

---

## इकाई 16 सहगामिता विप्लेषण (Correspondence Analysis)

---

### इकाई की रूपरेखा

- 16.0 उद्देश्य (Objectives)
- 16.1 परिचय (Introduction)
- 16.2 सहगामिता विप्लेषण : अवधारणा एवं विशेषताएं (Correspondence Analysis : Concept and its Features)
- 16.3 सहगामिता विप्लेषण में प्रयुक्त चरण एवं गणना विधि (Steps and Algorithm Involved in Correspondence Analysis Technique)
- 16.4 मौलिक अवधारणाएं एवं परिभाषाएं (Basic Concepts and Definitions)
  - 16.4.1 प्राथमिक आव्यूह (Primitive Matrix)
  - 16.4.2 प्रालेख (Profiles)
  - 16.4.3 संहति (Masses)
  - 16.4.4 सहगामिता आव्यूह (Correspondence Matrix)
  - 16.4.5 परिवर्धित सहगामिता आव्यूह (Augmented Correspondence Matrix)
  - 16.4.6 निष्क्रियता (Inertia)
  - 16.4.7 अंतर अलगाव (Distances)
- 16.5 आयाम-स्तर में कमी (Reduction of Dimensionality)
- 16.6 द्वि-आयामी चित्रांकन (Biplots)
- 16.7 सहगामिता विप्लेषण के परिणामों की व्याख्या (Interpretation of the Results of Correspondence Analysis)
- 16.8 बहु-चरीय सहगामिता विप्लेषण (Multiple Correspondence Analysis)
- 16.9 सारांश (Let Us Sum Up)
- 16.10 शब्दावली (Key Words)
- 16.11 कुछ उपयोगी पुस्तकें (Some Useful Books)
- 16.12 बोध प्रश्नों के उत्तर या संकेत (Answers or Hints to Check Your Progress)
- 16.13 अभ्यास प्रश्न (Exercises)

---

### 16.0 उद्देश्य (Objectives)

---

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप:

- प्रमुख कारक विप्लेषण के विषिष्ट उदाहरण के रूप में सहगामिता विप्लेषण (CA) की अवधारणा स्पष्ट कर पाएंगे;
- CA विधि की विशेषताओं एवं प्रयोगों की चर्चा कर पाएंगे;
- CA गणना विधि की व्याख्या कर पाएंगे;
- CA से प्राप्त परिणामों की व्याख्या प्रक्रिया की समीक्षा कर पाएंगे; तथा
- सामाजिक विज्ञान में शोध के CA विधि का प्रयोग किस प्रकार किया जाता है इसके बारे में भी जानकारी प्राप्त कर सकेंगे।

## 16.1 परिचय (Introduction)

उपलब्ध आंकड़े क्या जानकारी और संकेत दे रहे हैं यह प्रश्न शोधकर्ता के लिए प्रमुख एवं अंतिम प्रश्न बनकर सामने आता है। इस बारे में कोई एक विधि व तकनीक शोधकर्ता को संतुष्टि नहीं दे सकती। उपलब्ध आंकड़ा-संहति निर्मित करने के बाद इनकी प्रकृति के बारे में हम कुछ मान्यताएं बना लेते हैं। ये मान्यताएं आंकड़ा-संहति में संबद्ध चरों पर आधारित होती हैं। अपनी मान्यता के परीक्षण के लिए विभिन्न सांख्यिकीय उपकरणों का प्रयोग किया जाता है। मान्यता-परीक्षण की परंपरागत विधियों में हम सबसे पहले शोध से संबंधित चरों की प्रकृति के बारे में उपलब्ध ज्ञान के अनुसार एक मान्यता बना लेते हैं। सामान्यतः ये विधियां त्रुटिपूर्ण होती हैं। पहले से ही की गई मान्यता अन्य सभी संभव मान्यताओं की अवहेलना करती है। विभिन्न आंकड़ों के चरों के बीच कई प्रच्छन्न भी हो सकते हैं। इन प्रच्छन्न संबंधों की जानकारी हम कैसे उपलब्ध कर सकते हैं?

आपने इकाई 1 और 8 में यह ज्ञात किया था कि मापन के दृष्टिकोण से आंकड़े चार प्रकार के होते हैं – सामान्य, क्रमागत, अंतराल एवं अनुपात पैमाने की प्रकृति वाले। आश्रित चरों में विचलन के लिए जिम्मेदार कारकों के सापेक्ष महत्त्व जानने के लिए हम प्रमुख कारक विश्लेषण (PCA) का प्रयोग करते हैं। किन्तु PCA की सबसे बड़ी सीमा यह है कि इसके लिए आवश्यक निरंतर मापन के योग्य सारणियां उपलब्ध हों जो कि प्रायः उपलब्ध नहीं होतीं। उस परिस्थिति में जब शोधकर्ता दो या अधिक वर्गीकृत चरों के बीच संबंध जानना चाहता है तो वैकल्पिक विश्लेषण तकनीक की आवश्यकता होती है। उदाहरणस्वरूप, आपकी रुचि शिक्षा-स्तर एवं रोजगार की प्रकृति के आपसी संबंध को जानने में हो सकती है। इसी तरह, रोजगार की प्रकृति आय के विभिन्न स्तरों से किस प्रकार प्रभावित होती है? ऐसी परिस्थिति में, आपको ऐसी तकनीक की आवश्यकता होती है जो वर्गीकृत चरों में रचनात्मक संबंध पर प्रकाश डाल सके। सहगामिता विश्लेषण इन रचनात्मक संबंधों के अध्ययन की उपयुक्त विधि है। इस तकनीक का प्रयोग ऐसी सामान्य द्वि-चर एवं बहु-चर तालिकाओं में किया जा सकता है जहां पंक्तियों एवं स्तंभों में प्रस्तुत आंकड़ों में कुछ मेल होता है। अतः प्रस्तुत इकाई में हम सहगामिता विश्लेषण में प्रयुक्त विभिन्न अवधारणाओं, इनकी मान्यताओं, इसके निर्माण एवं गणना विधि, परिणामों की व्याख्या आदि पर प्रकाश डालेंगे।

## 16.2 सहगामिता विश्लेषण : अवधारणा एवं विशेषताएं (Correspondence Analysis: Concept and its Features)

सहगामिता विश्लेषण (CA) बहु-चरीय सांख्यिकी विश्लेषण की व्याख्यात्मक तकनीक है जो सामान्य एवं क्रमागत पैमाने पर मापित विभिन्न परिमाणात्मक चरों में संबंध की प्रकृति एवं संरचना को स्पष्ट करती है। इस संबंध को द्वि-मार्गीय सारणी के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है एवं मापन से बचा जा सकता है। सामान्यतः CA को एक ऐसी विधि के रूप में देखा जा सकता है जिसका प्रयोग समूची काई-स्केयर (chi-square) सांख्यिक के मान का विभाजन करने के लिए किया जा सकता है। इस विधि में ऐसी प्रणाली को परिभाषित किया जाता है जिसमें आयामों की संख्या सीमित होती है एवं संभावित मानों एवं उपलब्ध मानों में विचलन का आकार प्रस्तुत किया जाता है। संक्षेप में, CA की परिभाषा एक सारणी की पंक्तियों एवं स्तंभों की विशेष PCA विधि है। CA का प्रमुख उद्देश्य संख्यात्मक सूचना को चित्रीय रूप में प्रस्तुत करना है जिसमें प्रत्येक पंक्ति एवं स्तंभ को एक बिन्दु द्वारा व्यक्त किया जाता है।

सहगामिता विश्लेषण की प्रमुख विशेषताएं निम्न प्रकार हैं :

- 1) अनेक वर्गीकृत चरों को एक-साथ चर्चित कर सहगामिता विश्लेषण विधि आंकड़ों की बहु-चरीय व्याख्या संभव बनाती है
- 2) इस विधि के प्रयोग से ऐसे संबंध उजागर होते हैं जो चरों की जोड़ेवार तुलना से संभव नहीं होते।

- 3) इस विधि द्वारा द्विआयामी चित्रांकन पर पंक्ति एवं स्तंभ के बिंदुओं को चित्रित रूप में व्यक्त किया जा सकता है। इनसे विभिन्न चर वर्गों में व्याप्त संबंध की जानकारी उपलब्ध हो सकती है।
- 4) आयताकार आंकड़ा आव्यूह जिसमें गैर-नकारात्मक मूल्य दिए हों, को छोड़कर इस विधि में आंकड़ों की आवश्यकता लोचपूर्ण है।

---

### 16.3 सहगामिता विप्लेषण में प्रयुक्त चरण एवं गणना विधि (Steps and Algorithm Involved in Correspondence Analysis Techniques)

---

CA विधि में निम्नलिखित चरणों एवं गणना विधि का प्रयोग किया जाता है।

- 1) प्राथमिक आव्यूह का निर्माण करना।
- 2) पंक्ति प्रालेख एवं लम्ब प्रालेख की गणना करना।
- 3) सहगामिता आव्यूह की गणना करना।
- 4) कुल पंक्ति संहति एवं कुल लम्ब संहति ज्ञात करना।
- 5) बढ़ती हुई सहगामिता आव्यूह का निर्माण करना।
- 6)  $\chi^2$  अंतराल एवं निष्क्रियता ज्ञात करना।
- 7) आंकड़ों के आयाम को कम करना।
- 8) द्वि-आयामी चित्रांकन ज्ञात करना।

---

### 16.4 मौलिक अवधारणाएं एवं परिभाषाएं (Basic Concepts and Definitions)

---

आइये, एक उदाहरण की सहायता से सहगामिता विप्लेषण की प्रमुख अवधारणाओं एवं परिभाषाओं को समझें। इसलिए हमने पहले से ही हल किए गए उदाहरण की सहायता ले रहे हैं।

हम दो परिमाणात्मक चरों पर ध्यान देते हैं। ये हैं : शैक्षिक-स्तर और रोज़गार-स्तर। सहगामिता विप्लेषण विधि की सहायता से हम इन दोनों चरों में संबंध ज्ञात कर सकते हैं। विप्लेषण के लिए हम रोज़गार-स्तर को छह वर्गों में बांटते हैं— नियोजक, नियमित, पेंशनभोगी/निधियों से प्राप्त आय, तदर्थ, ठेके पर/स्व: रोज़गार एवं बेरोज़गार। इसी तरह शैक्षिक उपलब्धियों को इस प्रकार वर्गीकृत किया गया है : अशिक्षित, माध्यमिक स्तर तथा शिक्षित, माध्यमिक एवं सेकेंडरी, स्नातक, स्नातक से कोई अन्य तकनीकी शिक्षा एवं Ph.D और आगे।

समीक्षा करने से पहले हम CA विधि में प्रयुक्त मौलिक अवधारणाओं एवं परिभाषाओं की जानकारी प्राप्त करना चाहेंगे।

#### 16.4.1 प्राथमिक आव्यूह (Primitive Matrix)

प्राथमिक आव्यूह से अभिप्राय उस सूचना से है जिसे हमने सारणीयन के रूप में एकत्र एवं वर्गीकृत किया है। यह पंक्तियों एवं स्तंभों में चरों की तिरछी सारणीयन है। सारणी 16.1 में इसका रूप प्रस्तुत किया गया है।

प्राथमिक आव्यूह ( $A=a_{ij}$ )

शैक्षिक स्तर	रोजगार स्तर						
	बेरोजगार	ठेकेदार	अस्थायी	पेंशनभोगी	नियमित	नियोजक	सक्रिय मार्जिन
अशिक्षित	22	16	1	1	0	1	41
मिडिल तक	27	7	0	1	7	2	44
मिडिल से उच्च सेकेंडरी तक	69	8	3	2	4	12	98
स्नातक	51	2	4	4	22	20	103
स्नातकोत्तर/ तकनीकी स्नातक	13	11	7	0	46	14	91
शोध उपाधि एवं इससे आगे	1	3	4	0	28	3	39
सक्रिय मार्जिन	183	47	19	8	107	52	416

स्रोत : अप्रकाशित शोध अध्ययन 'मानवीय कुशल क्षेम का आकलन : बहुआयामी दृष्टिकोण' द्वारा प्रो. नारायण प्रसाद।

### 16.4.2 प्रालेख (Profiles)

प्रालेख में किसी विषिष्ट वर्ग की उन विशेषताओं को प्रदर्शित किया गया है जो उसकी अपनी आवृत्तियों से निर्धारित होती हैं। सारणी 16.2क में पंक्तियों में शैक्षिक-स्तर एवं स्तंभों में रोजगार स्तर को व्यक्त किया गया है।

पंक्ति प्रालेख में प्रत्येक पंक्ति बिंदु की आवृत्ति प्रस्तुत की गई है। पंक्ति का जोड़ 1 के बराबर होगा। पंक्ति प्रालेख की गणना के लिए विषिष्ट पंक्ति बिंदु को समतुल्य पंक्ति जोड़ (active margin) से भाग दिया गया है। अर्थात्

$$\begin{aligned} \text{पंक्ति प्रालेख (iवीं पंक्ति का)} &= \frac{\text{iवीं पंक्ति की प्रविष्टियां}}{\text{iवीं पंक्ति का योग}} \\ &= \frac{a_{ij}}{\sum_{j=1} a_{ij}} \end{aligned}$$

स्तंभ प्रालेख की गणना भी इसी प्रकार आकलित की जाती है।

$$\begin{aligned} \text{iवें स्तंभ का प्रालेख} &= \frac{\text{iवें स्तंभ की प्रविष्टियां}}{\text{iवें स्तंभ का योग}} \\ &= \frac{a_{ij}}{\sum_{j=1} a_{ij}} \end{aligned}$$

अंतर यही है कि यहां स्तंभ की प्रत्येक प्रविष्टि को स्तंभ योग से विभाजित किया जाता है। (active margin) सारणी 16.2ख

सारणी 16.2क: शैक्षिक उपलब्धि एवं रोजगार स्तर में सहगामिता  
पंक्ति प्रालेख

शैक्षिक स्तर	रोजगार स्तर						
	बेरोज़गार	ठेकेदार	अस्थायी	पेंशनभोगी	नियमित	नियोजक	सक्रिय मार्जिन
अशिक्षित	.537	.390	.024	.024	.000	.024	1.000
मिडिल तक	.614	.159	.000	.023	.159	.045	1.000
मिडिल से उच्च सेकेंडरी तक	.704	.082	.031	.020	.041	.122	1.000
स्नातक	.495	.019	.039	.039	.214	.194	1.000
स्नातकोत्तर / तकनीकी स्नातक	.143	.121	.077	.000	.505	.154	1.000
शोध उपाधि एवं इससे आगे	.026	.077	.103	.000	.718	.077	1.000
सक्रिय मार्जिन	.440	.113	.046	.019	.257	.125	

सारणी 16.2ख: शैक्षिक उपलब्धि एवं रोजगार स्तर में सहगामिता  
स्तम्भ प्रालेख

शैक्षिक स्तर	रोजगार स्तर						
	बेरोज़गार	ठेकेदार	अस्थायी	पेंशनभोगी	नियमित	नियोजक	मास
अशिक्षित	.120	.340	.053	.125	.000	.019	.099
मिडिल तक	.148	.149	.000	.125	.065	.038	.106
मिडिल से उच्च सेकेंडरी तक	.377	.170	.158	.250	.037	.231	.236
स्नातक	.279	.043	.211	.500	.206	.385	.248
स्नातकोत्तर / तकनीकी स्नातक	.071	.234	.368	.000	.430	.269	.219
शोध उपाधि एवं इससे आगे	.005	.064	.211	.000	.262	.058	.094
सक्रिय मार्जिन	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	

### 16.4.3 संहति (Masses)

$i^{\text{th}}$  पंक्ति की संहति  $i^{\text{th}}$  पंक्ति की सीमांत आवृत्ति को  $i^{\text{th}}$  पंक्ति के कुल जोड़ से विभाजित कर प्राप्त की गयी है।  $i^{\text{th}}$  की सीमांत आवृत्ति  $i^{\text{th}}$  पंक्ति में उल्लेखित मूल्यों का जोड़ है। प्रत्येक पंक्ति एवं स्तंभ बिंदुओं के संहति को सारणी 16.2क एवं 16.2ख में क्रमशः प्रस्तुत किया गया है। इस उदाहरण में कुल जोड़ का मूल्य समस्त प्रतिदर्श आकार का मूल्य है जो कि 416 है। इसी प्रकार  $j^{\text{th}}$  स्तंभ की संहति उस स्तंभ की सीमांत आवृत्ति को कुल योग से विभाजित कर आकलित होती है।

### 16.4.4 सहगामिता आव्यूह (Correspondence Matrix)

मूल आव्यूह को कुल जोड़ से विभाजित करने पर जो मूल्य प्राप्त होता है उसे सहगामिता आव्यूह कहते हैं। सहगामिता आव्यूह व्यक्त करता है कि पंक्ति संहति एवं स्तंभ संहति के

मूल्य किस प्रकार वितरित हैं। सहगामिता आव्यूह के पंक्ति जोड़ एवं स्तंभ जोड़ क्रमशः पंक्ति संहति एवं स्तंभ संहति को व्यक्त करते हैं। इसे सारणी 16.3 में व्यक्त किया गया है।

**सारणी 16.3: शैक्षिक उपलब्धि एवं रोजगार स्तर में सहगामिता आव्यूह**

शैक्षिक स्तर	रोजगार स्तर					
	बेरोज़गार	ठेकेदार	अस्थायी	पेंशनभोगी	नियमित	नियोजक
अशिक्षित	0.053	0.038	0.002	0.002	0.000	0.002
मिडिल तक	0.065	0.017	0.000	0.002	0.017	0.005
मिडिल से उच्च सेकेंडरी तक	0.166	0.019	0.007	0.005	0.010	0.029
स्नातक	0.123	0.005	0.010	0.010	0.053	0.048
स्नातकोत्तर/ तकनीकी स्नातक	0.031	0.026	0.017	0.000	0.111	0.034
शोध उपाधि एवं इससे आगे	0.002	0.007	0.010	0.000	0.067	0.007

#### 16.4.5 परिवर्धित सहगामिता आव्यूह

सहगामिता आव्यूह की गणना के बाद हम इस आव्यूह में पंक्ति संहति के कॉलम एवं स्तंभ संहति की पंक्ति को जोड़ते हैं। देखिए सारणी 16.4

**सारणी 16.4: शैक्षिक उपलब्धि एवं रोजगार स्तर में सहगामिता परिवर्धित सहगामिता आव्यूह**

शैक्षिक स्तर	रोजगार स्तर						
	बेरोज़गार	ठेकेदार	अस्थायी	पेंशनभोगी	नियमित	नियोजक	रॉ मास
अशिक्षित	0.053	0.038	0.002	0.002	0.000	0.002	0.099
मिडिल तक	0.065	0.017	0.000	0.002	0.017	0.005	0.106
मिडिल से उच्च सेकेंडरी तक	0.166	0.019	0.007	0.005	0.010	0.029	0.236
स्नातक	0.123	0.005	0.010	0.010	0.053	0.048	0.248
स्नातकोत्तर/ तकनीकी स्नातक	0.031	0.026	0.017	0.000	0.111	0.034	0.219
शोध उपाधि एवं इससे आगे	0.002	0.007	0.010	0.000	0.067	0.007	0.094
सक्रिय मार्जिन	0.440	0.113	0.046	0.019	0.257	0.125	1.000

#### 16.4.6 निष्क्रियता (Inertia)

सहगामिता विश्लेषण में निष्क्रियता की अवधारणा विचलन की मात्रा की व्याख्या करती है। जब पंक्ति एवं स्तंभ प्रालेखों में विचलन की मात्रा उनकी औसत से अधिक होती है तो निष्क्रियता का मूल्य भी अधिक होता है। कुल निष्क्रियता का आकलन इस प्रकार किया जाता है :

$$\text{कुल निष्क्रियता} = \sum_i \sum_j \frac{(p_{ij} - r_i c_j)^2}{r_i c_j}$$

जहां  $p_{ij}$  = सहगामिता आव्यूह की  $(i, j)$  वीं प्रविष्टि

$r_i$  =  $i$ वीं पंक्ति प्रालेख

$c_j$  =  $j$ वाँ स्तंभ प्रालेख

सारणी 16.3 में निष्क्रियता प्रतिमान के प्रत्येक आयाम में कुल विचलन की व्याख्या प्रस्तुत करती है। इस उदाहरण में निष्क्रियता का मूल्य 0.480 है जैसा कि सारणी 16.3 में स्पष्ट किया गया है। यह मूल्य संकेत देता है कि दिए हुए स्तर पर आय के स्तर की लगभग 48% तक की जानकारी प्राप्त की जा सकती है। chi square सांख्यिक द्वारा यह स्पष्ट है कि दोनों में ऊँचे परिमाण का संबंध है।

### 16.4.7 अंतर अलगाव (Distances)

दो-चरों में स्वतंत्रता एवं संबंध का मापन chi square द्वारा किया जाता है। प्रालेख बिंदुओं के बीच भारित Euclidean अंतराल Chi square अंतराल कहलाते हैं। भारों से अभिप्राय आयाम के भारों से है ना कि प्रालेख बिंदुओं के प्रलेखों से। Chi square की गणना निम्न रूप में की जाती है :

chi-square distance गणना का सूत्र :

मान लें कि प्रारंभिक आव्यूह का सहगामिता आव्यूह  $m \times n$  आव्यूह है। फिर हम परिभाषा कर सकते हैं :

$r$ वीं एवं  $s$ वीं पंक्तियों का  $\chi^2$  अंतर है :

$$d(r, s) = \sqrt{\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \left( \frac{a_{rj}}{a_r} - \frac{a_{sj}}{a_s} \right)^2}$$

जहां कि  $a_j$  =  $j$ वें स्तंभ की सीमांत आवृत्ति

$$= \sum_{i=1}^m a_{ij}$$

$a_r$  वें स्तंभ की सीमांत आवृत्ति

$$\sum_{j=1}^n a_{rj}$$

$a_s$  वें स्तंभ की सीमांत आवृत्ति

$$\sum_{j=1}^n a_{sj}$$

## 16.5 आयाम-स्तर में कमी (Reduction of Dimensionality)

सहगामिता विप्लेषण पर एक वैकल्पिक दृष्टिकोण भी हो सकता है। इस विश्लेषण द्वारा समस्त निष्क्रियता को छोटे भागों में बांटा जा सकता है। इसके लिए हम छोटे स्तर के ऐसे आयामों की पहचान करेंगे जिनमें संभावित मूल्यों से विचलनों को व्यक्त किया जा सकता है। यह कारक विप्लेषण जैसा है। कारक विप्लेषण में कुल चरों को छोटे भागों में बांट दिया जाता है जिससे कि हम चरों की निम्न-आयामीय प्रस्तुति ज्ञात करते हैं ताकि चरों की विचलन/सह-विचलन आव्यूह को पुनः निर्मित करना संभव हो।

सारणी 16.5 पर ध्यान दीजिए। शैक्षिक उपलब्धि स्तंभ में केवल 5 वर्ग प्रस्तुत किए गए हैं। रोजगार-स्तर को केवल दो भागों में वर्गीकृत किया गया है – रोजगार एवं बेरोजगार।

आयामीय गुणों को जान-बूझकर कम किया गया है। उपवर्गों को समान संदर्भ बिंदु से अंतराल के आधार पर उप-भागों का वर्गीकरण करने की विधि पर यह परिणाम उपलब्ध होता है। इसके द्वारा दो चरों में सहगामिता को चित्रिय रूप में प्रस्तुत करना भी संभव हो पाएगा। सहगामिता विश्लेषण का उद्देश्य है समस्त निष्क्रियता को इस प्रकार भागों में बांटना है कि निचले आयाम के धरातल पर पहुंचा जा सके। केवल उन आयामों को प्रतिमान में शामिल किया जाता है जिनकी सरलता से व्याख्या संभव हो पाए। चूंकि प्रतिमान में सभी आयामों को नहीं जोड़ा जाता, परिणामतः सभी निष्क्रियता के मूल्य का जोड़ 1 के बराबर नहीं होता।

### सारणी 16.5 : शैक्षिक उपलब्धि एवं रोजगार स्तर में सहगामिता

#### सारांश

Dimension	Singular Value	Inertia	Chi Square	Sig.	Proportion of Inertia		Confidence Singular Value	
					Accounted for	Cumulative	Standard Deviation	Correlation
								2
1	.594	.353			.735	.735	.035	.009
2	.329	.108			.226	.960	.054	
3	.113	.013			.026	.987		
4	.069	.005			.010	.996		
5	.041	.002			.004	1.000		
Total		.480	199.660	.000 <sup>a</sup>	1.000	1.000		

a. 25 degrees of freedom

स्रोत : 'मानवीय कृषल क्षेम का मूल्यांकन - बहुआयामी दृष्टिकोण', डॉ. नारायण प्रसाद द्वारा 2015 में कृत अप्रकाशित शोध अध्ययन।

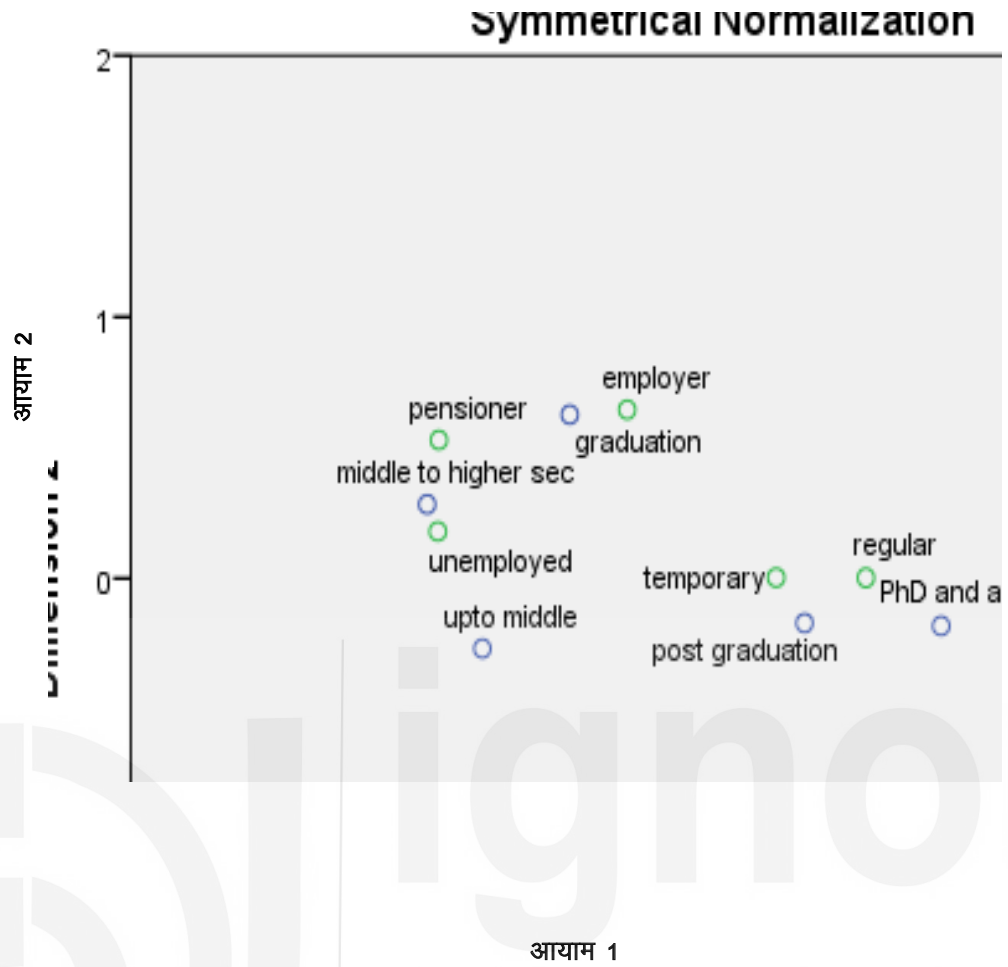
## 16.6 द्वि-आयामी चित्रांकन (Biplots)

द्वि-आयामी चित्रांकन का संबंध पंक्तियों एवं स्तंभों के संयुक्त चित्र में आंकड़ों के पुनर्निर्माण से होता है, न कि अंतराल का पुनर्निर्माण। एक दो-तरफा सामान्य सारणी में किन्हीं परिस्थितियों में चरों के पुनर्निर्माण की आवश्यकता उत्पन्न हो सकती है। यह आवश्यकता पंक्तियों के संहति या स्तंभ के संहति या प्रविष्टियों के दो-तरफा सारणी में पंक्तियों एवं स्तंभों के समरूप मूल्य हैं।

द्वि-आयामी चित्रांकन  $n \times p$  आंकड़ा आव्यूह में सूचना की चित्रिय प्रस्तुति है। 'द्वि' से अभिप्राय आंकड़ा आव्यूह में दो प्रकार की सूचना से है। पंक्तियों में प्रस्तुत सूचना प्रतिदर्ष या प्रतिदर्ष इकाइयों के बारे में होती है जबकि स्तंभों में दी गई सूचना चरों से संबंधित होती है। केवल दो-चर होने की परिस्थिति में प्रकीर्ण बिंदु प्रतिदर्ष इकाइयों एवं एक ही चित्र में चरों के बारे में सूचना दे सकते हैं। इससे एक प्रतिदर्ष इकाई की अन्य इकाई की तुलना में स्थिति मालूम हो जाती है एवं साथ ही दो-चरों में प्रत्येक चर का सापेक्ष महत्त्व भी स्पष्ट हो सकता है।

अनेक चरों के सम, प्रकीर्ण चित्रों के आव्यूह सारणी का निर्माण किया जा सकता है, लेकिन प्रतिदर्ष इकाइयों का कोई एक अकेला चित्रांकन नहीं होता। दूसरी ओर, प्रतिदर्ष इकाइयों का द्वि-आयामी चित्रांकन पहले दो प्रमुख कारकों को चित्रित कर प्राप्त किया जा सकता है। द्वि-आयामी चित्रांकन का प्रमुख विचार चरों से संबंधित सूचना को प्रमुख कारकों के चित्र में जोड़ना है।





चित्र 16.1: शैक्षिक उपलब्धि एवं रोजगार स्तर में सहगामिता दर्शाता द्वि-आयामी चित्रांकन पंक्ति एवं स्तंभ बिन्दु

चित्र 16.1 में द्वि-आयामी क्षेत्र में द्वि-आयामी चित्रांकन द्वारा आंकड़ों को चित्रित रूप में प्रस्तुत किया गया है किन्तु इस प्रतिमान की एक सीमा है कि यह शैक्षिक उपलब्धियों पर आधारित रोजगार स्तर के केवल 48% भाग को व्यक्त करता है। उपरोक्त चित्र से कुछ सामान्य प्रवृत्तियां स्पष्ट होती हैं। जब दो बिन्दु निकट हैं तो यह दोनों चरों के बीच उच्च मात्रा का संबंध व्यक्त करते हैं। दिए हुए चित्र में दोनों चरों के बीच सहगामिता की दिशा स्पष्ट हो रही है। उदाहरणस्वरूप, यह स्पष्ट है कि अशिक्षित व्यक्ति स्वः रोजगार के निचले स्तर पर गुजारा कर रहे हैं। माध्यमिक स्तर तक शिक्षित व्यक्ति सामान्यतः बेरोजगार पाए गए। Ph.D व अधिक शिक्षित व्यक्तियों पर नियमित रोजगार मिलने की संभावना अधिक पायी गई। उन व्यक्तियों के रोजगार स्तर में सुधरने की संभावना अधिक पायी गई जिन्होंने स्नातक अथवा उससे ऊँची शिक्षा पायी हुई है। संक्षेप में, यह चित्रांकन शैक्षिक योग्यता एवं रोजगार स्तर में धनात्मक संबंध की पुष्टि करता है जैसाकि chi square के मूल्य से भी स्पष्ट हुआ।

## 16.7 सहगामिता विप्लेषण के परिणामों की व्याख्या

सहगामिता विप्लेषण के परिणामों की व्याख्या में शामिल होते हैं CA विप्लेषण से प्राप्त संख्यात्मक परिणाम एवं कारक चित्र। पहले के वास्ते महत्वपूर्ण अक्ष एवं महत्वपूर्ण बिंदुओं का चयन किया जाता है।

हम व्याख्या की प्रक्रिया व्यावहारिक उदाहरण की सहायता से समझाएंगे। सारणी 16.1 में व्यक्तियों से संबद्ध सूचना प्रस्तुत की गई है। उनकी शैक्षिक योग्यता एवं रोजगार-स्तर का

उल्लेख किया गया है। यह प्राथमिक आंकड़े वर्ष 2015 में दिल्ली में 'मानवीय कुशल क्षेम का मूल्यांकन : बहुआयामी दृष्टिकोण' नामक किये गये शोध अध्ययन हेतु निदर्शन से प्राप्त हुए। इस तकनीक की सहायता से शैक्षिक योग्यता एवं आय-स्तर में संबंध जानने का प्रयास किया गया। सारणी 16.4 में अध्ययन से प्राप्त आंकड़ों का सारांश प्रस्तुत किया गया है। पहले स्तंभ में पांच आयामों को प्रस्तुत किया गया है— ध्यान देने की बात यह है कि जैसे ही हम किसी आयाम से अंतराल पर देखते हैं आयामों की संख्या 6 से घटकर 5 हो जाती है। कॉलम 2 और 3 में क्रमशः एकल मूल्य एवं निष्क्रियता व्यक्त किए गए हैं। कॉलम 6 में पहले आयाम द्वारा व्यक्त निष्क्रियता का मान स्पष्ट होता है। इसका मूल्य 0.735 है जो समग्र में अधिकतम है। जैसे ही हम आयाम-2 से आगे बढ़ते हैं, निष्क्रियता तीव्र गति से गिरती है। जैसा कि आप पाएंगे यह प्रवृत्ति प्रमुख सहगामिता विश्लेषण के अनुरूप है।

सारणी 16.5 में पंक्ति बिंदुओं की मूलक (Overview) प्रस्तुत की गई हैं स्तंभ 2 में संहति एवं 3 व 4 में 1 व 2 आयाम के परिणाम प्रस्तुत किए गए हैं। कॉलम 5 कॉलम 1 उपयुक्त वर्गों की निष्क्रियता व्यक्त की गई है। स्तंभ 6 व 7 में 1 व 2 आयाम की निष्क्रियता उल्लेखित है। कॉलम 8 व 9 में संबद्ध बिंदु पर आयामों के योगदान को स्पष्ट किया गया है।

**सारणी 16.5: शैक्षिक उपलब्धि एवं रोजगार स्तर में सहगामिता दर्शात द्वि-आयामी चित्रांकन**

**पंक्ति बिन्दु मूलक**

शैक्षिक स्तर	Mass	Score in Dimension		Inertia	Contribution				
		1	2		Of Point to Inertia of Dimension		Of Dimension to Inertia of Point		
					1	2	1	2	Total
अपेक्षित मिडिल तक	.099	-1.534	.948	.179	.350	.321	.860	.137	.997
मिडिल से उच्च सेकेंडरी तक	.106	-.771	.275	.046	.095	.029	.912	.048	.960
स्नातक	.236	-.458	-.503	.050	.074	.216	.654	.328	.982
स्नातकोत्तर/ तकनीकी स्नातक	.248	.108	-.511	.022	.004	.235	.085	.798	.883
शोध उपाधि एवं इससे आगे	.219	.975	.295	.146	.313	.069	.941	.036	.977
शैक्षिक स्तर	.094	1.074	.619	.085	.163	.130	.840	.116	.956
कुल सक्रिय	1.000			.528	1.000	1.000			

**स्रोत :** मानवीय कुशल क्षेम का मूल्यांकन – बहुआयामी दृष्टिकोण, डॉ. नारायण प्रसाद द्वारा 2015 में कृत अप्रकाशित शोध अध्ययन।

सारणी 16.6 में स्तंभ बिंदुओं से संबद्ध सूचना प्रस्तुत की गई है।

स्तंभ बिन्दु मूलक

शैक्षिक स्तर	Mass	Score in Dimension		Inertia	Contribution				
		1	2		Of Point to Inertia of Dimension		Of Dimension to Inertia of Point		
					1	2	1	2	Total
अशिक्षित मिडिल तक	.440	-.684	.180	.129	.346	.043	.948	.036	.984
मिडिल से उच्च सेकेंडरी तक	.113	-.292	-1.510	.091	.016	.782	.063	.926	.989
स्नातक	.046	.766	.003	.019	.045	.000	.858	.000	.858
स्नातकोत्तर/तकनीकी स्नातक	.019	-.679	.529	.011	.015	.016	.472	.158	.630
शोध उपाधि एवं इससे आगे	.257	1.151	.002	.204	.574	.000	.992	.000	.992
शैक्षिक स्तर	.125	.128	.645	.026	.003	.158	.046	.658	.705
	1.000			.480	1.000	1.000			

a. Symmetrical normalisation

स्रोत : मानवीय कुशल क्षेम का मूल्यांकन – बहुआयामी दृष्टिकोण, डॉ. नारायण प्रसाद द्वारा 2015 में कृत अप्रकाशित शोध अध्ययन।

द्वि-आयामी रेखाचित्र द्वि-आयाम में पंक्ति एवं स्तंभ में सममित मानकीकरण को प्रदर्शित करता है।

हमें यह ध्यान देना होगा कि सारणी 16.2क में हम शैक्षिक उपलब्धि की सीढ़ी पर जैसे आगे बढ़ते हैं, बेरोजगारी का अनुपात जो अशिक्षित वर्ग के लिए बढ़कर 53.7% है माध्यमिक शिक्षित वर्ग के लिए बढ़कर 61.4% तथा मध्य एवं उच्चतर स्तर पर 70% हो जाता है। स्नातकों के लिए यह कम होकर 49.5% और इससे ऊंचे स्तर पर यह कम होकर 14.3% रह जाता है। इससे ऊपर के वर्ग के लिए यह मात्र 2.6% है। वैसे तो मात्र यही आंकड़े यह सिद्ध करने के लिए पर्याप्त हैं कि शैक्षिक उपलब्धियों एवं रोजगार स्तर में सकारात्मक संबंध होता है। यदि हम रोजगार के उपवर्गों का अध्ययन करें तो यह सहगामिता और अधिक स्पष्ट हो जाती है। रोजगार की उपश्रेणियों – ठेके पर, अस्थायी, नियमित एवं नियोजक अलग से प्रदर्शित की गई हैं और आंकड़े, इस प्राक्कल्पना को पुष्ट करते हैं कि शैक्षिक उपलब्धि में बदला स्तर नियमित रोजगार उपलब्ध कराने की संभावना को बढ़ाता है। तथापि स्नातकों को नियोजक तथा पीएच.डी एवं उससे अधिक शिक्षा प्राप्त लोगों को नियमित रोजगार अधिक प्राप्त होता है।

अतः सहगामिता विप्लेषण हमारे परिणामों की पुष्टि करता है।

## 16.8 बहु-चरीय सहगामिता विप्लेषण (Multiple Correspondence Analysis)

सहगामिता विप्लेषण केवल दो पक्षीय सारणी के लिए उपयुक्त पाया जाता है। यह एक चित्र का निर्माण कर देता है जो वर्गीकृत चरों में संबंध दर्शाता है। इसके विपरीत बहु-चरीय सहगामिता विप्लेषण द्वारा हम वर्गीकृत अनेक चरों में पाए जाने वाले संबंध को ज्ञात कर सकते हैं। हम पाएंगे कि दो से अधिक चरों में पाया जाने वाला संबंध न ही स्पष्ट होता है और न ही सुपरिभाषित। बहु-चरीय विप्लेषण जैसे प्रतीपगमन एवं लघु रेखीय प्रतिमान परिस्थिति कम जटिल होती है। उदाहरणतः एक अकेले अग्रनिरूपक चर से अनुक्रिया के प्रतीपगमन से हम अनेक चरों पर रूपांतरित करते हैं तो स्पष्ट संबंध ज्ञात हो पाता है।

प्रमुख समस्या यह है कि पहले से ही यह धारणा बनी हुई है कि दो वर्गीकृत चरों में संबंध की अवधारणा जटिल है एवं दो चरों के परिणाम को सामान्यीकृत करने के अनेक वैकल्पिक तरीके हैं।

सामान्यतः बहु-चरीय सहगामिता विश्लेषण की अनेक विधियां हैं किन्तु इनमें दो प्रमुख विधियां निम्नलिखित हैं: एक जो समझने की दृष्टि से सबसे सरल है, इसे प्रामाणिक सहसंबंध के नाम से जाना जाता है जिसका अर्थ है चरों के दो समूहों के बीच सहसंबंध। दूसरी, ज्यामितिक विधि। यह विधि प्रत्यक्ष रूप से आंकड़ा दृष्टांकन से संबंधित होती है एवं यह पीयरसन के प्रमुख कारक विश्लेषण के समरूप है। इन दोनों विधियों में सर्वप्रथम दो चरों के बीच संबंध का अध्ययन किया जाता है और बाद में अनेक चरों के संदर्भ में इन्हें सामान्यीकृत किया जा सकता है।

### बोध प्रश्न 1

1) सहगामिता आव्यूह से आप क्या समझते हैं?

.....

.....

.....

.....

2) निम्न सारणी में 416 व्यक्तियों का प्रतिदर्श प्रस्तुत किया गया है जो इनकी वार्षिक आय एवं शिक्षा के स्तर की अभिव्यक्ति करता है।

सारणी : आय स्तर और शिक्षा स्तर की अभिव्यक्ति

शैक्षिक स्तर	वार्षिक आय				
	रु.2.50 लाख तक	रु.2.50 से 5.00 लाख तक	रु.5.00 से 10.00 लाख तक	रु.10.00 से 20.00 लाख तक	रु.20.00 लाख और उससे ऊपर
अशिक्षित	40	1	0	0	0
मिडिल तक	28	3	8	3	2
मिडिल से उच्च सेकेंडरी तक	44	18	23	11	2
स्नातक	26	18	25	27	7
स्नातकोत्तर/ तकनीकी स्नातक	2	6	25	31	27
शोध उपाधि एवं इससे आगे	1	2	6	18	12

उपरोक्त सारणी में chi square का मूल्य एवं निष्क्रियता की गणना कीजिए एवं परिणामों का निर्वचन भी कीजिए।

.....

.....

.....

.....

## 16.9 सारांश

सहगामिता विप्लेषण आंकड़ों के विप्लेषण की एक ऐसी विधि है जिसकी सहायता से हम वर्गीकृत चरों में संरचनात्मक संबंध ज्ञात कर सकते हैं। इस तकनीक द्वारा सामान्य एवं क्रमागत मापन पर मापे गए परिमाणात्मक चरों में संबंध को परिभाषित करना संभव हो पाता है। इस तकनीक को किसी सारणी की पंक्ति एवं स्तंभ के प्रमुख कारक विप्लेषण की एक विषिष्ट विधि माना जा सकता है। सहगामिता आव्यूह का निर्धारण पंक्ति एवं स्तंभ प्रालेख, संहति, पंक्ति एवं स्तंभ के बीच दूरी का आकलन पंक्ति एवं स्तंभ प्रालेखों का प्रस्तुतीकरण, औसत पंक्ति एवं स्तंभ प्रालेखों का निर्धारण, दूरी के आयामों का कम करना और सहगामिता चित्र का द्विआयामी चित्रांकन के रूप में प्रदर्शन आदि विविध चरण सहगामिता विप्लेषण में सम्मिलित होते हैं।

सहगामिता विप्लेषण किसी अनुषंगिकता सारणी की पंक्तियों तथा स्तंभों के बीच संबंध का दृश्य प्रदान करता है। यह तकनीक सामाजिक विज्ञान के विविध विषयों, स्वास्थ्य विज्ञान आदि में प्रयोग की जा सकती है। वर्गीकृत आंकड़ों के गहन विप्लेषण में यह मूलतः रेखाचित्रिय तकनीक के रूप में अधिक उपयोगी होती है। सहगामिता विप्लेषण विधि को निम्न आयामीय संबंध बताने के लिए प्रयोग होने के कारण पैमाना विधि (Scaling method) भी माना जाता है।

इस विधि को अन्य विधियों जैसे द्वि-आयामी चित्रांकन तथा बहु-आयामी पैमाने विधि का पूरक भी माना जाता है। सहगामिता विप्लेषण प्रमुख कारक विप्लेषण तथा प्रामाणिक सहसंबंध जैसी विधियों से भी संबंधित है।

## 16.10 शब्दावली

### सहगामिता विप्लेषण

: यह बहु-चरीय सांख्यिकीय तकनीक है जिसका प्रतिपादन Hirschfeld द्वारा किया गया है और बाद में इसकी पूर्ण व्याख्या Jean-Paul Benzecri द्वारा की गई है। अवधारणा की दृष्टि से यह तकनीक प्रमुख घटक विप्लेषण के समरूप है, किंतु इसका प्रयोग निरंतर आंकड़ों के स्थान पर वर्गीकृत आंकड़ों में किया जाता है। यह विधि आंकड़ा के समुच्चय को दो-आयामीय ग्राफ के रूप में प्रस्तुत करने में सहायक होती है।

### निष्क्रियता

: समस्त सारणी की निष्क्रियता (inertia) Chi-square statistic  $\chi^2$  की फलन होती है।

$$\chi^2 = \sum_i \sum_j \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

जहाँ  $O_{ij}$  आनुषंगिकता तालिका की  $i$  पंक्ति तथा  $j$  स्तंभ की संख्या,  $E_{ij}$  (पंक्ति तथा स्तंभ की परस्पर स्वतंत्रता की मान्यता के तहत) प्रत्याषित मान तथा कुल अवलोकन। ऐसी स्थिति में समग्र तालिका का  $N$  कुल निष्क्रिय मान होगा :

$$\text{कुल निष्क्रियता} = \frac{\chi^2}{n}$$

सूचित मूल्य प्रालेखों के परिणामस्वरूप उत्पन्न कुल निष्क्रियता का अनुपात होता है। निष्क्रियता के निर्वचन की वैकल्पिक विधि पंक्ति प्रालेखों एवं उनके औसत प्रालेखों में अंतराल की भारित औसत है।

- वर्गीकरण** : मदों को संहतियों में बांटने की क्रिया। यह मद प्रतिदर्श हो सकते हैं व संहति भी। वर्गीकरण पूर्णतः व्यक्तिनिष्ठ भी हो सकता है तथा वस्तुनिष्ठ भी (कम्प्यूटर से प्राप्त)।
- सह-संबंध** : एक विधि जिससे चरों में संबंध ज्ञात किया जा सकता है। NULL के कारण उत्पन्न संभावित संबंध की मात्रा वास्तव से अधिक है या कम इसकी जानकारी भी प्राप्त की जा सकती है? सामान्यतः हमारी रुचि  $x$  तथा  $y$  दो चरों में सहसंबंध जानने की होती है। संबंध की मात्रा जानने के लिए सहसंबंध गुणांक का प्रयोग किया जाता है।

## 16.11 कुछ उपयोगी पुस्तकें

Greenacre, M. J. (1984); Theory and applications of Correspondence analysis, London Academic Press.

Gifi, A. (1990). Nonlinear Multivariate Analysis. Chichester, UK: Wiley.

Johnson R.A., & Wichern D. W. (2002); Applied Multivariate Statistical Analysis, Pearson Education, Inc.

Manly, B.F.J. (2005), Multivariate Statistical Methods: A primer, Third edition, Chapman and Hall.

Rencher, A.C. (2002), Methods of Multivariate Analysis, Second edition, Wiley.

<https://onlinecourses.science.psu.edu>

[https://en.wikipedia.org/wiki/Factor\\_Analysis](https://en.wikipedia.org/wiki/Factor_Analysis)

Young, F.W, and R.M Hamer (1987); Multidimensional scaling: History, Theory and Applications, Lawrence Associates Publishers.

[http://www.unesco.org/webworld/idams/advguide/Chapt6\\_5.htm](http://www.unesco.org/webworld/idams/advguide/Chapt6_5.htm)

Laura Doey and Jessica Kurta (2011); Correspondence Analysis applied to psychological research, Tutorials in Quantitative Methods for Psychology, 2011, Vol. 7(1), Page 5-14.

Michael S. Lewis-Beck Alan Bryman Tim Futing Liao (Ed.) (2004); The Sage Encyclopedia of Social Science Research Methods Vol. 1, Page 203-205.

## 16.12 बोध प्रश्नों के उत्तर या संकेत

### बोध प्रश्न 1

- 1) भाग 16.4.6 देखें।
- 2)  $\chi^2$  का मान 219.816 तथा निष्क्रियता का मान 0.528 है।

## 16.13 अभ्यास प्रश्न

- 1) सहगामिता विश्लेषण से आप क्या समझते हैं? हम इस विधि का प्रयोग क्यों करते हैं?
- 2) बहु-आयामी मापदंड से आप क्या समझते हैं? यह सहगामिता विश्लेषण से किस प्रकार भिन्न है?
- 3) 901 वयक्तियों के एक प्रतिदर्श की आय एवं जॉब संतुष्टि के आधार पर तिरछा-वर्गीकरण किया गया। उपलब्ध परिणाम को निम्न सारणी में प्रस्तुत किया गया है।

सारणी : आय एवं कार्य-संतुष्टि

आय	कार्य संतुष्टि			
	बहुत अधिक असंतुष्ट	कुछ असंतुष्ट	सामान्य रूप से संतुष्ट	बहुत संतुष्ट
< \$ 25,000	42	62	184	207
< \$ 25,000 - \$ 50,000	13	28	81	113
>\$ 50,000	7	18	54	92

उपलब्ध आंकड़ों का सहगामिता विप्लेषण कीजिए। परिणामों का निर्वचन भी कीजिए।



ignou  
THE PEOPLE'S  
UNIVERSITY