह $\frac{2}{3}$ हो गया। (रीटा का हल हाशिए में देखिए।)

क्या आपने इस बात पर गौर किया कि वह बुदबुदा रही थी कि नीचे के अंक बराबर होने चाहिए। जोड़ के दौरान इस मुहावरे का भी खूब इस्तेमाल किया जाता है। अधिकतर बच्चे कारण जाने बगैर हर को बराबर कर देते हैं। यहां मैं एक दिलचस्प उदाहरण बता रही हूँ। यह मैंने कहीं पढ़ा था।

कुछ बच्चों को $\frac{4}{3} + \frac{5}{4}$ का सवाल हल करने को दिया गया। एक बच्चे ने इसे कैसे हल

किया। $\frac{4}{3} + \frac{5}{4} = \frac{16}{12} + \frac{15}{12} = \frac{31}{12}$

शिक्षक : क्या तुम बता सकती हो कि 12 का उपयोग क्यों किया?

लड़की : नीचे के अंक बराबर करने के लिए।

शिक्षक : और नीचे के अंक बराबर क्यों करने थे?

लड़की : क्योंकि यदि वे तिहाई और चौथाई होंगे तो हम उन्हें जोड़ नहीं सकते। इसलिए हमें ऐसी संख्या ढूँढनी पड़ेगी जिसमें 3 और 4 दोनों का भाग जाए। और फिर 12 में तीन का कितनी बार भाग जाएगा? चार बार। तो 4 चौके

16..... और इसलिए उत्तर $\frac{31}{12}$ हुआ।

शिक्षक : बढ़िया। तो $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ लिखने की बजाय तुमने $\frac{16}{12} + \frac{15}{12}$ लिखा। परन्तु कोई कहेगा कि तुम अलग ही प्रश्न हल करने लगी।

लड़की : हां।

शिक्षक : तो तुम क्या उत्तर दोगी?

लड़की : यदि नीचे के अंक बराबर नहीं हैं, तो उन्हें बारह बनाना पड़ेगा।

शिक्षक : परन्तु कोई सोचेगा कि यह तो अलग ही प्रश्न है?

लड़की : हां..... पर हमें ऐसे ही सिखाया है।

ऊपर दिए गये चर्चा से मुद्दा यह उभरता है कि हमें अपने विद्यार्थियों को यह सोचने के लिए प्रेरित करना चाहिए कि वे कोई विधि क्यों अपना रहे हैं? इसके लिए हमें उनसे ऐसे प्रश्न पूछने की आदत बनानी होगी ताकि उन्हें ये सोचने का मौका मिले कि वे क्या कर रहे हैं। हमें एक ऐसा माहौल बनाना होगा जहां विद्यार्थी यह महसूस करें कि उनके किसी भी प्रश्न, कथन या भ्रम का मजाक नहीं बनाया जाएगा और न ही उसे अनदेखा किया जाएगा।

E5) एक बच्चे को $3\frac{2}{5}$ में से $1\frac{1}{2}$ घटाने को कहा गया उसने $1\frac{1}{2} - 3\frac{2}{5}$ कर दिया।
उसने यह गलती क्यों की होगी? आप उसकी मदद कैसे करेंगे?

एक और स्थिति देखते हैं।

उदाहरण 5

एक दिन मेरी पड़ोसन अपनी बिटिया के साथ मेरे घर आई। वह चिन्तित दिख रही थी।

उसकी बिटिया मिश्रित भिन्न को विषम भिन्न में बदल नहीं पा रही थी। जैसे वह $1\frac{1}{3}$ को

$\frac{4}{3}$ नहीं लिख पाती थी। पड़ोसन ने बताया कि उसने पाठ्यपुस्तक के तरीके से समझाने

की कोशिश की। उसने मुझे पाठ्यपुस्तक में दिया गया तरीका भी दिखाया। इसमें बताया

है कि $1\frac{1}{3} = \frac{3 \times 1 + 1}{3} = \frac{4}{3}$ । पुस्तक को ध्यान से देखने के बाद मैंने बच्ची से बातचीत की।

मैं : क्या तुम्हें दो भिन्नों का जोड़ करना आता है?

लड़की : हां।

मैं : ठीक। ज़रा ये जोड़ तो करके दिखाओ।

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}, \frac{1}{4} + \frac{1}{3}, \frac{3}{2} + \frac{2}{5}$$

उसने सही-सही कर दिए।

मैं : अब बताओं $\frac{2}{2} + \frac{1}{2}$ कितना होगा?

लड़की : $\frac{3}{2}$ होगा।

मैं : और $\frac{3}{3} + \frac{1}{3}$ कितना होगा?

लड़की : $\frac{4}{3}$ होगा।

में : परन्तु क्या $\frac{2}{2} + \frac{1}{2}$ और $1 + \frac{1}{2}$ एक ही बात नहीं है?

लड़की : हां, एक ही हैं।

में : क्या हम $1 + \frac{1}{2}$ को मिश्रित भिन्न $1\frac{1}{2}$ लिख सकते हैं?

लड़की : हां, लिख सकते हैं।

में : तो इसका मतलब यह हुआ कि $1\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ । अब क्या तुम मुझे मिश्रित भिन्न का एक उदाहरण बता सकती हो?

लड़की : $2\frac{1}{2}$

में : इसे मिश्रित भिन्न क्यों कहते हैं?

लड़की : क्योंकि यह $2 + \frac{1}{2}$ के बराबर है। इसमें 2 पूर्णांक है एक पूर्णांक को 2 भागों में बांटकर एक भाग लिया गया है।

में : बहुत बढ़िया।

इसके बाद मैंने उससे $1\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{3}$ आदि संख्याओं को निम्नलिखित रूप में लिखने को कहा:

$$1\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

$$3\frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2}$$

$$4\frac{1}{3} = 4 + \frac{1}{3} \text{ आदि।}$$

में : अब बताओ $1 + 1 + \frac{1}{2}$ कितना होगा?

लड़की : आं एक पूरा है, फिर एक और पूरा है और आधा है। हां, यह तो $2\frac{1}{2}$ है।

में : और $1 + 1 + 1 + \frac{1}{2}$ कितना होगा?

लड़की : $3\frac{1}{2}$ होगी।

में : कैसे निकाला?

लड़की : क्योंकि $1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

में : ठीक अब बताओ $2\frac{1}{2}$ क्या होगा?

वह थोड़ी असमंजस में थी। मैंने उसकी मदद के लिए लिखा $2\frac{1}{2} = 1 + 1 + \frac{1}{2}$

मैं : $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ होता है ना ?

लड़की : जी, आन्टी।

मैं : यानी $2\frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{2}{2} + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

लड़की : अरे, यह तो बहुत सरल है।

मैं : अब तुम $4\frac{1}{2}$ की अनुचित भिन्न लिखो।

लड़की : $4\frac{1}{2} = 1 + 1 + 1 + 1 + \frac{1}{2}$

$$= 1 + 1 + 1 + \frac{3}{2}$$

$$= 1 + 1 + \frac{5}{2}$$

$$= \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$$

मैं : बढ़िया। अब यदि तुम्हें $1\frac{1}{3}$ को बदलना है तो $1\frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3}$ । फिर अगला कदम क्या होगा? (मैंने उसे हल्का सा इशारा दिया) तुमको पता ही है कि

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4}$$

लड़की को बात समझते देर न लगी। उसने तत्काल लिखा $1\frac{1}{3} = \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ । इसी प्रकार

से उसने लिखा $2\frac{1}{3} = 1 + 1 + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ इसके बाद मैंने उससे यही काम $4\frac{3}{5}$

से साथ करने को कहा। उसने लिखा $4\frac{3}{5} = \frac{5}{5} + \frac{5}{5} + \frac{5}{5} + \frac{5}{5} + \frac{3}{5} = \frac{23}{5}$ धीरे-धीरे मैं उसे अनुचित भिन्न पता करने की त्वरित विधि की ओर ले गई। संख्याओं का क्रम देखकर वह

समझ गई कि $4\frac{3}{5} = \frac{5+5+5+5+3}{5} = \frac{4 \times 5 + 3}{5} = \frac{23}{5}$

इसके बाद तो उसने $3\frac{1}{4}$, $7\frac{5}{8}$ जैसी कई संख्याओं को सही-सही विषम भिन्नों में बदला।

वह खुश और आत्मविश्वास नज़र आ रही थी।

- E6) अपने अनुभव और उदाहरण 5 के आधार पर क्या आप सहमत हैं कि कई बार छोटी-मोटी गलतियाँ, पूरे विषय में बच्चे की समझ को अवरुद्ध कर देती हैं, हालाँकि कोई भी समझदार शिक्षक आसानी से ऐसी गलतियों को ठीक कर सकता/सकती है। अपने उत्तर का कारण भी दीजिए।

उदाहरण से पता चलता है कि बच्चों को छोटी-छोटी गलतफहमियाँ होती हैं जिन्हें शिक्षक बहुत थोड़े समय में आसानी से दूर कर सकते हैं, यदि कि वे ऐसा करना चाहें। बदकिस्मती से होता यह है कि हम ऐसी छोटी-छोटी बातों को अनदेखा करके संकल्पना के अन्य पहलू पढ़ाते चले जाते हैं हम यह नहीं समझ पाते कि अक्सर इसकी वजह से बच्चों में संकल्पना की समझ में बाधा आ जाती है और फिर वे उससे जुड़ी अन्य संकल्पनाएं भी नहीं समझ पाते हैं। अहम् बात यह है कि यदि बच्चों से बात की जाए, तो उन्हें समस्याओं से पार पाने में मदद मिलती है। ज़रूरी नहीं कि यही उदाहरण सबके साथ कारगर साबित हो। अलग-अलग स्थिति व अलग-अलग संदर्भ में आपको शुरुआत वहाँ से करनी पड़ेगी जो बच्ची जानती है। इसी से शुरु करके संकल्पना स्पष्ट करने की दिशा में बढ़ना होगा।

अगले खण्ड में हम भिन्नों की गुणा व भाग से सम्बंधित कुछ समस्याओं पर विचार करेंगे।

9.3 गुणा व भाग की समझ को विकसित करना

इस खण्ड में हम उन तरीकों पर चर्चा करेंगे जिनका इस्तेमाल करके बच्चों को भिन्न के गुणा व भाग समझाने में मदद मिल सकती है। निम्नलिखित उदाहरण से इस तरह की चर्चा की आवश्यकता स्पष्ट हो जाएगी। ऐसे उदाहरणों से वैसे तो आप परिचित ही होंगे।

बच्चों को प्रायः $\frac{1}{2}$ के $\frac{3}{4}$ का $\frac{2}{3}$ जैसे प्रश्न हल करने में काफी कठिनाई होती है। इसका एक कारण तो यह हो सकता है कि स्कूलों में उन्हें ऐसे प्रश्न लगाने के मात्र नियम बताए गए हैं। जिन बच्चों को नियम याद होते हैं, वे तो सही उत्तर निकाल लेते हैं जबकि कई बच्चों को तो यही समझ नहीं आता कि शुरु कहां से करें। यह भी देखा गया है जब बच्चों से पूछा जाता है कि $\frac{1}{2}$ के $\frac{3}{4}$ का $\frac{2}{3}$ कैसे $\frac{1}{4}$ होता है तो वे कहते हैं 'ऊपर नीचे काटके'। इस तरह के सवालों को लगाते वक्त वे यह तय नहीं कर पाते कि किस पूर्ण का उपयोग करें। अतः वे जब अपने उत्तर की व्याख्या करते हैं। तो उनकी यही कमज़ोरी सामने आती है।

बच्चों को यह समझने में मदद देना चाहिए कि जब वे किसी चीज का दो-तिहाई निकालने का प्रयास करते हैं, तो पहले यह जानना ज़रूरी है कि 'वह चीज़' है क्या। अर्थात् उन्हें पता होना चाहिए कि 'पूर्ण' क्या/कितना है। तो, इस मामले में बच्चों की मदद कैसी की जाए? आइए यह देखते हैं कि मेरी एक मित्र शिक्षक विद्यार्थियों को भिन्न का गुणा कैसी सिखाती हैं।

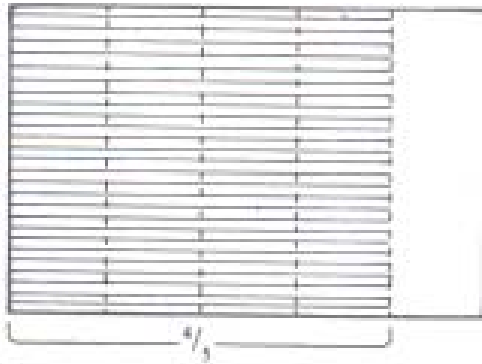
उदाहरण 6

गुणा सिखाने से पहले शिक्षक यह पक्का कर लेना चाहती थी कि क्या बच्चे 'भाग' का सम्बंध 'पूरे' से जोड़ पाते हैं? इसके लिए उसने बच्चों को विभिन्न 'पूरों' से सम्बंधित अभ्यास दिए। इनके बारे में हम इकाई 8 में चर्चा कर चुके हैं। उसके बाद वह इस तरह आगे बढ़ी:

शिक्षक : चलो देखते हैं कि $\frac{4}{5}$ का $\frac{2}{3}$ कितना होता है। $\frac{4}{5}$ के $\frac{2}{3}$ का अर्थ होता है एक पूरे के $\frac{4}{5}$ का $\frac{2}{3}$ । तो सबसे पहले 1 का $\frac{4}{5}$ पता लगाएं। इसके लिए हम कागज़ रंगने के तरीके का उपयोग करेंगे। (शिक्षक ने एक बड़ा कागज़ लेकर बोर्ड पिन या टेप की मदद से उसे ब्लैक बोर्ड पर लगा दिया (चित्र 9) अब उसने इस कागज़ पर एक आयत बनाया। यह आयत एक पूरा दर्शाता है।) अब 1 का $\frac{4}{5}$ पता करते हैं।

(उसने शालिनी नाम की एक छात्रा को ब्लैक बोर्ड पर बुलाकर उससे 1 के $\frac{4}{5}$ भाग को रंगने को कहा)

शालिनी : 1 का $\frac{4}{5}$ पता करने के लिए पहले हम पूरे को पांच भागों में बांट देंगे और फिर चार भागों में रंग देंगे। (चित्र 9 की तरह, ऐसा करती हैं)



चित्र 9: निम्न द्वारा 1 का $\frac{4}{5}$ दिखाना

शिक्षक : शाबाश। अब बताओं इस भाग का $\frac{2}{3}$ क्या होगा कैसे पता करेंगे? यह याद

रखना कि हमें $\frac{4}{5}$ का $\frac{2}{3}$ का पता करना है, 1 का नहीं। (यह बोलते हुए शिक्षक रंगे हुए भाग की ओर संकेत करती हैं) कैसे करेंगे? रवि, क्या तुम कोशिश करेंगे?

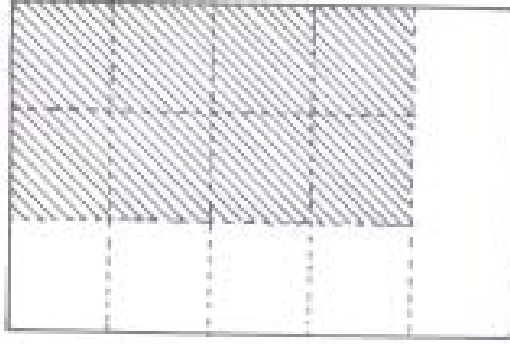
रवि : हमें इसे तीन भागों में बांटना होगा और उनमें से दो भाग लेने होंगे।

(वह रंगे हुए भाग को खड़ी रेखाओं से तीन भागों में बांटने की कोशिश करता है।)

शिक्षक : क्या आड़ी रेखाओं से करना ज़्यादा आसान होगा?

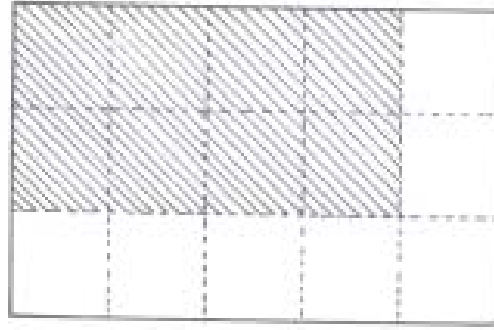
रवि : हां, हां। आड़ी रेखाओं से बांटना ज़्यादा आसान है।

(शिक्षक यह करके दिखाती है। चित्र 10 देखें)



चित्र 10: चित्र 9 का $\frac{4}{5}$ का $\frac{2}{3}$ दिखाना

शिक्षक : बढ़िया ! तो यह रंगा हुआ भाग $\frac{4}{5}$ का $\frac{2}{3}$ है। अब यह पता करते हैं कि यह पूर्ण का (यानी मूल पूरे का) कितना अंश है। यह आसानी से पता करने के लिए हम पूर्ण का बंटवारा इस तरह पूरा कर देंगे। (चित्र 11 देखें)



चित्र 11: 1 के $\frac{4}{5}$ का $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{15}$ के बराबर है।

अब बताओं पूर्ण को कुल कितने भागों में बांटा गया है? या यह देखो कि कुल कितने खाने बन गए हैं?

बच्चे : 15 खाने हैं।

शिक्षक : और रंगे हुए भाग में कितने खाने हैं?

बच्चे : 8 खाने हैं।

शिक्षक : रंगा हुआ भाग पूरे का $\frac{8}{15}$ है। यानी $\frac{4}{5}$ का $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{15}$ होता है।

बच्चे सहमत थे। अब शिक्षकों ने उन्हें A,B,C,D व पांच टोलियां बनाने को कहा। उसने प्रत्येक टोली को अलग-अलग प्रश्न दिया। शिक्षक ने प्रत्येक टोली के साथ काफी समय बिता कर यह जांच की कि क्या बच्चे रंगने की विधि से किसी भाग का भाग निकालना सीख/समझ गए हैं।

इसके बाद उसने कोशिश की कि बच्चे अपने उत्तरों के क्रम के आधार पर नियम विकसित करें। इसके लिए उसने प्रत्येक टोली को दिया गया प्रश्न तथा उसके द्वारा निकाले गए उत्तर ब्लैक बोर्ड पर क्रमबद्ध रूप से इस तरह लिख दिए:

A $\frac{2}{3}$ का $\frac{5}{7}$ $\frac{10}{21}$ होता है।

B $\frac{3}{4}$ का $\frac{2}{5}$ $\frac{6}{20}$ होता है।

C $\frac{2}{3}$ का $\frac{3}{8}$ $\frac{6}{24}$ होता है।

D $\frac{3}{4}$ का $\frac{2}{3}$ $\frac{6}{12}$ होता है।

E $\frac{3}{5}$ का $\frac{4}{7}$ $\frac{12}{35}$ होता है।

शिक्षक : प्रश्नों और उनके उत्तरों को देखो। पहले प्रश्न में 3 और 7 तथा उसके उत्तर 21 में क्या कोई सम्बंध दिखता है?

एक छात्र : जी मैडम, 3×7 बराबर 21 होता है।

शिक्षक : और अगले प्रश्न में 4, 5 और 20 हैं। इसी प्रकार से क्या C, D और E प्रश्नों में भी क्या कोई सम्बंध दिखता है।

बच्चा : जी मैडम $4 \times 5 = 20$, $3 \times 8 = 24$, $4 \times 3 = 12$ और $5 \times 7 = 35$ होता है।

शिक्षक : क्या सब इससे सहमत हैं?

बच्चे : जी मैडम।

एक अन्य छात्र : पहले सवाल में अंश $10, 5 \times 2$ की वजह से आया है?

छात्र

शिक्षक : बहुत बढ़िया। क्या अब तुम रंग भरे बगैर बता सकते हो कि $\frac{5}{6}$ का $\frac{3}{4}$ क्या होगा?

वही छात्र : $\frac{5 \times 3}{6 \times 4} = \frac{15}{24}$ होगा।

शिक्षक : शाबाश। तो तुमने किसी भाग का भाग निकालने यानि भिन्नों की गुणा का नियम पता कर लिया है। तुम अंशों की गुणा करके गुणनफल का अंश और हरों की गुणा करके गुणनफल का हर निकाल सकते हो। जब एक बार बच्चों को यह बाद समझ में आ गई तो शिक्षक ने फिर जानबूझकर भिन्नों

का जोड़ दोहराया ताकि बच्चे समझ सकें कि उदाहरणतः $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} \neq \frac{2+4}{3+5}$

ऐसे अन्तर स्पष्ट करना बहुत ज़रूरी है जो कि बच्चों को वैसे समझ नहीं आते।

तो आपने देखा कि किस तरह से बच्चे गुणा के नियम तक पहुंचे। इस बात पर ध्यान दें कि इस तरह का नियम बनाने अथवा क्रम पहचानने से पहले आवश्यक होगा कि बच्चों का $\frac{c}{d}$ का $\frac{a}{b}$ निकालने का काफी गतिविधि आधारित अनुभव हो जाए। इससे उनमें आत्मविश्वास आएगा और वे यह समझ पाएंगे कि क्यों यह नियम सही उतरता है।

अब आइए क्यों न एक अभ्यास किया जाए?

E 7) बच्चों को $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ समझाने के लिए कोई गतिविधि सुझाइए।

आगे हम इस बात पर चर्चा करेंगे कि भिन्नों की गुणा करते वक्त बच्चों को सामान्य गुणनखण्ड करने में किस तरह की कठिनाईयां होती हैं।

$\frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{6}{4} \times \frac{7}{6}$ को हल करते हुए कुछ बच्चों ने इसका उत्तर 7 लिखा।

ध्यान दें कि बच्चों ने हर में दोनों 6 को काट दिया है। एक समस्या यह भी देखी गयी है कि समान गुणनखण्ड काटने के बाद वे 1 की बजाय 0 लिख देते हैं। यदि बच्चे यह समझ जाएं कि काटने का अर्थ यह होता है कि दोनों संख्याओं को एक सामान्य गुणनखण्ड से भाग दिया जा रहा है, तो शायद ऐसी गलतियां नहीं होंगी। इसी प्रकार से उन्हें यह भी समझ में आना चाहिए कि अंश के एक 5 से हर का एक ही पांच काटा जा सकता है और एक 6 से एक ही 6 कटेगा। निम्नलिखित उदाहरण में देखते हैं कि शिक्षक 'कट-पिट' (cancellation) की प्रक्रिया अपने विद्यार्थियों को कैसे समझाती है?

उदाहरण 7

शिक्षक बच्चे से यह बातचीत करती है।

शिक्षक : $\frac{3}{5} \times \frac{5}{8}$ कितना होगा?

छात्र : $\frac{3}{5} \times \frac{5}{8} = \frac{3 \times 5}{5 \times 8} = \frac{15}{40}$ होगा।

शिक्षक : क्या तुम इसे सरल बना सकते हो?

छात्र : $\frac{3}{8}$ होगा।

शिक्षक : ठीक। अब एक और सवाल पूछती हूं। क्या 3×5 और 5×3 बराबर हैं?

छात्र : जी।

शिक्षक : तो $\frac{3 \times 5}{5 \times 8}$ को एक और तरीके से कैसे लिख सकते हैं?

एक छात्र : $\frac{3 \times 5}{8 \times 5}$

एक अन्य छात्र : $\frac{5 \times 3}{5 \times 8}$

एक अन्य छात्र : $\frac{5 \times 3}{8 \times 5}$

शिक्षक : ठीक है। चलो $\frac{5 \times 3}{5 \times 8}$ को ही लेते हैं। क्या तुम इसे दो भिन्नों की गुणा के रूप में लिख सकते हो?

छात्र : जी, लिख सकते हैं। $\frac{5 \times 3}{5 \times 8} = \frac{5}{5} \times \frac{3}{8}$

शिक्षक : $\frac{5}{5} =$ कितना?

छात्र : $\frac{5}{5} = 1$

शिक्षक : मतलब हम इस गुणा को ऐसे भी लिख सकते हैं। $\frac{5 \times 3}{8 \times 5} = 1 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$

इसे करने का एक और तरीका यह है कि अंश और हर दोनों को 5 से भाग दे दें। अब यदि हम अंश को 5 से भाग दें तो हमें 1×3 मिलेगा और हर को पांच से भाग देने पर 1×8 मिलेगा। यानि

$$\frac{5 \times 3}{5 \times 8} = \frac{1 \times 3}{1 \times 8} = \frac{3}{8}$$

ध्यान रखना कि अंश और हर में से 5 काटने के बाद उनकी जगह 1 लिखना न भूलना। मैंने भी 1 लिखा है। इसी प्रकार से हम

$$\frac{3 \times 5}{5 \times 8} = \frac{3 \times 1}{1 \times 8} = \frac{3}{8} \text{ भी लिख सकते हैं।}$$

अंश और हर दोनों में 5 का भाग देने की इस क्रिया को अंश व हर में से 5 काटना भी कहते हैं।

बाद में शिक्षक ने इसी तरह बातचीत के ज़रिये यह भी समझाया कि $\frac{4 \times 7}{5 \times 6}$

जैसे सवाल में 'कट-पिट' (cancellation) कैसे करते हैं?

इस उदाहरण से स्पष्ट है कि कट पिट कि प्रक्रिया की मूलभूत बातें विस्तार में समझाना आवश्यक है। सिर्फ प्रक्रिया बताने से काम नहीं चलेगा। बदकिस्मती से अधिकांश शिक्षक करते यह हैं कि कक्षा में एक-दो प्रश्नों पर चर्चा करते हैं और ढेर सारे अभ्यास गृहकार्य के रूप में दे देते हैं। इससे बात नहीं बनती क्योंकि बच्चे वास्तव में प्रक्रिया को समझ नहीं पाते। अतः वे पालकों से मदद मांगते हैं। और कई पालक बच्चों की गलतियां सुधारने में असमर्थ होते हैं। इसलिए अभ्यास देने से पहले यह सुनिश्चित करना आवश्यक है कि बच्चे अवधारणा समझ गए हैं। यही बात पालकों या अन्य वयस्कों पर भी लागू होती है। गुणा करते वक्त आने वाली एक और कठिनाई भी है। जिसकी चर्चा हम करने जा रहे हैं। दो मिश्रित भिन्नो, जैसे $2\frac{1}{2}$ और $3\frac{2}{3}$ का गुणा करते वक्त बच्चे लिख देते हैं।

$$2\frac{1}{2} \times 3\frac{2}{3} = 2$$

ऐसा इसलिए होता है क्योंकि वे गलती से $2\frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{2}$ और $3\frac{2}{3} = 3 \times \frac{2}{3}$ समझते हैं। इस तरह की गलती न हो, यह सुनिश्चित करने के लिए हमें बच्चों को यह यकीन दिलाना होगा कि $2\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}$ होता है।

यह करने का एक तरीका तो यह हो सकता है कि हम काफी ठोस अनुभवों के आधार पर उन्हें यह समझाएं कि दो विषम भिन्नो का गुणा करने से पहले उन्हें अनुचित भिन्नो में बदलना ज़रूरी होता है। इसके बाद ही गुणा किया जा सकता है।

आप यह काम कैसे करेंगे? इसे हम आपके लिए एक अभ्यास के रूप में रखते हैं।

E8) मान लीजिए किसी बच्चे को गलती से यह लगता है कि $2\frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{2}$. आप उसे कैसे यकीन दिलाएंगे कि उसकी धारणा गलत है और $2\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}$ होता है?

अब तक हमने भिन्नो के गुणा से सम्बंधित समस्याओं पर विचार किया। आइए अब भाग से जुड़ी समस्याओं पर गौर करें।

इस संदर्भ में मैं अपने पड़ोस की दस वर्षीय बच्ची अजिता और उसकी सहेली के साथ अपने अनुभव का जिक्र करना चाहूंगी। हम लोग भिन्नो की क्रियाओं के बारे में बातचीत कर रहे

थे। बातचीत के दौरान मैंने उनसे पूछा कि $\frac{1}{3} \div \frac{1}{4}$ कितना होगा? अजिता ने तुरन्त कहा

कि उसे इसका उत्तर निकालना आता है: $\frac{1}{3} \div \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

यह सुनकर उसकी सहेली रेणू ने कहा कि उत्तर $\frac{3}{4}$ नहीं बल्कि $\frac{4}{3}$ होगा। मैंने उनसे पूछा कि उन्होंने उत्तर कैसे निकाले।

अजिता : $\frac{1}{3} \div \frac{1}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$

रेणू : यह गलत है। हमें दूसरी संख्या को उलटकर गुणा करना पड़ेगा।

अजिता : ओह हां ! मैंने गलती कर दी। यह $\frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{3}$ होगा।

उनकी बातों से मुझे समझ में आ गया कि उन्हें भाग कि प्रक्रिया की बुनियादी बातें समझ में नहीं आई हैं। अतः मैंने उन्हें समझाना शुरू किया।

मैं : मान लो कि तुम्हारे पास 12 टॉफियां हैं। और तुम इन्हें 4 दोस्तों में बराबर-बराबर बांटना चाहती हो। हरेक को कितनी टॉफियां मिलेंगी?

लड़कियां : तीन-तीन।

मैं : तो क्या मैं इसी बात को लिख सकती हूँ कि $12 \div 4 = 3$ ।

लड़कियां : हां।

मैं : यानी $12 \div 4$ से हमें पता चलता है कि 12 में से चार-चार के कितने समूह हमें प्राप्त होंगे।

अब मैं 4 गिलास ले आई। 4 में से 2 गिलास खाली थे और 2 में शरबत भरा था। शरबत को मैंने एक बर्तन में डाल दिया।

मैं : अब इस शरबत को 4 लोगों में बराबर-बराबर बांटो-मैं, तुम दोनों और आया के लिए।

उन्होंने चार गिलासों में बराबर-बराबर शरबत डाला। हर गिलास $\frac{1}{2}$ भर गया।

मैं : 2 गिलास शरबत में से कितने आधे गिलास शरबत बना?

लड़कियां : 4

मैं : इसका मतलब हुआ कि $2 \div \frac{1}{2} = 4$, क्या तुम इससे सहमत हो?

लड़कियां : हां।

इसके बाद मैं एक रिबन ले आई और उसमें से 2 मीटर नाप लिया। इसके मैंने आधा मीटर नापकर काट लिया। मैंने उनसे पूछा कि 2 मीटर के टुकड़े में से $\frac{1}{2}$ मीटर के कितने टुकड़े निकल सकते हैं।

लड़कियां : 4 टुकड़े (उन्होंने यह भी बताया कि यह उत्तर कैसे आया)।

मैं : ठीक। तो हमें $2 \div \frac{1}{2} = 4$ मिला। अब देखें कि $2 \div \frac{1}{2} = 4$ और $2 \times 2 = 4$, नहीं?

लड़कियां : हां।

मैं : अब देखें कि $6 \div \frac{1}{3}$ कितना होता है?

मैंने रिबन के द्वारा उन्हें बताया कि $6 \div \frac{1}{3} = 18$ होता है। साथ ही मैंने इस बात पर भी

उनका ध्यान दिलाया कि $6 \div \frac{1}{3} = 18$ और $6 \times 3 = 18$

इसके बाद चर्चा निम्नानुसार आगे बढ़ाई।

मैं : क्या अब तुम बगैर रिबन के बता सकती हो कि $9 \div \frac{1}{3}$ क्या होगा।

लड़कियां : 27 होगा मैडम।

मैं : कैसे निकला?

लड़कियां : $9 \times 3 = 27$

मैं : बहुत अच्छे।

मैंने उन्हें यह नियम अच्छी तरह समझा दिया कि "किसी भिन्न में दूसरी भिन्न का भाग देने का मतलब यह है कि दूसरी भिन्न के उल्टे से गुणा कर दिया जाए।" इसके बाद मैंने अभ्यास के लिए उनसे कई सवाल करवाए, जैसे,

$$12 \div \frac{4}{3} = 12 \times \frac{3}{4} = 9$$

$$\frac{1}{3} \div \frac{1}{4} = \frac{4}{3}$$

बाद में मैंने रिबन की मदद से भी $\frac{1}{3} \div \frac{1}{4} = \frac{4}{3}$ जैसे प्रश्न समझाए। इससे उन्हें नियम को तार्किक रूप से समझने में मदद मिली।

—————X—————

और अब आपके लिए एक अभ्यास है, जिसका सम्बंध अब तक ही चर्चा से है।

E 9) कागज़ मोड़ने की गतिविधि के द्वारा आप बच्चों को कैसे समझाएंगे कि $1 \div \frac{1}{2} = 2$

$$\text{और } \frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{2} ?$$

इसके साथ ही हम इस इकाई को सम्पन्न करेंगे। हमें उम्मीद है कि इसके अध्ययन से आप यह समझ सकें होंगे कि भिन्नों की गणितीय क्रियाओं के दौरान बच्चे कई समस्याओं का सामना करते हैं। इस इकाई में हमने इस बात पर बल दिया है कि नियम सीखने से पहले आवश्यक है कि बच्चे अवधारणा समझ जाएं। हमें उम्मीद है कि इस इकाई से आपको मदद मिलेगी कि आप बच्चों की मदद कर पाएं। यहां हम इस इकाई का सारांश प्रस्तुत कर रहे हैं।

9.4 सारांश

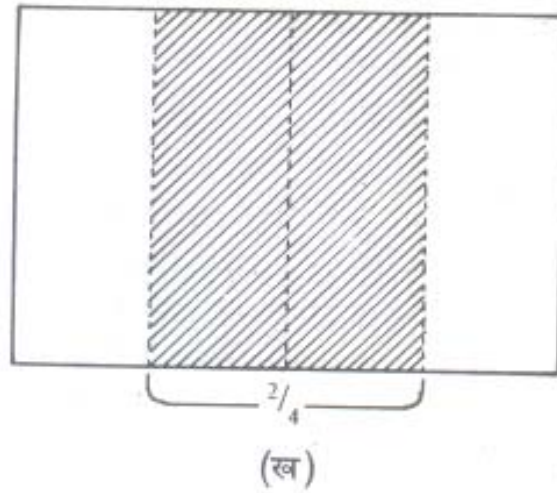
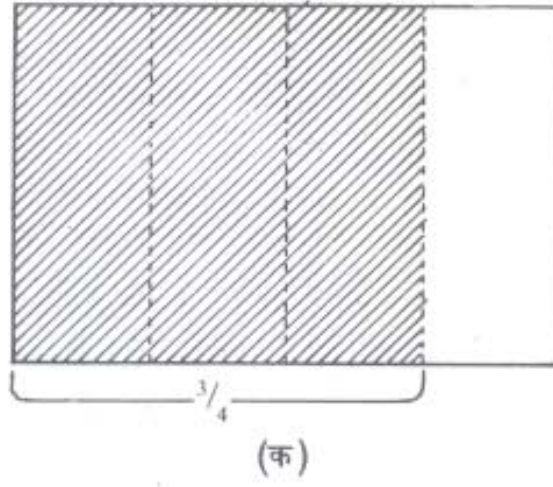
इस इकाई में हमने

- (1) बच्चों द्वारा भिन्न संख्याओं की चार बुनियादी क्रियाओं के दौरान की जाने वाली आम गलतियों की ओर ध्यान दिलाया।
- (2) इन क्रियाओं के दौरान आने वाली कुछ समस्याओं से निपटने में बच्चों को मदद देने के कुछ तरीके सुझाए।

9.5 अभ्यासों पर टिप्पणियां

E 1) समान भिन्नों का जोड़ सिखाने के लिए कागज़ मोड़ने की गतिविधि काफी कारगर होती है। परन्तु यदि असमान भिन्नों को जोड़ने की बात हो, तो कागज़ मोड़ने की गतिविधि से समझाना मुश्किल होता है। उदाहरण के लिए यदि हम $\frac{1}{8} + \frac{1}{3}$ दिखाना चाहें तो $\frac{1}{8}$ दिखाने के लिए कागज़ को आठ बराबर भागों में मोड़ना होगा और $\frac{1}{3}$ दिखाने के लिए तीन बराबर भागों में मोड़ना होगा। एक ही कागज़ पर ये दोनों करना कठिन है। यदि हम $\frac{1}{8}$ व $\frac{1}{3}$ दिखाने के लिए अलग-अलग कागज़ों का उपयोग करें तो हो सकता है कि बच्चे न समझ पायें कि इस स्थिति में पूर्ण क्या होगा। $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$ दिखाने के लिए कागज़ मोड़कर दिखाना कठिन है। पूरे कागज़ को 4 भागों में मोड़ लें। 3 भागों को रंग कर दें। यह $\frac{3}{4}$ दिखाता है, जैसा कि चित्र 12 (क) में दिखाया गया है।

अब इसमें से एक भाग का रंग मिटा देते हैं। अब रंग वाला भाग $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$ दिखाता है (देखें चित्र 12ख)



चित्र 12 : $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$ दिखाना

E2) 30 विद्यार्थियों की कक्षा को 5 टोलियों में बांटा गया है। प्रत्येक टोली के पास कागज़ की पट्टियां, रंगीन पेंसिलें, डबल रोटी के टुकड़े आदि जैसी सामग्री मौजूद है। हम इस सामूहिक गतिविधि को डबल रोटी का उदाहरण लेकर समझाएंगे। एक टोली को एक डबल रोटी दे दीजिए। अब दो बच्चों से कहिए कि वे दोनों ही आपको डबल रोटी का $\frac{1}{4}$ वां भाग दें। उनसे बातचीत के जरिये यह कहलवाइए

कि उन्हें कैसे पता है कि वह $\frac{1}{4}$ डबल रोटी है। उन्हें समझाइए कि $\frac{1}{4}$ डबल रोटी प्राप्त करने के लिए ज़रूरी है कि पहले उसे 4 बराबर भागों में बांटा जाए और फिर उनमें से एक भाग लिया जाए। अब उनसे पूछिए कि आपके पास कुल कितनी डबल रोटी है। जब उन्हें साफ तौर पर यह समझ में आ जाए कि आपको $\frac{1}{2}$

डबल रोटी मिली है तो उनसे इस तरीके से $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$ पता करने को कहिए। इसके बाद विभिन्न चीजों के साथ तरह-तरह के प्रश्न दीजिए।

इसी तरह से आप अन्य टोलियों के साथ भी कर सकते हैं। सारी टोलियों का काम हो जाने के बाद कोई ऐसा प्रश्न दिया जा सकता है जिसे सभी टोलियां करें। बाद में हर टोली से एक प्रतिनिधि को बुलाकर कहिए कि उन्होंने जो कुछ किया हो उसे समझाए।

E3) आप इस बात से तो सहमत होंगे कि असमान भिन्न का जोड़ सिखाने में अंश चार्ट पर आधारित गतिविधियां काफी उपयोगी होती है। खास तौर से एक समान 'पूरा' खोजने की बात इस चार्ट के आधार पर बखूबी समझाई जा सकती है। शुरुआत में शायद यह गतिविधि बच्चों को थोड़ी मुश्किल व उबाऊ लगे। जैसे-जैसे वे इस चार्ट का उपयोग सीखते जाते हैं, वैसे-वैसे उन्हें इन गतिविधियों में रस आने लगता है। इस गतिविधि का एक लाभ यह है कि इससे भिन्न से जुड़ी कई अन्य अवधारणाएं भी सिखाई जा सकती हैं। तो क्यों न आप इसका इस्तेमाल करके इसकी उपयोगिता को परख लें।

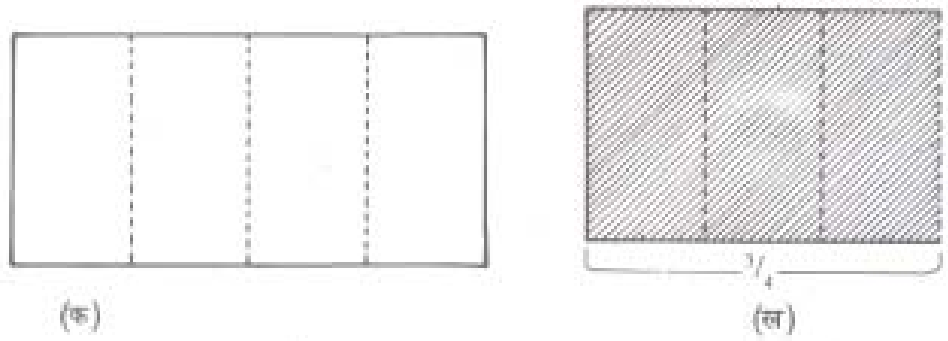
E4) दोनों ही सवाल में बच्चों ने घटाने का जो नियम लगाया था, वह है $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$ आपने यह भी ध्यान दिया होगा कि पहले प्रश्न में बच्चों ने यह भी ध्यान नहीं दिया है कि 0 से भाग अपरिभाषित है। दूसरे प्रश्न में उन्होंने 3 - 5 की गणना में भी गलती की है। यानी दोनों ही प्रश्नों में एकाधिक गलतियां की गई हैं। वैसे तो उन्होंने नियम ही गलत लागू किया है। दूसरे कि अपने ही ढंग का नियम लगाते हुए उन्होंने गलती कर दी है। इन गलतियों की एक वजह तो यह हो सकती है कि उनके शिक्षक ने भिन्नों का घटाना सिखाने में पर्याप्त समय नहीं लगाया। शिक्षक ने मान लिया कि जब बच्चों को जोड़ आता है, तो घटाना उसी तरह से कर लेंगे। यह बात तेज़ बच्चों के लिए सही हो सकती है। मगर आम बच्चों के लिए तो फिर से उतना ही समय घटाने की संक्रिया पर भी लगाना होगा। शायद भिन्नों के घटाने की संक्रिया में शामिल पेचीदगियां समझाने में थोड़ा ज्यादा समय ही लगे।

इस संदर्भ में कागज़ मोड़ने या अंश चार्ट की गतिविधियां उपयोगी हो सकती हैं।

E5) आपने देखा होगा कि बच्चों को पूर्णांक संख्या या भिन्न संख्याओं की क्रियाएं सिखाते वक्त आम तौर पर इसी बात पर ध्यान दिया जाता है कि बच्चे नियम याद कर लें। परन्तु, यह भुला दिया जाता है कि इस तरह के नियमों की भाषा न समझ पाने के कारण कई समस्याएं उभरती हैं। भाषा हिन्दी (या अंग्रेज़ी या.....) हो सकती है अथवा गणित की भाषा हो सकती है। जैसे जब आप बच्चे से कहते हैं कि $\frac{3}{2}$ में से $\frac{2}{3}$ घटाओ तो आप मानकर चलते हैं कि वह 'घटाओ' का अर्थ समझती है और यह भी समझती है कि 'में से' का अर्थ क्या होता है। दरअसल विभिन्न शब्दों का अर्थ आत्मसात् करने के लिए बच्चों को काफी अभ्यास की जरूरत होती है।

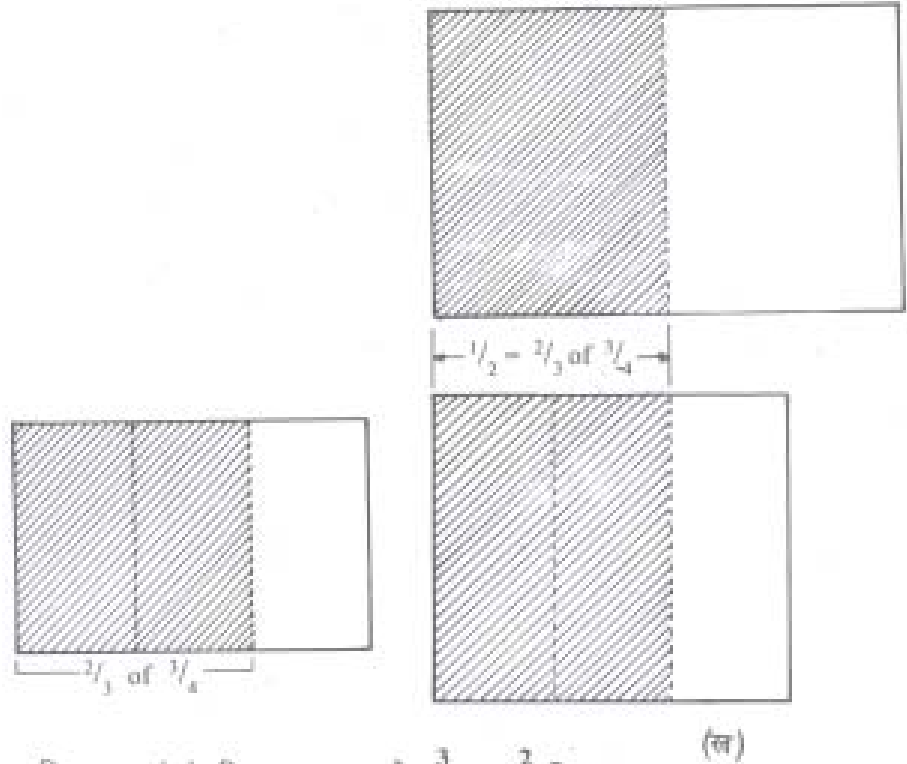
E6) इसके बारे में हमने E 6 के तुरन्त बाद कुछ चर्चा की थी।

E7) $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ का अर्थ बताने तथा $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ का हल निकालने के लिए कागज़ मोड़ने की गतिविधि का इस्तेमाल किया जा सकता है। कागज़ की दो पट्टियां लीजिए। एक पट्टी को 4 बराबर भागों में बांटकर इसमें 3 भाग काट लीजिए।



चित्र 13: (क) '1' को चार भागों में बांटना; (ख) 1 का $\frac{3}{4}$ दिखाना

पट्टी का काटा गया भाग $\frac{3}{4}$ दर्शाता है। अब $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ यानी $\frac{3}{4}$ का $\frac{2}{3}$ निकालने के लिए हमें कटे हुए भाग का $\frac{2}{3}$ ज्ञात करना होगा। इसके लिए हम कटे हुए भाग को 3 बराबर भागों में मोड़ लेंगे और इसमें से 2 भाग काट लेंगे। (देखें चित्र 14क)



चित्र 14: (क) चित्र द्वारा 1 के $\frac{3}{4}$ का $\frac{2}{3}$ दिखाना; (ख)

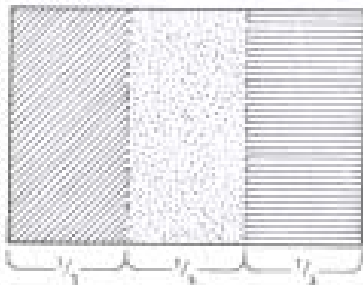
अब यह देखना होगा कि चित्र 14 (क) में दिखाया गया भाग पूरे का कितने भाग है। इसके लिए हम इस भाग की तुलना उस पट्टी से करेंगे जिसे मोड़ा नहीं गया था। दोनों पट्टियों को सटाकर रख देंगे (चित्र 14 ख)। अब साफ दिख जाएगा

कि कटा हुआ भाग पूरी पट्टी का $\frac{1}{2}$ है। इससे पता चलता है कि $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ ।

इसी तरीके को दोहराकर आप $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ भी दिखा सकते हैं। यह तो एक किस्म की गतिविधि हुई। आप खुद भी कई गतिविधियां सोच सकते हैं।

E8) मान लीजिए कि कोई बच्ची $2\frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{2}$ मानने की भूल करे। हो सकता है कि उसे 'दो और एक बटा दो' का अर्थ पता हो मगर वह इसे दर्शाने के तरीके को लेकर भ्रमित हो। यदि समस्या मात्र संकेत की हो, तो उसे इसके उपयोग के काफी अभ्यास की ज़रूरत है। यदि उसे 'दो सही एक बटा दो' का अर्थ की समझ नहीं आया है, तो ज़रूरी होगी कि कई गतिविधियों के ज़रिये उसे यह समझने में मदद की जाए। इसके लिए आप उसे 2 पूरे बिस्कुट व एक आधा बिस्कुट दे सकते हैं या दो पूरी पत्तियां और एक आधी पत्ती दे सकते हैं। इसी प्रकार से, यदि ज़रूरी हो तो, $2 \times \frac{1}{2}$ समझाने के लिए कुछ गतिविधियां की जा सकती हैं। जैसे बच्चों को दो आधे बिस्कुट या दो आधी पत्तियां देकर उनसे पूछिए। अन्त में आप उसे कुछ पन्ने देकर उससे कहिए कि वह आपको पहले $2\frac{1}{2}$ पन्ने दे और फिर $2 \times \frac{1}{2}$ पन्ने दे। इससे आपको यह जान पाने में मदद मिलेगी कि वह $2\frac{1}{2}$ और $2 \times \frac{1}{2}$ का अन्तर समझ गई है या नहीं।

E9) कागज़ की दो पट्टियां लीजिए। एक को बिना मुड़ा रहने दें। दूसरी पट्टी को तीन बराबर भागों में मोड़ दें और प्रत्येक भाग को पेंसिल से रंग दीजिए। अब बच्चे से पूछिए कि हर रंगीन भाग कितना भाग दर्शाता है। वह कहेगी $\frac{1}{3}$ अब दोनों पट्टियों को चित्र 15 के अनुसार एक के नीचे एक सटाकर रखें।



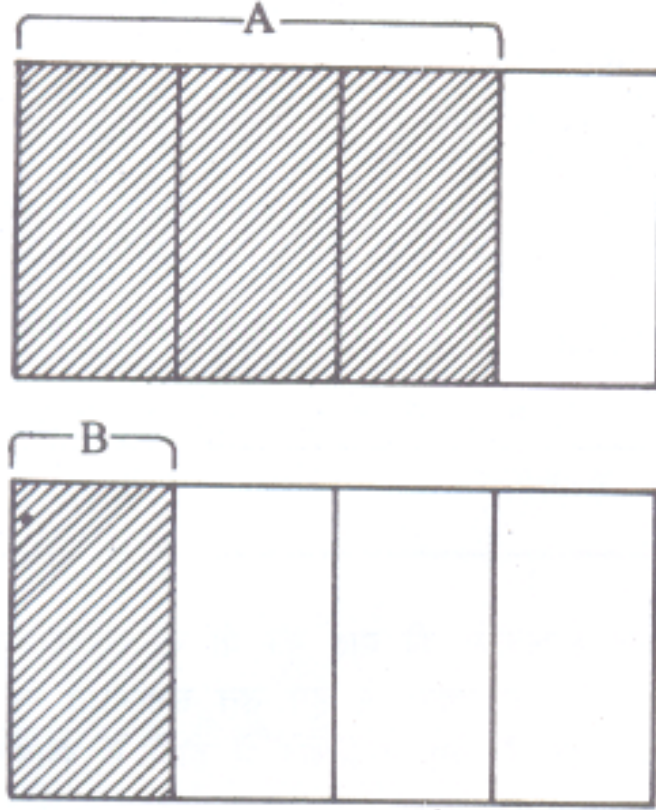
चित्र 15 : $1 \div \frac{1}{3}$ को चित्र द्वारा दिखाना

अब वह देख पाएगी कि एक पूरे में तीन $\frac{1}{3}$ होते हैं। यही तो $1 \div \frac{1}{3}$ का अर्थ है। अब

$\frac{3}{4} \div \frac{2}{4}$ दिखाने के लिए पहले हम उन्हें $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4}$ समझाएंगे। दोनों पट्टियों को 4 भागों में

बांट दीजिए। एक पट्टी के तीन भागों को रंग दें, यह $\frac{3}{4}$ दर्शा रही है। दूसरी पट्टी का एक भाग रंगकर $\frac{1}{4}$ दर्शाएं। अब दोनों पट्टियों को, चित्र 16 के अनुसार पास-पास रखें।

$\frac{3}{4}$ भाग को A और $\frac{1}{4}$ भाग को B चिन्हित कीजिए।



चित्र 16

अब बच्चों से पूछिए कि B भाग A भाग में कितनी बार फिट हो जाएगा। आप एक भाग को काटकर सचमुच करके दिखा सकते हैं कि यह शेष भाग में 3 बार फिट हो सकता है।

इसका अर्थ यह हुआ कि $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ में 3 बार समा सकता है। और 1 भी 3 में 3 बार आ

सकता है। यानी " $\frac{3}{4}$ में कितने $\frac{1}{4}$ हैं?" और "3 में कितने 1 हैं?" ये एक ही प्रश्न के दो

रूप हैं। इसलिए हम कहते हैं $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = 3 \div 1 = 3$

इसी प्रकार से आप यह भी समझा सकते हैं कि $\frac{3}{4} \div \frac{2}{4} = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 3 \div 2$