# इकाई 11 असमानता के माप

इकाई की रूपरेखा



## 11.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययनोपरान्त आप :

- असमानता के विभिन्न निश्चयात्मक मापों की व्याख्या कर सकेंगे;
- गिनी निर्देशांक का निर्माण करने हेतु गणात्मक विधि को जान सकेंगे; और
- डाल्टन, एटकिन्सन, सेन, काकवानी तथा थील द्वारा प्रतिपादित असमानता के आदर्शात्मक मापों को व्यक्त कर सकेंगे।

## 11.1 प्रस्तावना

निर्धनों की खुशहाली में सुधार लाना अर्थिक नीति का एक महत्त्वपूर्ण लक्ष्य रहा है और काफी बड़ी सीमा तक इसका निर्धारण आय की संवृद्धि तथा वितरण द्वारा होता है। वितरणात्मक प्रतिरूपों का औसत आय तथा निर्धनता के स्तरों के बीच संबंधों पर महत्त्वपूर्ण प्रभाव पड़ता है। उच्चस्तरीय असमानताएँ आर्थिक दृष्टि से संसाधनों की बर्बादी होती हैं। इससे भी आगे, आर्थिक असमानताएँ जीवन से संबंधित अन्य असमानताओं के साथ संक्रिया (interact) करती हैं। इसलिए असमानताओं में कमी करना सार्वजनिक नीति की प्राथमिकता रही है। इस कारण आय असमानताओं का मापन करना अपने आप में महत्त्वपूर्ण हो जाता है। असमानताओं के स्तरों का अध्ययन करने के लिए समय के साथ विभिन्न परिस्थितियों में विभिन्न माप विकसित किए गए हैं। इन मापों को बृहत्तर रूप से दो वर्गों में रखा जा सकता है। (i) विशुद्ध माप (Positive Measures), (ii) आदर्शक माप (Normative Measures)। सामाजिक खुशहाली के बारे में मूल्य निर्णयन (Value Judgement) के बिना आय असमानताओं के मापन को निश्चयात्मक या विशुद्ध माप के रूप में भी जाना जाता है। विस्तार, चतुर्थक विस्तार, प्रमाप विचलन गिनी अनुपात, लॉरेंज वक्र आदि असमानता के विशुद्ध माप हैं।

दूसरी ओर, ऐसे भावों जिनमें सामाजिक कल्याण के बारे में मूल्य निर्णायन अनिवार्य रूप से शामिल होता है, को आदर्शक माप कहा जाता है। डाल्टन, एटकिंसन, सेन थील एवं काकवानी द्वारा प्रतिपादित निर्देशांक आदर्शक माप है। इस इकाई में एक-एक करके इन मापों पर चर्चा की जाएगी। असमानता के गिनी गुणांक तथा लॉरेंज वक्र पर विशेष ध्यान दिया जाएगा, क्योंकि असमानताओं के मापन पर आर्थिक साहित्य में ये दोनों ही अत्याधिक लोकप्रिय हैं।

## 11.2 विशुद्ध माप (Positive Measures)

यदि किसी बंटन में सभी मान बराबर नहीं हैं अर्थात् जहाँ बंटन में अपकिरण (disperson) है, वहाँ बंटन में असमानता पायी जाती है। किसी विशिष्ट संदर्भ में सामाजिक खुशहाली या आर्थिक महत्त्व के मामले में इसके परिणामों पर विचार किए बिना मूल्यों में पायी जाने वाली इस प्रकार की असमानता को जानने के लिए यदि कोई माप विकसित किया जाता है तो उस मान को **विशुद्ध** (Positive) माप के रूप में जाना जाता है। इसका अर्थ यह हुआ कि माप इस तथ्य के बारे में विचार करता है कि लोहे की कीलों की लंबाई में असमानता या किसी गाँव में मजदूरी अर्जित करने वालों की आय में असमानताएँ क्या हैं? फिर भी, उनमें से अनेक मानक सांख्यिकीय माप हैं तथा उनके सामाजिक निहितार्थों एवं/या सामाजिक परिणामों का अभी भी अध्ययन किया जा सकता है। इनमें से कुछ मापों तक आदर्शक उपागम (Normative Approach) द्वारा भी पहुँचा जा सकता है।

हम एक $x_i\ i=1,2,\ldots,N$ आय बंटन पर विचार करते हैं जिसमें व्यक्तियों की संख्या $N$ तथा माध्य आय $\mu$ है। माना कि $i$ व्यक्ति की कुल आय में भाग $q_i$ है जो $x_i/N\mu$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। ऐसे लोग जिनकी आय $x_i$ से अधिक नहीं है, कुल आय में उनके संचीय भाग को $Q_i$ से व्यक्त किया जाता है। तथापि, जब हमारे पास एक से अधिक आवृत्ति वाली कोई आय हो तथा $x_i$ से कम आय न होने वालों के अनुपात को $P_i$ से व्यक्त करते हों। ऐसे मामले में कुल आय का सापेक्षिक भाग $f_i x_i / N\mu$ से व्यक्त किया जाएगा जहाँ $f_i$ आय $x_i$ की आवृत्ति के लिए प्रयुक्त किया गया है तथा $N = \sum f_i$ । यहाँ इस उद्देश्य से दो अलग-अलग मामलों में भेद करने के लिए दो अलग-अलग अधेलिखितों को प्रयुक्त किए जाने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि संदर्भ यह स्पष्ट कर देगा कि अधेलिखित $i\,x_i$ वाले किसी व्यक्ति

को इंगित करता है या $x_i$ वाले व्यक्तियों के किसी समूह को निर्विवाद रूप से हम यहाँ यह मानकर चले हैं कि आँकड़ों को आय के बढ़ते हुए स्तरों के रूप में संजोया गया है ताकि प्रतीकात्मक प्रस्तुतिकरण सरल हो जाए। इसी प्रकार की स्थिति आय के परिमाण को घटते हुए क्रम में रखकर प्राप्त की जा सकती है।

इस इकाई में हमारा ध्येय विभिन्न स्वरूपों के साथ महत्त्वपूर्ण असमानताओं के मापों पर विचार करना है। इन मापों के अभिलक्षणों तथा कमजोरियों पर भी विचार किया जाएगा।

उपर्युक्त वर्णित तथ्यों को निम्न रूप में प्रयुक्त करते हुए :

$$q_i = \frac{x_i}{N\mu} \, or \, \frac{f_i x_i}{N\mu}$$

$$Q_i = \sum_{i-1}^{i} q_{i,}$$

$$p_i = \frac{1}{N} \, or \, \frac{f_i}{N}$$

$$P_i = \sum_{i-1}^{i} p_{i,}$$

### 11.2.1 सापेक्षिक विस्तार (Relative Range)

सापेक्षिक अपकिरण के किसी माप को असमानता के माप के रूप में लिया जा सकता है। उसे सापेक्षित विस्तार या (Range) के रूप में इस प्रकार परिभाषित किया जा सकता है :

$$RR_1 = \frac{Max_i x_i - Min_i x_i}{\mu} \qquad \text{(RR.1)}$$

यह अधिकतम आय तथा निम्नतम आय के बीच सापेक्षिक अंतर है। यदि आय समान रूप से बंटित है तो $RR_1 = 0$ होगा, यदि पूरी आय एक ही व्यक्ति को प्राप्त हो रही है तो $RR_1$ का मान अधिकतम होगा। यदि 0 तथा 1 के बीच पड़ने वाले किसी निर्देशांक को बनाना चाहते हैं तो इसे निम्नलिखित प्रकार व्यक्त कर सकते हैं :

$$RR_2 = \frac{Max_i x_i - Min_i x_i}{\mu} \qquad \text{(RR.2)}$$

इसका अर्थ यह हुआ कि यह अधिकतम भाग तथा निम्नतम भाग के बीच का अंतराल है। अर्थात्

$$RR_2 = Max_i q_i - Min_i q_i \qquad \text{(RR.3)}$$

यद्यपि कॉवेल ने इस विस्तार में $Min_i x_i$ , से भाग देने का सुझाव दिया है लेकिन इससे हमारा उद्देश्य पूरा नहीं होता। सामान्यीकरण या प्रमायीकरण की दो अन्य विधियाँ भी हैं जो इसे इकाई-स्वतंत्र बनाती हैं तथा जो (0, 1) अंतराल में सही बैठती हैं यह निम्नलिखित प्रकार हैं :

$$RR_3 \frac{Max_i\, x_i - Min_i\, \overline{x}_i}{Max_i\, x_i} \tag{RR.4}$$

तथा $$RR_4 = \frac{Max_i x_i - Min_i x_i}{Max_i x_i + Min_i x_i} \tag{RR.5}$$

विस्तार आधारित इन मापों की सबसे बड़ी तथा बुनियादी कमजोरी यह है कि इनमें श्रृंखला के सभी मानों का प्रतिनिधित्व नहीं है। इसलिए ये असमानता के किसी भी ऐसे परिवर्तन को नहीं बता पातीं जिनमें किन्हीं दो गैर-परम प्राप्तियों के बीच आय में कोई अंतरण हुआ हो। प्रत्येक छोर के दो परम मानों जो कभी-कभी ज्ञात भी नहीं होते, पर विचार करने के स्थान पर कुछ विद्वानों ने सर्वोच्च अंश (चतुर्थक, शतमक या दशमक) तथा उनके प्रतिपक्षी निम्नतम अंशों के माध्य आय के बीच के अनुपात के विचार को असमानता के एक सटीक माप के रूप में प्रयुक्त किया। उन्होंने इसे परम विषमता अनुपात (EDR) का नाम दिया। स्वाभाविक ही है कि यह अनुपात (0, 1) अंतराल के बीच नहीं आएगा। यह अनुपात $\mu$ से भी स्वतंत्र होगा। यह माप आय के किसी ऐसे हस्तांतरण को प्रदर्शित नहीं करेगा जिसमें परम अंश शामिल नहीं है।

### 11.2.2 सापेक्षिक अंतर चतुर्थक विस्तार

कभी-कभी सापेक्षिक विस्तार की चरमवादिता को 10वें एवं 90वें शतमक या कभी-कभी अंतर-चतुर्थक विस्तार के बीच तक बंटन को सीमित रखते हुए इसे संयमित करने का प्रयास किया जाता है। बाउले (1937) ने सापेक्षिक चतुर्थक विचलन को असमानता के निर्देशांक के रूप में प्रयुक्त किए जाने का सुझाव दिया था।

$$B = \frac{x^{q^3} - x^{q^1}}{x^{q^3} + x^{q^1}} \tag{B.1}$$

जहाँ $x^{q^3}$ आय के ऐसे स्तर का प्रतिनिधित्व करता है जो जनसंख्या को $r$ तथा (4-$r$) चतुर्थकों में विभाजित करती है। यदि सभी पदों की आय बराबर है तो $B = 0$ होता तथा यदि $B = 1$ है तो नीचे के 75 प्रतिशत लोगों को कोई आय प्राप्त नहीं हो रही होगी।

यद्यपि विस्तार के माप की तुलना में परम मानों को संयमित कर दिया गया है। किन्तु इसके बावजूद इस माप की स्पष्टतया यह कमजोरी है कि इसमें बंटन के 50 प्रतिशत भाग पर ही विचार किया जाता है। इतना ही नहीं, यदि किन्हीं दो व्यक्तियों की आय $x^{q^1}$ तथा $x^{q^3}$ या इनमें से किसी एक की सीमा को लांघे बिना बदल जाती है तो भी असमानता के माप में कोई परिवर्तन दिखाई नहीं देगा। इस प्रकार, यह निर्देशांक परमवादिता के सिवाय पूर्व के प्रस्तावों की सभी कमजोरियों को अपने आप में समाए हुए हैं। इसका उच्चतम मान तभी प्राप्त होता है जब नीचे के 75 प्रतिशत लोगों को कोई आय प्राप्त न हो रही हो।

इस माप का स्वरूप अंतर-चतुर्थक अनुपात भी है, जिसे 75वें शतमत (3 सरे चतुर्थक) आय में से 25वें शतक (पहले चतुर्थक) आय को घटाकर उसमें मध्यका आय ($x^{q^2}$) से भाग देकर प्राप्त किया जा सकता है।

### 11.2.3 सापेक्षिक प्रमाप विचलन

प्रमाप विचलन में माध्य का भाग देकर भी अपकिरण की माप की जा सकती है।

$$RSD = \frac{\sigma}{\mu} \tag{RSD.1}$$

जहाँ σ प्रमाप विचलन को तथा $\mu$ माध्य को व्यक्त करता है।

इसे सापेक्षिक आयों के प्रमाप विचलन के रूप में भी समान रूप से परिभाषित किया जा सकता है। $\sigma$ की परिभाषा को प्रयुक्त करते हुए यह पता लगाया जा सकता है कि इसका मान 0 तथा $(N-1)^{1/2}$ के बीच होता है न कि 0 तथा 1 के बीच। सर्वोच्च मान बंटन के आकार पर निर्भर करता है।

चूँकि इस माप में सभी मानों को प्रयुक्त किया जाता है, इसलिए आय का कोई भी हस्तांतरण माप में परिलक्षित होगा। तथापि, यह समझ लिया जाना चाहिए कि यह माप सभी स्तरों पर होने वाली हस्तांतरों के प्रति समान रूप से संवेदनशील (Equi-Sensitive) है। चाहे एक दी हुई राशि $x_j$ = रु.400 और $x_k$ = रु.500, या $x_j$ = रु.10,000 और $x_k$ = रु.10,100 के बीच हस्तांतरित की जाती है, सापेक्षित प्रमाप विचलन एक जैसा ही रहेगा।

अंतिम रूप से हम यह समझ सकते हैं कि सापेक्षिक प्रमाप विचलन के वर्ग को प्रायः असमानता के एक अन्य माप हेतु प्रयुक्त कर लिया जाता है। इसे प्रसरण गुणांक (Coefficient of Variance) कहा जाता है। अनेक विद्वानों ने असमानता के मापन हेतु प्रसरण के प्रयोग का सुझाव दिया है लेकिन हमने यहाँ इस पर विचार नहीं किया है क्योंकि प्राथमिक तौर पर यह इकाई स्वतंत्र नहीं है। हमारे विचार से असमानता के माप को इकाई-स्वतंत्र होना चाहिए।

### 11.2.4 लघुगुणकों का प्रमाप विचलन

निचले सिरे पर हस्तांतरणों को अधिक महत्त्व देने का एक तरीका (जैसा कि सेन ने अपेक्षा की है) आयों के कतिपय रूपांतरों पर विचार करने का है। लघुगुणकों पर विचार करके इस प्रकार के रूपांतरण पर ध्यान दिया जा सकता है क्योंकि लघुगुणक निचले स्तरों की आय अंतरीकरण (staggeer) कर देते हैं।

इस माप को निम्नलिखित दो में से किसी भी रूप में परिभाषित किया जा सकता है।

$$SDL_1 = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (\log \mu - \log x_i)^2 \right)^{1/2} \qquad \text{(SDL.1)}$$

$$SDL_2 = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (\log \hat{\mu} - \log x_i)^2 \right)^{1/2} \qquad \text{(SDL.2)}$$

जहाँ $\mu$ तथा $\hat{\mu}$ क्रमशः समान्तर माध्य तथा गुणोत्तर मध्य हैं। मानकीय सांख्यिकीय साहित्य जहाँ गुणोत्तर माध्य को प्रयुक्त करने को प्राथमिकता देता है, आय असमानता के साहित्य में समान्तर माध्यों (Arithmetic Means) को प्रयुक्त किए जाने की आम परम्परा है।

कोवेल (1995) ने इन्हें प्रसरण के रूप में परिभाषित किए जाने को प्राथमिकता प्रदान की तथा इन्हें लघुगुणक प्रसरण ($V_1$) के लिए $SDL_1$ का वर्ग तथा लघुगुणक प्रसरण ($V_2$) के लिए $SDL_2$ का वर्ग कहा। व्यंजक से दूसरे का नाम तो स्पष्ट हो जाता है लेकिन पहला इस तथ्य से व्युत्पन्न किया गया है कि को के रूप में भी लिखा जा सकता है। यहाँ यह स्पष्ट है कि $(\log x - \log \bar{x})$ को $\log (x/\bar{x})$ के रूप में भी लिखा जा सकता है। यहाँ यह स्पष्ट है कि $V_1 = V_2 + \log(\hat{\mu}/\mu)$.

चूँकि ये माप आयों के अनुपातों के रूप में हैं, इसलिए आयों में कोई भी आनुपातिक परिवर्तन इन मापों के द्वारा मापे जाने पर असमानता के परिमाण को अपरिवर्तित ही रखेगा। लेकिन, दुर्भाग्यवश किसी धनवान व्यक्ति से किसी निर्धन व्यक्ति को होने वाला कोई भी हस्तांतरण असमानता के परिमाण में वृद्धि कर सकता है, विशेष तौर पर तब, जब किसी निर्धन व्यक्ति की आय बंटन के माध्य के 2.72 गुणा से अधिक हो तो।

सूत्र के बावजूद, सभी व्यक्तियों की आय समान होने पर निचली सीमा जहाँ शून्य है, वहीं ऊपरी सीमा बंटन के आकार पर निर्भर करती है तथा $N$ का आकार बड़ा होते जाने तथा धनवानों को छोड़ कर प्रत्येक व्यक्ति एक इकाई के बराबर आय प्राप्त करता है तो यह अनंत की ओर बढ़ती जाती है (क्योंकि लघुगुणक रूपांतर में शून्य अग्राह्य है)। इससे आगे, यदि हम समूहीकृत आँकड़ों (grouped data) का सामना करते हैं, तो $\mu$ के स्थान पर $\hat{\mu}$ तथा $x_i$ के स्थान पर $\mu_i$ को प्रयुक्त करना सुविधाजनक होता है।

तथापि प्रसरण का लघुगुणक अपघटित (decomposable) हो जाने के योग्य $\hat{\mu}$ है। यह इसका एक अभिलक्षण है जिस पर बाद में बल दिया जाने लगा है। यह दर्शाया जा सकता है कि $V_2$ समूह घटकों तथा समूह के भीतर घटकों के बीच का योग है, जहाँ समूह के भीतर घटक $V_2$ के भीतर समूह का जनसंख्या भारांकित योग है।

### 11.2.5 चैम्परनाउने निर्देशांक

चैम्परनाउने (1973) ने गुणात्मक माध्य के विचार को प्रयुक्त किया। किसी असमान बंटन के बारे में यह एक सर्वविदित तथ्य है कि इसका गुणोत्तर माध्य समान्तर माध्य (अंकगणितीय माध्य) से छोटा होता है। समान्तर माध्य से गुणोत्तर माध्य के योगज प्रतिलोभ (Additive Inverse) को असमानता के निर्देशांक के रूप में विचार किया जा सकता है। औपचारिक रूप से इस निर्देशांक को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$CII = 1 - \frac{\hat{\mu}}{\mu} \qquad \text{(CII.1)}$$

जहाँ $\mu$ तथा $\hat{\mu}$ क्रमशः आय बंटन के समान्तर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य हैं। यह आसानी से समझा जा सकता है, कि इसका मान 0 तथा 1 के बीच ही होता है।

सुस्पष्टतया कोई किसी ऐसे माप पर भी विचार कर सकता है जहाँ गुणोत्तर माध्य को हरात्मक माध्य से प्रतिस्थापित कर दिया जाए।

ये माप आय के हस्तांतरण के प्रति अधिक संवेदनशील हैं तथा परिवर्तन उस समय अधिक होता है जब हस्तांतरण बंटन के निचले सिरे पर होता है। ये दो व्यक्तियों के बीच आय के हस्तांतरण के प्रति भी संवेदनशील हैं। $x_j$ तथा $(x_j - d)$ से तथा $x_k$ को $(x_k + d)$ से प्रतिस्थापित करके परिवर्तन की दिशा को जाना जा सकता है। अथवा, इसके लिए अवकलन (Differential calculus) का प्रयोग किया जा सकता है।

इन सूचकों के साथ सबसे बड़ी कठिनाई यह है कि यदि बंटन की कोई भी आय शून्य हो तो इन्हें परिभाषित नहीं किया जा सकता।

### 11.2.6 हर्षमैन-हरफिण्डाल सूचकांक

इन सूचकांकों का विकास हर्षमैन (1945) द्वारा व्यापार में वस्तु संकेद्रण (Commodity Concentration) के अध्ययन तथा हरफिण्डाल (1950) द्वारा उद्योग में बाजार एकाधिकार के अभिलक्षणों के अध्ययन में किया गया।

यदि प्रत्येक इकाई अपने आप में एक वर्ग हो, $p_i$=1/N, $i$=1,2…,N तो $q_i$ को प्रयुक्त करके संकेन्द्रण को जाना जा सकता है, क्योंकि $q_i$ का योग सदैव 1 के बराबर होता है। हर्षमैन ने एक ऐसा माप विकसित किया जो इनके बीच असमानता के स्तर को जान सकता है। उन्होंने $q_i$ $i$=1,2…,N के भागों के वर्गों के योग के वर्गमूल को प्रयुक्त किए जाने का प्रस्ताव किया।

$$H_1 = \left( N \sum_{i=1}^{N} q_i^2 \right)^{1/2} \quad \text{(H.1)}$$

जिसका सामान्यीकरण निम्नलिखित प्रकार किया जा सकता है :

$$H_1^* = \left( N \sum_{i=1}^{N} q_i^a \right)^{1/a}, a > 1 \quad \text{(H.2)}$$

हरफिण्डाल ने ठीक इसी प्रकार का माप विकसित किया जो मूल (H.1) की तुलना में अधिक लोकप्रिय है। यह अंश (share) वर्गों के योग के बराबर है :

$$H_2 = \sum_{i=1}^{N} q_i^2 \quad \text{(H.3)}$$

$$H_2^* = \sum_{i=1}^{N} q_i^a, a \geq 1. \quad \text{(H.4)}$$

यहाँ यह स्पष्ट है कि, अंशों में असमानता के साथ-साथ इन मापों का माप $N$ पर भी निर्भर करता है। इकाइयों का कम या अधिक होने से मान में अंतर आ जाता है। $N = 2$ के लिए, यह सुझाव दिया जाता है कि H.3 में से 1/N को घटाया जा सकता है।

$$H_3 = \sum_{i=1}^{N} q_i^2 - \frac{1}{N} \quad \text{(H.5)}$$

$H_3$ का न्यूनतम मान शून्य है। लेकिन इससे कोई बहुत बड़ा उद्देश्य हल नहीं होता। जब $q_1 = 0.99$ तथा $q_2$=0.01 के लिए $N = 2$ होता है तो $H_2 = 0.98$ तथा $H_3 = 0.48$ आता है। स्पष्ट है कि $H_3$ की तुलना में $H_2$ का मान एकाधिकार के परिदृश्य के अभिलक्षीकरण में बेहतर परिणाम देता है।

## 11.2.7 कोम का निर्देशांक

माना कि $N$ आय इस प्रकार की है कि $N= nm$ जहाँ कि $n$ विभिन्न आयों की संख्या है तथा $m$ इन्हें प्राप्त करने वालों की संख्या को व्यक्त करता है। किसी दी हुई आय के लिए समान जोड़ों की संख्या $m(m–1)/2$ होगी तथा कुल जोड़ों की संख्या $n.m(m–1)/2$ होगी। सभी जोड़ों की कुल संख्या $N(N–1)/2–nm(nm–1)/2$ होगी। $nm(m–1)/nm(nm–1) = (m–1)/ (N–1)$ के रूप में असमानता के निर्देशांक के बारे में विचार किया जा सकता है। तब असमानता निर्देशांक को 1 में से घटाकर प्राप्त किया जा सकता है।

यदि $x_i$ आय प्राप्त करने वालों की संख्या $f_i$ है तो यह माप निम्नलिखित प्रकार होगा।

$$K = 1 - \frac{\Sigma f_i^2 - N}{N(N-1)} = \frac{N^2 - \Sigma f_i^2}{N(N-1)} \quad \text{(K.1)}$$

इस निर्देशांक को कोम (1996) द्वारा विकसित किए जाने पर विचार करने का एकमात्र उद्देश्य यह रहा है कि असमानता की माप के उपागम के अनेक सरल रास्ते भी हो सकते हैं।

**बोध प्रश्न 1**

1) असमानता के मापों के सापेक्षिक विस्तार को परिभाषित कीजिए। इसके गुण भी बताइए।

..................................................................................................................

..................................................................................................................

2) यह बताइए कि सापेक्षिक अंतर-चतुर्थक विस्तार किस प्रकार सापेक्षिक विस्तार से एक अच्छा माप है?

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

3) सापेक्षिक माध्य विचलन क्या है? यदि माध्य से कम आय वाले दो व्यक्तियों के बीच आय का हस्तांतरण होता है तो क्या इससे निर्देशांक का परिमाण बदल जाएगा।

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

4) प्रमाप लघुगुणक विचलनों के दो स्वरूपों की तुलना कीजिए।

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

5) चेम्परनाउने निर्देशांक का क्या महत्त्व है?

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

6) हरफिण्डाल निर्देशांक क्या है? इसके अनुप्रयोग के क्षेत्र कौन-कौन से हैं?

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

7) कोम के निर्देशांक का क्या संदेश है? एक ऐसे बंटन के लिए कोम के निर्देशांक की गणना कीजिए जहाँ रु. 5 लाख के मान हेतु आवृत्ति 5 तथा 10 लाख के लिए आवृत्ति 5 है। इस प्रकार कुल आकार 10 एवं समान्तर माध्य 7.5 है।

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

## 11.3 गिनी निर्देशांक (Gini Index)

संकेन्द्रण के इस निर्देशांक का नाम इसके प्रतिपादक इटली के सांख्यिकीविद् कोराडो गिनी (1912) के नाम पर जाना जाता है। वर्तमान समय में इसे केवल गिनी ही कहा जाता है। अपने उद्भव में यह निर्देशांक धनात्मक है। ऐसे अनेक तरीके हैं जिनमें इस गुणांक को व्यक्त किया जा सकता है। इसी प्रकार इसका निर्वचन भी कई तरीकों से किया जा सकता है। लोगों ने कल्याणवादी सैद्धांतिक ढ़ाँचे में सत्याभाषी स्वयंसिद्ध तथ्यों (Plausible axioms) के तहत इसकी व्युत्पत्ति असमानता के एक माप के रूप में की है। असमानता के निर्देशांक साहित्य में प्रस्तावित यह निर्देशांक अनेक अच्छे स्वयंसिद्ध तथ्यों (axioms) को संतुष्ट करता है।

पहले, हम उन परिभाषाओं एवं व्यंजकों की विवेचना करेंगे, जिनकी व्युत्पत्ति अपकिरण (dispersion) के माप के रूप में की जा सकती है। समूहीकृत अवलोकनों हेतु इसकी आवृत्ति आँकड़ों के लिए इसके व्यंजकों को देने के साथ-साथ, हम इसके कल्याणवादी सैद्धांतिक निर्वचनों की विवेचना करेंगे।

### 11.3.1 अपकिरण के माप के रूप में गिनी निर्देशांक

स्मरण कीजिए कि माध्य विचलन तथा प्रमाप विचलन, जो कि अपकिरण के माप हैं, में अंकगणितीय (समान्तर) माध्य से विचलन लिया जाता है। यह भी याद कीजिए कि लघुगुणक के एक माप में विचलन गुणोत्तर माध्य से लिया जा सकता है। तथापि, कोई प्रश्न कर सकता है कि अपकरणों को किसी, माध्य से विचलनों के रूप में क्यों लिया जाता है? सभी जोड़ों की तुलना करके अंतर क्यों नहीं ले लिया जाता? अंतरों के धनात्मक मानों पर विचार करने के लिए, औसतीकरण (माध्यम विचलन) से पूर्व या तो विचलनों के आदर्श मान ले लिए जाएं या विचलनों के वर्गों का योग करके वर्गीकृत अंतरों के माध्य का वर्गमूल निकाल लिया जाए।

कोराडो गिनी (1012) ने सभी अंतरों, अर्थात् मानों के सभी जोड़ों पर विचार करने का प्रस्ताव किया। इसके विपरीत अपकिरण का विस्तार माप केवल उच्चतम मान तथा निम्नतम मान के एक जोड़े पर विचार करता है। जब $x_i$ तथा $x_j$ क्रमशः $i$वीं तथा $j$वीं आय को व्यक्त करते हो तथा $i, j=1, 2,\ldots, N$ हो तो हम पाते हैं कि निरपेक्ष अंतरों के योग को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है।

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left|x_{i-}x_j\right| \qquad \text{(G.1)}$$

और क्योंकि अंतरों की कुल संख्या $N^2$ है, इसलिए निरपेक्ष अंतरों के माध्य को स्पष्टतया निम्न रूप में लिखा जा सकेगा।

$$\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\ \sum_{i=1}^{N}\left|x_{i-}x_j\ \right| \qquad \text{(G.2)}$$

जहाँ स्वयं के साथ अंतरों की भी गणना कर ली गयी है तथा $x_j$ के साथ $x_i$ के अंतर को $x_i$ के साथ $x_j$ के अंतर को पृथक रूप में प्रयुक्त किया जाता है। भले ही अंकीय रूप से ही वे समान ही क्यों न हों। प्रतिस्थापन के मामले में भी ऐसा ही होता है। व्यंजक (G.2) का विस्तार 0 तथा $2\mu$ के बीच है।

प्रतिस्थापन बिना (without replacement) वाले मामले में, योग को $N(N-1)$ से भाग दिया जाता है चूँकि स्वयं के साथ $N$ विचलन है। यहाँ यह पता चलता है कि योग का अंकीय मान उतना ही रहता है।

असमानता के एक माप के रूप में प्रयुक्त करने के लिए माध्य अंतर के गुणांक (coefficient of mean difference-CMD) के रूप में कहे जाने वाले मान को प्राप्त करने के लिए (G.2) में $\mu$ से भाग दिया जा सकता है।

$$CMD = \frac{1}{N^2\mu}\sum_{i=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\left|x_i - x_j\right| \qquad (G.3)$$

सीएमडी पैमाने की स्वतंत्रता के विचार की शर्त को पूरा करता है तथापि व्यंजन G.3 का प्रसार सभी की आय एकसमान होने पर 0 तथा एक ही व्यक्ति के पास समस्त आय होने पर $2[=2N/(N-1)]$ के बीच होता है। (0,1) के अंतराल को संतुष्ट करने के लिए इसे 2 से और आगे भाग दिया जाता है। इसका परिणाम संकेन्द्रण के गिनी गुणांक या असमानता के गिनी निर्देशांक के रूप में सामने आता है :

$$G = \frac{1}{2N^2\mu}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left|x_i - x_j\right| \qquad (G.4)$$

अथवा

$$G = \frac{1}{N^2\mu}\sum_{i=1}^{N}\sum_{x_j \le x_i}^{N}(x_i - x_j) \qquad (G.5)$$

गिनी निर्देशांक को केवल धनात्मक अंतरों के योग के रूप में लिया जाता है, भले ही इसे सभी अंतरों की संख्या तथा माध्य आय से सामान्य बना देते हैं। केण्डाल तथा स्टुअर्ट ने इसे ''आयों के सभी जोड़ों के बीच निरपेक्ष अंतरों के औसत मान के आधे को माध्य आय से भाग देने से प्राप्त भागफल के रूप में'' परिभाषित किया है।

इस निर्देशांक को जनसंख्या अनुपातों तथा आय अंशों के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। यदि व्यक्तिगत $i$ के आय-अंश को $q_i$ से व्यक्त किया जाए तो,

$$q_i = \frac{x_i}{N\mu}, \qquad (G.6)$$

व्यंजक (G.4) को निम्नलिखित प्रकार भी लिखा जा सकता है।

$$G = \frac{1}{2N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left|q_i - q_j\right| \qquad (G.7)$$

किसी असतत् बंटन (discrete distribution) के मामलों में, प्रत्येक व्यक्तिगत जनसंख्या $(1/N)$ वां भाग होता है।

$$p_i = \frac{1}{N}. \qquad (G.8)$$

इसलिए (G.7) को निम्नलिखित प्रकार लिख सकते हैं :

$$G = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left|p_j q_i - p_i q_j\right|. \qquad (G.9)$$

स्वाभाविक रूप से प्रश्न उठता है : व्यंजक (G.9) में $\left|p_i q_i - p_j q_j\right|$ क्यों नहीं? इसे समझने के लिए, समूहों के लिए हम गिनी गुणांक पर विचार करते हैं।

माना कि $r$वें तथा $s$वें समूहों (कहने को परिवार) की माध्य आयों को क्रमशः $\mu_r$ तथा $\mu_s$ से व्यक्त किया जाता $r,s=1,2\ldots g$ है, तब समूहों के लिए गिनी को निम्नलिखित प्रकार परिभाषित कर सकते हैं:

$$G = \frac{1}{2N^2\mu}\sum_{r=1}^{g}\sum_{s=1}^{Ng}\left|\mu_r - \mu_s\right| f_r f_s \tag{G.10}$$

जहाँ $f_r$ तथा $f_s$ क्रमशः समूह $r$ तथा $s$ की आवृत्तियाँ हैं। इसे निम्नलिखित प्रकार लिख सकते हैं

$$G = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{g}\sum_{s=1}^{g}\left|\frac{\mu_r}{\mu} - \frac{\mu_s}{\mu}\right| p_r p_s \tag{G.12}$$

जहाँ $$p_r = \frac{f_r}{N} \text{ तथा } p_s = \frac{f_s}{N} \tag{G.12}$$

अब हम समूह $r$ से कुल आय के भाग पर विचार करते हैं

$$q_r = \frac{\mu_r f_r}{N\mu} = p_r \frac{\mu_r}{\mu} \tag{G.13}$$

तब व्यंजक (G.12) को (G.14) तथा (G.15) में से किसी भी रूप में लिखा जा सकता है।

$$G = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{g}\sum_{s=1}^{g}\left|\frac{q_r}{p_r} - \frac{q_s}{p_s}\right| \tag{G.14}$$

अथवा

$$G = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{g}\sum_{s=1}^{g}\left|p_s q_r - p_r q_s\right| \tag{G.15}$$

यहाँ यह स्पष्ट है कि जब $f_r$ तथा $f_s$ का मान 1 के बराबर है तो $g=N$ तथा $p_s=p_r=(1/N)$.

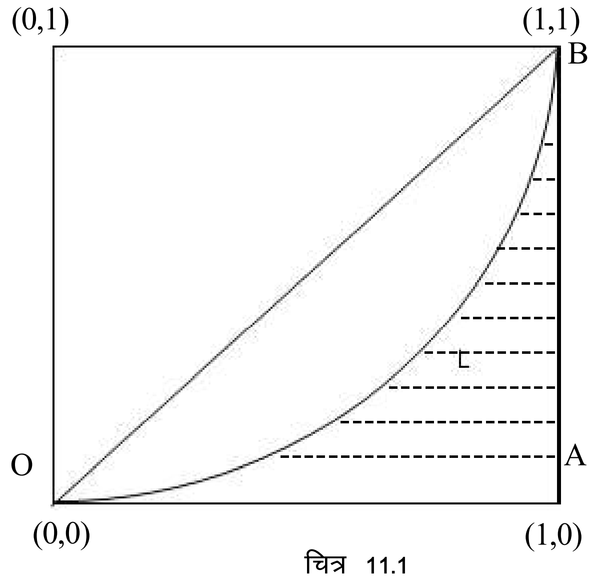
सांख्यिकीय साहित्य में हम आवृत्ति पहलुओं पर विशेष जोर देते हैं, अर्थशास्त्र के साहित्य में प्रत्येक व्यक्ति को एकल आय के रूप में मानते हुए व्यंजकवार सुविधाजनक होता है भले ही $x_i = x_j$ को माने जाने पर कोई प्रतिबंध नहीं है।

### 11.3.2 सरल संगणनात्मक विधि

सापेक्षिक माध्य अंतरों के रूप में अपना निर्देशांक प्रतिपादित करने के दो वर्ष बाद गिनी (1914) ने सिद्ध किया कि लॉरेंज वक्र के नीचे के क्षेत्रफल के दुगने को इकाई में से घटाने पर जो शेष बचता है वह गिनी निर्देशांक है। अर्थात्

$$G = 1 - 2\overline{A} \tag{LG.1}$$

जहाँ $\overline{A}$ लॉरेंज वक्र के नीचे का क्षेत्रफल है जैसे कि चित्र 11.1 में दर्शाया गया



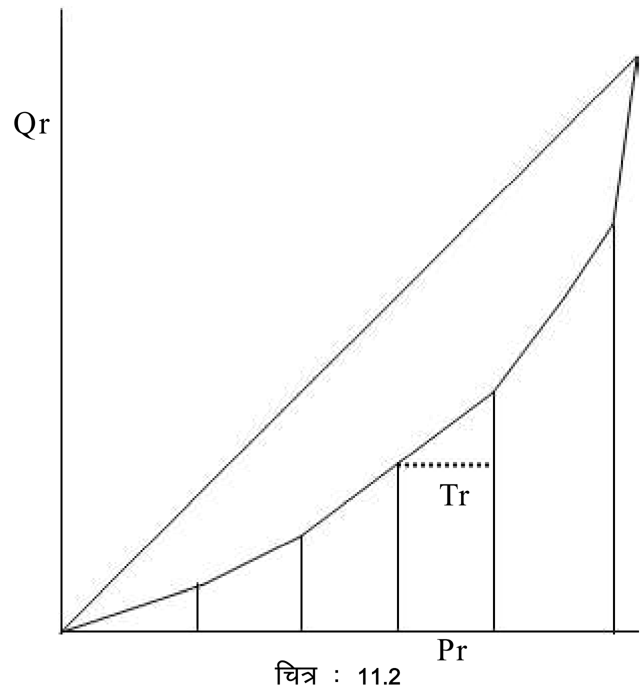

चित्र 11.1

तथापि हम $Q$ तथा $P$ के बीच के संबंध का न तो विशिष्ट प्रकार से उल्लेख ही करते हैं और न आकलन करते हैं। इसके स्थान पर, वर्गों में व्यक्तियों के संचयी अनुपातों तथा उनकी आयों के संचयी भागों को रेखाकिंग (ग्राफ) पर अंकन करके लॉरेंज वक्र खींच लेते हैं जहाँ वर्गों को बढ़ती हुई प्रतिव्यक्ति आय के अनुसार रखा जाता है :

$$\mu_1 \le \mu_2 \le \mu_3 \le .... \le \mu_r \le ... \le \mu_g . \qquad \text{(LG.4)}$$

स्पष्ट तो तथ्य यह है कि इस प्रस्तुतीकरण में समानता का चिन्ह तो बिल्कुल व्यर्थ है। (इसे हमने थील (1968) से मतभिन्नता रखते हुए लिखा है)। $P_r$ तथा $Q_r$ को अंकित करते हुए चित्र 11.2 प्राप्त हुआ है। हम देखते हैं कि लॉरेंज वक्र के नीचे का क्षेत्रफल अनेक समलंबों से मिलकर बना हुआ दिख रहा है। समलंब में एक आयात तथा एक त्रिभुज मिलकर बनता है। सभी समलंबों (माना कि संख्या में $g$ ) के क्षेत्रफलों का योग करके लॉरेंज वक्र के नीचे के भाग का क्षेत्रफल निकाला जा सकता है। इसे समीकरण (LG.1) में प्रतिस्थापित करने पर गिनी गुणांक G के आगणन हेतु निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है :

$$G = 1 - \sum_{r=1}^{g} (P_r - P_{r-1})(Q_r + Q_{r-1}) \qquad \text{(LG.5)}$$




चित्र : 11.2

बोध प्रश्न 2

1) गिनी अनुपात को परिभाषित कीजिए।

......................................................................................................................

......................................................................................................................

......................................................................................................................

......................................................................................................................

2) अपकिरण के अन्य मापों से गिनी को परिभाषित करने के उपागमों में भेद कीजिए।

......................................................................................................................

......................................................................................................................

......................................................................................................................

3) गिनी की गणना हेतु व्यंजक लिखिए।

......................................................................................................................

......................................................................................................................

......................................................................................................................

4) आप गिनी अनुपात की गणना किस प्रकार करेंगे?

......................................................................................................................

......................................................................................................................

......................................................................................................................

## 11.4 लॉरेंज वक्र

असमानता के स्तरों के संबंध में बंटन की दो परिस्थितियों की तुलना करने के लिए लॉरेंज वक्र एक शक्तिशाली ज्यामितीय विधि है। इसे सैंकड़ों वर्ष पहले प्रतिपादित किया गया था। सैंकड़ों वर्ष पहले मैक्स ओ. लॉरेंज (1905) द्वारा संपत्ति के संकेन्द्रण के माप हेतु प्रयुक्त की गयी यह विधि, असमानता पर इन्द्रियानुभावित अध्ययनों हेतु बड़े पैमाने पर आज भी प्रयुक्त की जाती है। इस विधि को ऐसे किसी भी मापनीय बंटन की असमानता की तुलना हेतु प्रयुक्त किया जा सकता है, जैसे कि आय, संपत्ति (भूमि, पूँजी), उपभोग मदों पर व्यय (जैसे कि खाद्य पदार्थ या शिक्षा) आदि। बंटन व्यक्तियों अथवा परिवारों में से किसी का भी हो सकता है। राज्यों द्वारा किए जाने वाले कर संग्रह या व्यय या राज्यों द्वारा प्राप्त संघीय अनुदानों की असमानता के माप हेतु भी इस विधि को प्रयुक्त किया जा सकता है। कर उपकरण की प्रभावकारिता के अध्ययन हेतु कर-पूर्व तथा कर-पश्च बंटन की तुलना भी की जा सकती है।

लॉरेंज (1905) ने असमानता के स्तरों में परिवर्तन या स्तरों की माप हेतु उस समय प्रयुक्त की जाने वाली अनेक विधियों का अध्ययन किया था। इनमें से अधिकांश विधियों में समंक सारणीयन में स्थिर-आय वर्गों को प्रयुक्त करते हुए, प्रत्येक स्थिर-आय वर्गों में वर्ग आयों के प्राप्तकर्त्ताओं के प्रतिशत में परिवर्तनों या व्यक्तियों के एक वर्ग से किसी अन्य वर्ग में चले जाने को प्रयोग करके अंतर-कालिक तुलना की जाती है। इन समस्त विधियों को असंतोषजनक करार देते हुए, लॉरेंज इस निष्कर्ष पर पहुँचे कि आय में परिवर्तनों तथा जनसंख्या में परिवर्तनों दोनों ही पर इस तरह से एक साथ विचार किया जाना चाहिए कि आय वर्गों का ''स्थिरतापन'' तटस्थ हो जाए।

वास्तव में, यह माप तुलना से संबंधित है तथा अधिकांश मामलों में हम तुलना करने की स्थिति में होते हैं लेकिन गैर-तुलनीयता की भी स्थितियाँ हो सकती हैं। तथापि, कुछ ऐसे माप भी हैं जो एक पैमाने के अंकों के रूप में असमानता का अंकीय प्रस्तुतीकरण करने में सक्षम हैं, और इसलिए उन्हें त्वरित माप कहा जाता है। ये सभी माप लॉरेंज वक्र पर आधारित पाए जाते हैं।

यहाँ यह इंगित करना महत्त्वपूर्ण है कि लॉरेंज वक्र गिनी (1914) द्वारा स्वतंत्र रूप से प्रयुक्त किया गया था। इसीलिए, इसे प्रायः लॉरेंज-गिनी वक्र के रूप में संदर्भित किया जाता है। लेकिन, हम इसे इसके प्रचलित नाम 'लॉरेंज वक्र' से ही प्रयुक्त करना पसंद करेंगे।

### 11.4.1 ज्यामितीय परिभाषा

आयों के संकेन्द्रण का लॉरेंज वक्र प्राप्त करने वालों के संचयी अनुपातों, जिन्हें प्रायः भुज (abscissa) पर अंकित किया जाता है, तथा कुल के उनके संगत संचयी भागों, जिन्हें कोटि (ordinate) पर अंकित किया जाता है के बीच संबंध को प्रदर्शित करता है। यदि $j$ वर्ग के जनसंख्या अनुपातों तथा आय भागों को क्रमशः $p_j$ तथा $q_j$ एवं $i$, वर्ग तक के संचयी अनुपातों और भागों को $P_i$ तथा $Q_i$ से व्यक्त किया जाए तो

$$P_i = \sum_{j=1}^{i} p_j, \qquad 1 \geq p_j \geq 0 \qquad \text{(GD.1)}$$

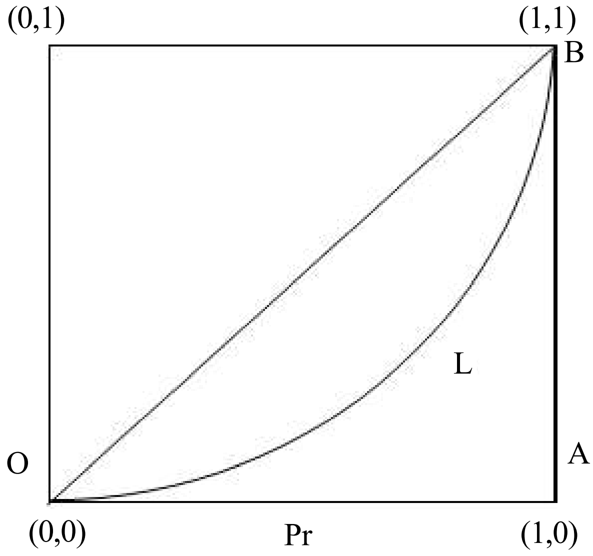
एवं

$$Q_i = \sum_{j=1}^{i} q_j, \qquad 1 \geq q_j \geq 0 \qquad \text{(GD.2)}$$

$P_i$ तथा $Q_i$ के बीच संबंध को लॉरेंज वक्र द्वारा व्यक्त किया जाता है।

$$Q_i = L(P_i), \qquad 1 \geq P_i \geq 0, \quad 1 \geq Q_i \geq 0 \qquad \text{(GD.3)}$$

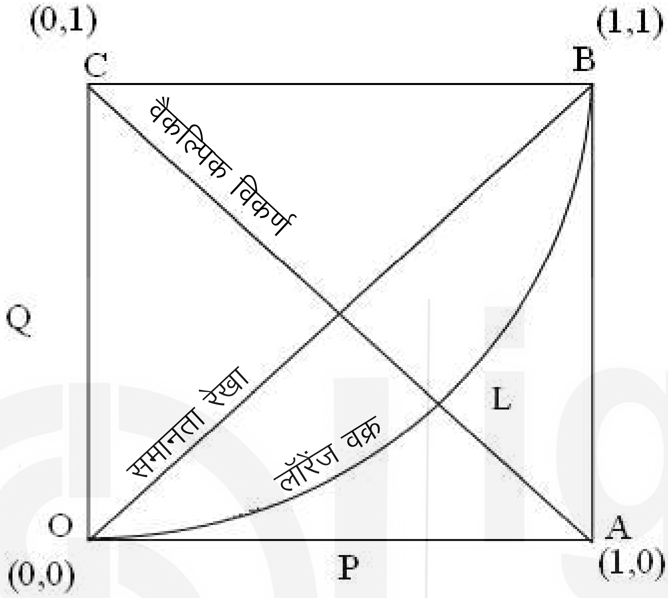
इस वक्र पर कोई बिंदु $(P_i, Q_i)$ होता है। स्वाभाविक है कि पहला बिंदु (0,0) तथा अंतिम बिंदु (1,1) होगा। यह भी स्पष्ट है कि $Q_i \leq P_i$, $i$=1, 2,..., $N$–1, यदि आयों के वर्गों की संख्या $N$ है तो। इसका अर्थ यह हुआ कि कोई भी बिंदु मूल बिंदु पर भुज पर 45$^o$ से अधिक का कोण नहीं बनाएगा। तब यह सुनिश्चित हो सकता है कि इकाई वर्ग में लॉरेंज वक्र निचले त्रिभुज के बीच स्थिर हो। चित्र 11.3 में OLB लॉरेंज वक्र है।




चित्र 11.3

### 11.4.2 लॉरेंज वक्र के अभिलक्षण

अब यह स्पष्ट हो गया कि पूर्ण समानता की परम स्थिति लॉरेंज वर्ग का विकर्ण OB है जो $P_i = Q_i$, $i=1, 2,\ldots, N$ की स्थिति को स्पष्ट कर रहा है। पूर्ण असमानता की एक अन्य परम स्थिति OAB होगी। विकर्ण OB को समानता रेखा कहा जाता है। दूसरे विकर्ण CA को वैकल्पिक विकर्ण के रूप में जाना जाता है तथा यह वक्र की सममिति के अध्ययन में उपयोगी है। A बिन्दु पर $90^o$ के मोड़ के साथ OAB रेखा पूर्ण असमानता का प्रतीक है (चित्र 11.4 देखें)।




चित्र 11.4

अंतिम रूप से लॉरेंज वक्र के निम्नलिखित अभिलक्षण हैं :

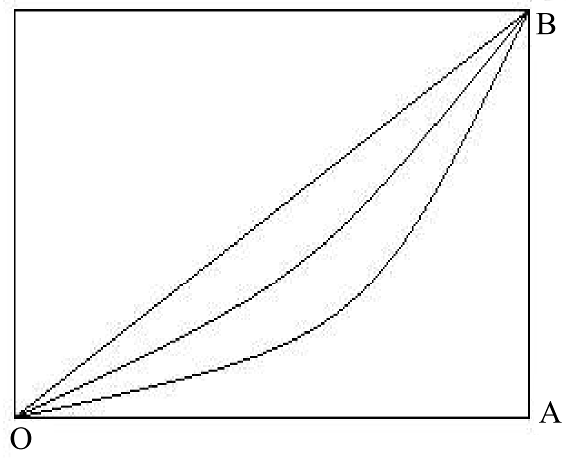
i) $1 \geq p_i \geq 0; 1 \geq q_i \geq 0, \ i = 1, 2, \ldots, N$

ii) $1 \geq P_i \geq 0; 1 \geq Q_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, N-1$

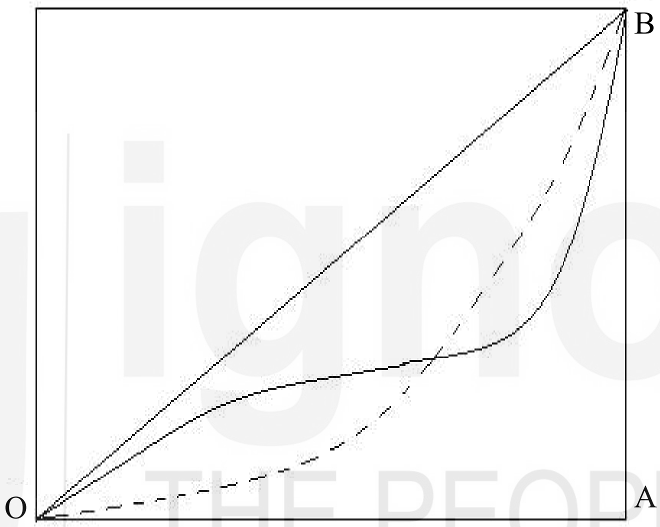
iii) $P_0 = Q_0 = 0; \ P_N = Q_N = 1$

iv) $P_i \geq Q_i, i = 1, 2, .., N-1$

एक लॉरेंज वक्र खींच कर, यह पता लगाया जा सकता है कि दिया हुआ बंटन समान है अथवा असमान। हमें अभी तक यह पता नहीं है कि दिया हुआ बंटन किस सीमा तक असमान है। जब हम दो या दो से अधिक लॉरेंज वक्र खींचते हैं तो असमानता के स्तरों के सापेक्ष वितरणों की तुलना करते हैं। समानता के विकर्ण के निकट वाला लॉरेंज वक्र असमानता के निचले स्तर को बताता है जबकि समानता के विकर्ण से दूर होता जाता लॉरेंज वक्र असमानता के बढ़ते हुए स्तर का प्रतीक है (चित्र 11.5)। लेकिन हमें अभी भी असमानता के स्तर के बारे में कोई जानकारी नहीं है। इस प्रकार की तुलना भी उसी दशा में संभव है जबकि दोनों वक्र एक-दूसरे को न तो काटते हों और न स्पर्श करते हों (चित्र 11.6)।




चित्र 11.5




चित्र 11.6

तथापि इस प्रकार की तुलना हेतु कुछ ऐसे मापों की व्युत्पन्न किया जा सकता है जो लॉरेंज वक्र पर आधारित हों। जब दो लॉरेंज वक्र आपस में एक-दूसरे को काट रहे हों तो बंटन को एकल वास्तविक संख्या में कम करना ही एक मात्र विकल्प है। इसलिए हम केवल ऐसे दो प्रस्तावों पर चर्चा करेंगे।

### 11.4.3 क्षेत्रफल पर आधारित एक माप

हमने देखा कि यदि लॉरेंज वक्र समानता के विकर्ण से बिल्कुल मिलता-जुलता है तो यह शून्य असमानता का प्रतीक है। यदि लॉरेंज वक्र वर्ग के दोनों किनारों का सम्पाती (coincides) है तो वह पूर्ण असमानता का द्योतक है। एक दूसरे को न काटने वाले लॉरेंज वक्रों के मामले में यह स्पष्ट है कि समानता विकर्ण के निकट वाला लॉरेंज वक्र समानता विकर्ण से दूर वाले लॉरेंज वक्र की तुलना में कम क्षेत्रफल घेरेगा। यह वैसी ही स्थिति है जैसी कि होनी चाहिए। इस प्रकार हम क्षेत्रफल OLB में OAB त्रिभुज के क्षेत्रफल से भाग देकर असमानता का माप ज्ञात कर सकते हैं क्योंकि त्रिभुज OAB का क्षेत्रफल समानता विकर्ण तथा लॉरेंज वक्र के बीच का अधिकतम संभव क्षेत्रफल है। चूँकि OAB का क्षेत्रफल वर्ग के क्षेत्रफल का (1/2) है, इसलिए असमानता का माप समानता विकर्ण तथा लॉरेंज वक्र के बीच के क्षेत्रफल का दुगना हो जाता है। दूसरे शब्दों में, संकेन्द्रण का लॉरेंज गुणांक (LCC) निम्नलिखित प्रकार हैं।

संकेन्द्रण का लॉरेंज गुणांक $LCC = \dfrac{OLB \text{ क्षेत्र फल}}{\Delta OAB \text{ क्षेत्र फल}} = 2\,OLB \text{ क्षेत्र फल}$

चूँकि यह गिनी गुणांक के ठीक बराबर है, इसलिए इसकी और अधिक व्याख्या नहीं की जा रही है।

### 11.4.4 लंबाई पर आधारित माप

इस माप को काकवानी द्वारा प्रस्तावित किया गया। लॉरेंज वक्र की लंबाई को $\ell$ द्वारा व्यक्त किया जाता है जो किसी भी दशा में $\sqrt{2}$ से कम नहीं हो सकती क्योंकि यह समानता रेखा की लम्बाई है जो $\sqrt{2}$ से अधिक नहीं हो सकती $OB = \sqrt{OA^2 + AB^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$ । न्यूनतम मान 0 तथा अधिक मान 1 के बीच माप ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित अभ्यास को प्रयुक्त किया जा सकता है।

| | न्यूनतम | वास्तविक | अधिकतम |
|---|---|---|---|
| वक्र की लंबाई | $\sqrt{2}$ | $\ell$ | 2 |
| वक्र की लंबाई – $\sqrt{2}$ | 0 | $\ell - \sqrt{2}$ | $2 - \sqrt{2}$ |
| वक्र की लंबाई – $\sqrt{2}$<br>अधिकतम लंबाई – $\sqrt{2}$ | 0 | $\ell - \sqrt{2}$<br>$2 - \sqrt{2}$ | 1 |

इस प्रकार से यह माप

$$LK = (\ell - \sqrt{2}) / (2 - \sqrt{2})$$

दोनों ही मामलों में वास्तविक ग्राफ खींचे जा सकते हैं तथा क्षेत्रफल और लंबाई का माप करके असमानता के स्तर हेतु सूचक की गणना की जा सकती है। जो लोग अधिक परिष्कृत (Sophisticated) अभ्यास करना चाहते हैं उन्हें सरल और सुगम फलनों का आकलन करना होगा।

**बोध प्रश्न 3**

1) लॉरेंज वक्र के अभिलक्षणों को बताइये।

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

2) दो बंटनों में असमानता की तुलना करने के लिए दो लॉरेंज वक्र कब असफल हो जाते हैं?

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

3) लॉरेंज व तथा गिनी गुणांक के बीच क्या संबंध है?

......................................................................................................................

......................................................................................................................

......................................................................................................................

......................................................................................................................

4) असमानता के लिए लॉरेंज वक्र पर आधारित काकवानी का माप क्या है?

......................................................................................................................

......................................................................................................................

......................................................................................................................

......................................................................................................................

## 11.5 आदर्शक माप (Normative Measures)

सामाजिक कल्याण फलन के विशिष्टीकरण द्वारा मानों (Values) के बारे में अनिवार्य रूप से निर्णय से युक्त मानों को आदर्शक माप कहा जाता है। इस प्रकृति का तर्क सबसे पहले लगभग नौ दशक पहले सन् 1920 में डाल्टन द्वारा असमानता के आदर्शक माप कहे जाने वाले मापों को विकसित करने हेतु दिया गया था।

कार्ल पियर्सन (1909) ने अपने एक अवलोकन में कहा था कि ''संपत्ति के वितरण में असमानता के माप के निर्धारण में अर्थशास्त्रियों के समक्ष उत्पन्न सांख्यिकीय समस्या किसी भौतिक अभिलक्षण के वितरण की असमानता के माप के निर्धारण में जीव विज्ञानियों के समक्ष उत्पन्न होने वाली समस्या की भाँति ही है।'' इस टिप्पणी पर प्रतिक्रिया व्यक्त करते हुए डाल्टन (1920) ने कहा कि ''अर्थशास्त्री वितरण के बारे में कुछ जानने में इतना इच्छुक नहीं है, जितना कि आय से व्युत्पन्न हो सकने वाले आर्थिक कल्याण के वितरण (और कुल धनराशि) पर वितरण के प्रभावों को जानने में'' उन्होंने आगे कहा कि आय की व्यापक असमानता के बारे में आपत्ति इसकी अनुपस्थिति में लोगों को प्राप्त हो सकने वाले संभव आर्थिक कल्याण की परिणामी हानि के कारण है।

अभी भी, यह समझ लिया जाना चाहिए कि असमानता को भले ही आर्थिक कल्याण के रूप में परिभाषित क्यों न किया जाता हो, इसका मापन आय के रूप में ही किया जा सकता है। डाल्टन के इस विचार के उत्तरवर्ती विद्वानों द्वारा अपना लिया गया। असमानता का आकलन करने के लिए सामाजिक कल्याण फलन के विचार को व्यक्त करते हुए **असमानता का आदर्शक** माप कालान्तर में लोकप्रिय हुआ।

यहाँ यह समझ लेना आवश्यक है कि असमानता के आदर्शक माप पर चर्चा तीन मुद्दों के चारों ओर ही घूमेगी :

1) किसी व्यक्ति की आय तथा उसके कल्याण के बीच संबंध;

2) वैयक्तिक आय-कल्याण फलनों के बीच संबंध; तथा

3) वैयक्तिक कल्याण तथा सामाजिक कल्याण के बीच संबंध।

यह भी जान लीजिए कि उपयोगिता वह शब्द है जो वैयक्तिक कल्याण हेतु प्रयुक्त किया गया है जबकि समाज के कल्याण हेतु सामाजिक उपयोगिता वाक्यांश को यदा-कदा ही प्रयुक्त किया गया हो।

इस संवर्ग में दो बड़े सूचक हैं : डाल्टन का निर्देशांक तथा एटकिन्सन का निर्देशांक। एटकिन्सन के निर्देशांक में ''समान रूप से वितरित तुल्य आय'' (Equally distributed equivalent income) के रूप में एक नवीन विचार पहली बार शामिल किया गया। यथार्थ में आदर्शक उपागम के भीतर दो उप-उपागम हैं। एक डाल्टन का तथा दूसरा एटकिन्सन का। डाल्टन के उपागम में जहाँ कुल आय को बराबर वितरित कर दिए जाने से प्राप्त को सकने वाले सामाजिक कल्याण की तुलना वर्तमान सामाजिक कल्याण से की जाती है। वही एटकिन्सन के उपागम में आय के वर्तमान स्तर की तुलना आय के बराबर-बराबर वितरित स्तरों, जो वर्तमान सामाजिक कल्याण सृजित कर सकते हैं, से की जाती है। सूचना सिद्धांत पर आधारित थील के निर्देशांक का सुझाव सूची को पूर्णता से भरने के लिए ही किया गया है।

### 11.5.1 डाल्टन निर्देशांक

डाल्टन इस मान्यता को लेकर चले कि आय में वृद्धि के साथ प्रत्येक व्यक्ति का सीमांत आर्थिक कल्याण कम होता जाता है। इसका अर्थ है कि आय-कल्याण फलन निम्नलिखित प्रकार का होता है।

$$U_i = U_i(x_i), i = 1, 2, ...N \tag{D.1}$$

( जहाँ $U_i$, $x_i$ आय प्राप्त करने वाले $i$ व्यक्ति का कल्याण है)

$U_i$ अवनतोदर (concave) है, यदि $(\partial U_i/x_i) > 0$ लेकिन $(\partial^2/x_i^2) < 0$ है। डाल्टन ने पुनः यह मान्यता ली कि विभिन्न व्यक्तियों के आर्थिक कल्याण का योग किया जा सकता है। इस प्रकार उसकी योजना में, सामाजिक कल्याण वैयक्तिक कल्याणों का एक सरल योगीकरण है। दूसरे शब्दों में सामाजिक कल्याण $W$ को निम्नलिखित प्रकार लिखा जा सकता है।

$$W = \sum_{i=1}^{N} U_i(x_i) \tag{D.2}$$

उसने आगे मान्यता ली की आर्थिक कल्याण से आय का संबंध समुदाय के सभी व्यक्तियों के लिए एक जैसा है। अर्थात्

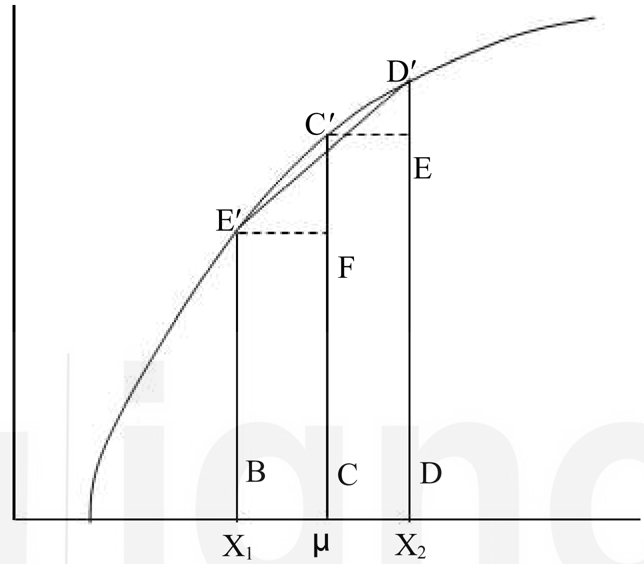
$$U_i = U(x_i), \text{i} = 1, 2, \ldots, N \tag{D.3}$$

तब संबंध (D.2) को निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है :

$$W = \sum_{i=1}^{N} U(x_i) \tag{D.4}$$

उपरोक्त समीकरण यह स्पष्ट करता है कि कल्याण में जिस किसी का भी लाभ होता हो, सामाजिक कल्याण का योग पूर्ववत् है। सामाजिक कल्याण के किसी दिए हुए स्तर के लिए, समाज के सदस्यों के बीच कल्याण का कोई भी वितरण अनुमन्य है। तथापि, स्मरण रहे कि व्यक्तिगत आयों का उनके कल्याण के साथ संबंध अवनतोदर ही है। इसलिए A से B की ओर आय का हस्तांतरण लेन-देन में शामिल दोनों व्यक्तियों के कल्याण में कोई अनुदर्शी (Symmetric) परिवर्तन नहीं लाएगा। सामाजिक कल्याण $W$ पर इसका प्रभाव पहले जैसा ही रहेगा।

चित्र 11.7 से, दो ऐसी परिस्थितियों की तुलना की जा सकती है, जिसमें, एक समान संबंध वाले दो व्यक्तियों की आय के दो अलग-अलग स्तर हैं, तथा उनकी आय समान (माध्य) है। हम यह भी जान सकते हैं कि व्यक्ति 1 (BB′) के कल्याण तथा दूसरे व्यक्ति 2 (DD′) के कल्याण का योग दोनों व्यक्तियों की आय समान होने पर उनके द्वारा भोगे जा रहे स्तर (CC′) के दुगने से कम होगा। यह आसानी से देखा जा सकता है कि दूसरे व्यक्ति द्वारा उठायी जा रही हानि (D′E) की क्षतिपूर्ति पहले व्यक्ति द्वारा प्राप्त होने वाले लाभ (C′F) से हो जाती है।




चित्र 11.7

उपरोक्त चित्र यह प्रदर्शित करता है कि, डाल्टन की मान्यताओं के तहत, सामाजिक कल्याण के दृष्टिकोण से कुल आय की एक दी हुई धनराशि के लिए एक असमान वितरण की तुलना में एकसमान वितरण को पसंद किया जाता है। यथार्थ में, कुल आय के एक दिए हुए स्तर के लिए, सभी आयों के एकसमान होने की दशा में समाज का आर्थिक कल्याण अधिकतम होगा। इसलिए किसी दिए हुए बंटन के लिए असमानता को निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित किया जा सकता है :

$$D_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N} U(\mu)}{\sum_{i=1}^{N} U(x_i)} = \frac{NU(\mu)}{\sum_{i=1}^{N} U(x_i)} \tag{D.7}$$

समान वितरण के लिए इसका मान इकाई के बराबर तथा असमान वितरण के लिए इकाई से अधिक है। इस तरह डाल्टन का निर्देशांक निम्नलिखित प्रकार का होगा

$$D_2 = \frac{NU(\mu)}{\sum_{i=1}^{N} U(x_i)} \tag{D.8}$$

जिसका मान स्पष्टता किसी समान वितरण के लिए शून्य है। यह कितना बड़ा हो सकता है? यह $U(0)$, $U(\mu)$ तथा $U(N\mu)$ के मानों पर निर्भर करेगा जबकि $N$ तथा $\mu$ दिए हुए हैं। यह कोई आवश्यक नहीं है कि यह मान इकाई के बराबर हो। इसीलिए बाद के विचारकों ने डाल्टन के निर्देशांक को निम्नलिखित रूप में परिभाषित करना पसंद किया, जो $D_2$ के तर्क को प्रतिलोम करके 1 से घटा देता है :

$$D = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N} U(x_i)}{NU(\mu)} = 1 - \frac{\bar{U}}{U(\mu)} \qquad \text{(D.9)}$$

ऐसा प्रतीत होता है कि निर्देशांक का वास्तविक मान (0,1) के बीच है। ऐसे अनेक वैध अवनतोदर फलन हैं, जहाँ यह सत्य नहीं होगा। उदाहरणार्थ, यदि $U(x_i) = \log$ हो तो D=1– $\{\log\hat{\mu} / \log\mu\}$ होगा। यदि $\hat{\mu} < \mu$ हो, तो $\mu$<1 होने की दशा में D का मान ऋणात्मक होगा। $x$ का मापन किसी इकाई में क्यों न किया जाए, $\mu$ का मान 1 से कम हो सकता है। $U(x_i)=1/x_i$ के मामले में भी ऐसा ही होगा।

तथापि अंकीय परिमाण प्राप्त करने के लिए, निर्देशांक को परिभाषित करना पर्याप्त नहीं है। डाल्टन (1920) ने इंगित किया कि असमानता को आर्थिक कल्याण के रूप में भले ही परिभाषित किया जाता हो, इसका मापन आय के रूप में ही किया जाना चाहिए। तब, असमानता का कोई विशिष्ट मान नहीं निकाल सकेगा। यह माने गए किसी विशिष्ट कार्यात्मक फलन पर ही निर्भर करेगा। उदाहरण के रूप में डाल्टन ने स्वयं भी ऐसे फलनों पर विचार किया। इनमें से पहला बरनौली प्राक्कल्पना से संबंधित है। यह बताता है कि आय में समानुपातिक वृद्धि (जीवन निर्वाह मान के लिए आवश्यक – निर्धनता रेखा से अधिक) व्यक्तिगत कल्याण में भी बराबर की वृद्धि कर देगी। अर्थात्

$$dU_i = \frac{dx_i}{x_i} \text{ और } U_i = \log x_i + c_i \qquad \text{(D.10)}$$

प्रत्येक व्यक्ति के एक जैसे कार्यात्मक संबंध की मान्यता के तहत, डाल्टन निर्देशांक का स्वरूप निम्नवत् होगा :

$$D = 1 - \frac{\log\hat{\mu} + c}{\log\mu + c} \qquad \text{(D.11)}$$

जहाँ $\hat{\mu}$ व्यक्तिगत आयों का गुणोत्तर माध्य है। डाल्टन द्वारा विचारित अन्य सूत्र निम्नलिखित प्रकार है :

$$dU_i = \frac{dx_i}{x_1^2} \text{ अथवा } U_i = c - \frac{1}{x_i} \qquad \text{(D.12)}$$

जहाँ कि $x \to \infty$ की स्थिति $C$ किसी व्यक्ति द्वारा प्राप्त अधिकतम कल्याण है। इस मामले में डाल्टन का निर्देशांक निम्न प्रकार हो जाता है :

$$D = 1 - \frac{c - (1/\tilde{\mu})}{C - (1/\mu)} \qquad \text{(D.13)}$$

जहाँ $\tilde{\mu}$ हरात्मक माध्य है।

### 11.5.2 एटकिन्सन निर्देशांक

एटकिन्सन (1970) ने डाल्टन के माप पर आपत्ति उठायी क्योंकि वैयक्तिक आय-कल्याण फलन के धनात्मक रेखीय रूपांतरण के सापेक्ष $D$ निश्चर (invarient) नहीं है। डाल्टन ने इस बात को स्वीकार तो किया था लेकिन वे इस समस्या का समाधान नहीं खोज सके।

एटकिन्सन ने इस निर्देशांक को इस प्रकार पुनर्परिभाषित करने का प्रयास किया कि माप कल्याण संख्याओं के अनुमन्य रूपांतरण के सापेक्ष निश्चर (invariant) होगा। एटकिन्सन ने

'समान' रूप से वितरित समतुल्य आय द्वारा इसे प्राप्त किया। मूल एवं नवीन, दोनों ही वितरण कल्याण के एक जैसे स्तर को व्यक्त करते हैं।

अवधारणा को और अधिक स्पष्ट करने के लिए हम वास्तविक वितरण के साथ कुछ नए शिल्प तथ्य (artifacts) रखते हैं। पहले हमें यह देखना है कि किसी दिए हुए वास्तविक रूप से वितरित आय वेक्टर $x_i, i = 1,2\ldots,N$ (कहने को वेक्टर a), के लिए $\mu$ के बराबर प्रत्येक तत्व के साथ समान रूप से वितरित केवल एक आय वेक्टर है (कहने को वेक्टर b) लेकिन समतुल्य रूप से वितरित अनेक वेक्टर (कहने को वेक्टर c) हैं। चार्ट-1 देखें। समतुल्य आय वितरण एक है, जिसमें कल्याण का स्तर वही है जो दिए हुए चालू वितरण का है। हालाँकि, इन समतुल्य वितरणों (वेक्टर c) में से एक बराबर है। इसे समान रूप से वितरित समतुल्य आय वेक्टर कहा जाता है, और उसको चार्ट-1 में वेक्टर-D के रूप में दिखाया गया है। चूँकि $\mu$ वर्तमान बंटन का माध्य स्तर है, $\mu*$ का समतुल्य रूप से आय के समान वितरण को प्रदर्शित करने के लिए प्रयुक्त किया जा सकता है।

**चार्ट-1**

| | |
|---|---|
| वेक्टर (a) वास्तविक रूप से वितरित आय वेक्टर | $x_{1,}\ \ x_2\ \ {}_{\ldots,}\ \ x_{i,}\ {}_{\ldots,}\ \ x_{N.}$ |
| वेक्टर (b) समान रूप से वितरित आय वेक्टर | $\mu,\ \ \mu,\ \ \ldots, \mu,\ \ldots,\ \mu.$ |
| वेक्टर (c) समतुल्य रूप से वितरित आय वेक्टर | $x^*_{1,}\ \ x^*_2\ {}_{\ldots,}\ \ x^*_{1,}\ {}_{\ldots,}\ \ x^*_{N.}$ |
| वेक्टर (d) समान रूप से वितरित समतुल्य आय वेक्टर | $\mu^*,\ \ \mu^*,\ \ldots,\ \ \mu^*,\ \ \ldots, \mu^*$ |

यह स्पष्ट है कि तब $W_h \geq W_a = W_c$ और $W_c = W_d$ तब, $W_a = W_d$ जहाँ $W$ आय वेक्टरों के सुसंगत वितरणों के सामाजिक कल्याण हैं। यह स्पष्ट है कि $\mu \geq \mu^*$ जहाँ $\mu^*$ को समरूपी व्यक्तिगत उपयोगिता फलनों से युक्त वृद्धिकारी सामाजिक कल्याण फलन के रूप में परिभाषित किया जाता है।

$$U(\mu) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} U(x_i) \qquad \text{(A.1)}$$

अथवा समतुल्य रूप से

$$\mu^* = U^{-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} U(x_i)\right] \qquad \text{(A.2)}$$

तब एटकिन्स के कारण निर्देशांक को वास्तविक माध्य आय से समतुल्य माध्य आय के अनुपात के वृद्धिकारी प्रतिलोम के रूप में परिभाषित किया जाता है।

$$A = 1 - \frac{\mu^*}{\mu} \qquad \text{(A.3)}$$

इसका मान शून्य (पूर्ण समानता) तथा 1 पूर्ण असमानता के बीच स्थित होता है। हम देख सकते हैं कि A.3 उस समय तक शून्य नहीं हो सकता जब तक कि $\mu^*$ न हो, जो $\mu$>0 के साथ किसी वितरण के लिए असंभव है। यदि असमानता को ऐसी स्थिति के रूप में परिभाषित किया जाए, जहाँ सभी आय किसी व्यक्ति द्वारा हड़प ली जाती हो, तो हम देखेंगे कि

$$A = 1 - \frac{\mu_m^*}{\mu} \qquad \text{(A.4)}$$

जहाँ 

$$NU(\mu^*) = \sum_{i=1}^{N} U(x_i)$$

और

$$NU(\mu^*_m) = (N-1)U(0) + U(N\mu).$$

यह निर्देशांक उस समय तक पैमाना स्वतंत्र नहीं हो सकता जब तक कि $U$ संबंध पर कोई प्रतिबंध नहीं लगाता। यदि इस आवश्यकता को पूरा करना है, तो एटकिन्सन के अनुसार, हमारे सूत्र का स्वरूप निम्नलिखित प्रकार का होना चाहिए।

$$U(x_i) = \begin{cases} \alpha + \dfrac{\beta}{1-\varepsilon} x_i^{1-\varepsilon}, & \varepsilon \neq 1 \\ \log_e x_i, & \varepsilon = 1 \end{cases} \qquad \text{(A.5)}$$

ध्यान रहे हमें अवनतोदर की स्थिति प्राप्त करने के लिए $\epsilon \geq 0$ तथा सुनिश्चित अवनतोदर सुनिश्चित करने के लिए $\epsilon > 0$ होने की आवश्यकता है। यह होमोथेटिक (Homothetic) फलन है तथा $\epsilon = 0$ के लिए एक रेखीय फलन है। हम यह भी जान सकते हैं कि $\epsilon$ का मान 1 से अधिक नहीं हो सकता है। उस मामले में विभिन्न संघटक सार्वभौमिक संबंध धारण कर लेते हैं। प्रायः $\alpha$ ऋणात्मक होता है ताकि $x_i = 0$ के लिए $U(x_i)$ धनात्मक न हो। अन्यथा, जब $x_i = 0$ हो तथा $U_i = \alpha$ जिसका अर्थ यह है कि आय शून्य होने पर भी कल्याण धनात्मक होता है। सामान्यतौर पर यह स्वीकार्य नहीं है। इसके विपरीत, ऋणात्मक $\alpha$ अधिक स्वीकार्य होगा। चूँकि $\epsilon$ शून्य भी हो सकता है, एटकिन्सन की आवश्यकता कठोर रूप से अवनतोदर होने की रही है। सेन (1973) ने एक प्रश्न उठाया। उन्होंने (0,10) तथा (5,5) के दो वितरणों पर विचार करने के लिए कहा, बशर्ते कि :

$$U(x_i) = \alpha + \beta(x_i) \qquad \text{(A.6)}$$

तब उन्होंने बताया कि सामाजिक कल्याण फलन का स्तर $(2\alpha + 10\beta)$ होना चाहिए, वितरण चाहे जो भी क्यों न हो। दोनों ही मामलों में $\mu^*$ 5 होगा, जबकि $\mu$ तो 5 है ही। उस अवस्था में असमानता $A$ का मान शून्य होगा। इसलिए, आदर्श रूप में दोनों ही वितरण एक जैसे हैं। स्पष्ट रूप से यह व्यर्थ की बात है। इसलिए (A.5) संबंध को $\epsilon > 0$ प्रतिबंध के साथ परिभाषित किया जा सकता है। हमें यह भी जान लेना चाहिए कि (A.4) सम-लोचपूर्ण सीमान्त उपयोगिता फलन है।

$\epsilon$ असमानता-निवारण (inequality-aversion) प्राचल है और जोखिम-निवारण (risk-aversion) से मिलता-जुलता है। औपचारिक रूप से एटकिन्सन ने जोखिम मापन की समस्या के साथ समानान्तर रूप से विचार करने का प्रस्ताव किया। उन्होंने पाया कि समान रूप से वितरित समतुल्य आय की उनकी अवधारणा अनिश्चितता के तहत् निर्णयन के सिद्धांत में प्रयुक्त की जाने वाली जोखिम-प्रीमियम अथवा सुनिश्चित समतुल्य आय से निकट रूप से मिलती-जुलती है।

यदि समाज कल्याण को असमानता आय A के रूप में व्यक्त करने के लिए व्यक्तिगत कल्याणों के सरल योगीकरण के साथ प्रतिबंधात्मक वैयाक्तिक आय कल्याण फलन को लागू करना चाहते हैं तो हमें निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होगा :

$$A = 1 - \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{x_i}{\mu} \right)^{1-\varepsilon} \right]^{1/(1-\varepsilon)} \quad , \varepsilon \neq 1 \qquad \text{(A.7)}$$

अब प्रश्न $\epsilon$ को पसन्द करने तक सीमित हो गया है। जैसे-जैसे $\epsilon$ में वृद्धि होती है वैसे-वैसे हस्तांतरण में वितरण के निचले सिरे को ऊपर के सिरे की तुलना में अधिक भार दिया जाने लगता है। जब $\epsilon$ बढ़ता है, तो (A.7) $\min_i (x_i)$ फलन धारण कर लेता है जो हस्तांतरण के बहुत निचले आय समूह पर ही विचार करता है। (और इसीलिए कठोरतम रूप से अवनतोदर नहीं है) $\epsilon = 0$ होने पर $U_i$ रेखीय है। इसके परिणामस्वरूप $A$ सदैव शून्य होता है। इसका अर्थ यह हुआ कि $A$ में कुल मिलाकर कोई वर्णनात्मक विषयवस्तु नहीं है। जब $\epsilon \to 1$, $A$ का स्वरूप निम्नलिखित प्रकार का हो जाता है :

$$A = 1 - \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i}{\mu}\right)^{1/N} = 1 - \frac{\hat{\mu}}{\mu} \tag{A.8}$$

यह चेम्परनाउने निर्देशांक (CII.1) की ही तरह इसमें $\epsilon$ का मान 0 तथा 1 के बीच स्थित है। यह व्यंजक कोई बहुत अधिक स्पष्ट नहीं है। प्राचल $\epsilon$ को प्रायः 1/2 या 1/3 या 2/3 के रूप में चुना जाता है।

### 11.5.3 सेन निर्देशांक

ऐसे भी लोग हैं जो दमदार तरीके से यह सोचते हैं कि व्यक्तियों के कल्याण का सामाजिक मूल्यांकन गंभीर रूप से उनके पड़ोसियों की आय पर भी निर्भर करता है। तब, समाज को केवल उनके व्यक्तिगत कल्याण का ही योग क्यों करना चाहिए? सभी व्यक्तियों के लिए केवल एक कल्याण फलन की मान्यता पर भी प्रश्न चिन्ह लगाया जा सकता है। यदि ऐसा किया जाता है, तो निम्नलिखित प्रकार वृहद् सामाजिक कल्याण फलन प्रयुक्त किया जाना चाहिए।

$$W = W(x_i, x_2, \ldots, x_N) \tag{S.1}$$

सरल रूप में यह सममितीय (symmetric) अर्द्ध अवनतोदर तथा व्यक्तिगत आय के बढ़ते हुए स्तरों से युक्त है। तब, असमानता के आदर्शक माप का एक अधिक सामान्य स्वरूप ''सामान्यीकृत समान रूप से वितरित समतुल्य आय'' (Generalized equally distributed equivalent income) की अवधारणा को प्रतिपादित करके परिभाषित किया जा सकता है। स्पष्ट है कि यह प्रतिव्यक्ति आय $x^*$ का एक स्तर है जो यदि सभी व्यक्तियों से बंटित है, तो इसमें $W$ का वही स्तर सृजित होगा जो वर्तमान वास्तविक वितरण का है। अर्थात्

$$x^* = x \,|\, W(x^*, x^*, .., x^*) = W(x_1 x_2, \ldots, x_N) \tag{S.2}$$

यह मानते हुए कि (S.1) अर्द्ध अवनतोदार है, आपके प्रत्येक वितरण के लिए $x^* \leq \mu$ । उस दशा में निर्देशांक $S$ निम्नलिखित प्रकार का होगा।

$$S = 1 - \frac{x^*}{\mu} \tag{S.3}$$

जो $A$ का सामान्यीकृत स्वरूप ही है। यदि किसी उपयोगितावादी ढाँचे को प्रयुक्त किया जाता है, तो $A$ तथा $S$ पूरी तरह से ऐसे हो जाते हैं कि उनमें अंतर कर पाना कठिन हो जाता है।

यह समझ लिया जाना चाहिए कि ये माप स्पष्ट रूप से यह सुझाव देते हैं कि जहाँ तक कल्याण में वृद्धि करने का प्रश्न है तो संवृद्धि के समतुल्य एक पुनर्वितरण मौजूद है।

### 11.5.4 उत्क्रम-माप का थील निर्देशांक (Theil Entropy Index)

थील ने (1967) एक प्रश्न उठाया : क्या सूचना सिद्धांत N व्यक्तियों के बीच आय असमानता के नैसर्गिक माप, जो आय बंटन पर आधारित है, से युक्त कोई, सिद्धांत प्रदान करता है? उसने स्वयं ही उत्तर दिया कि हाँ। इसे संक्षिप्त रूप में निम्नलिखित प्रकार प्रस्तुत किया गया है।

हम व्यक्तिगत i के आय भाग के साथ प्रारंभ करते हैं :

$$q_i = \frac{x_i}{N_\mu} > o \quad \text{जबकि} \sum_{i=1}^{N} q_i = 1 \tag{T.1}$$

जब $x_i = \mu, i = 1, 2, \ldots, N$, अर्थात् जब वितरण समान है तो

$$q_i = \frac{1}{N} \quad i = 1,\ 2, \ldots N \tag{T.2}$$

जब कुछ $x_i = N\mu$ तथा $x_j = 0, j \neq i,$ तो यह पूर्ण असमानता की स्थिति है। इसका अर्थ हुआ कि कुछ $i$ के लिए $q_i = 1$ तथा $q_j = 0,\ i \neq j$

सूचना सिद्धांत में प्रायिकता $p_i$ के उत्क्रम-माप (entropy) को परिभाषित करने का एक तरीका निम्नलिखित प्रकार है :

$$H = \sum_{i=1}^{N} p_{i.} \log \frac{1}{P_i.} \tag{T.2a}$$

प्रायिकताओं को अंशों (shares) से प्रतिस्थापित करने पर

$$H = \sum_{i=1}^{N} q_{i.} \log \frac{1}{q_i.} \text{ हो जाता है।} \tag{T.3}$$

इसे समानता के माप के रूप में लिया जा सकता है। पूर्ण समानता की स्थिति में हम देखते हैं कि $H$ का मान $\log N$ के मान के बराबर हो जाता है। जबकि पूर्ण असमानता की स्थिति में $H$ का मान शून्य है। इस प्रकार अब थील निर्देशांक $T$ को निम्नलिखित प्रकार परिभाषित किया जा सकता है।

$$\begin{aligned} T &= \log N \sum_{i=1}^{N} q_{i.} \log \frac{1}{q_i.} \\ &= \sum_{i=1}^{N} q_i \log N - \sum_{i=1}^{N} q_{i.} \log \frac{1}{q_i} \\ &= \sum_{i=1}^{N} q_i \log N.q_i \end{aligned} \tag{T.4}$$

यह माप सूचना सिद्धांत में entropy के विचार से प्रेरित है। लेकिन पारम्परिक आदर्शक ढाँचे में भी इसका निर्वचन किया जा सकता है।

$$U_i = q_i \log \frac{1}{q_i} \tag{T.5}$$

तथा

$$W = \sum_{i=1}^{N} U_i(q_i). \tag{T.6}$$

हमें समझ लेना चाहिए कि (T.5), $N$ तथा $U$ के साथ-साथ $x_i$ तथा $\mu$ पर निर्भर करता है अर्थात् $x_i$ के सापेक्ष अवनतोदर (concave) हैं।

$T$ की निचली सीमा जहाँ शून्य है, वहीं व्यक्तियों की संख्या में वृद्धि होने के साथ ही इसकी उच्चतम सीमा $\log N$ हो जाती है।

अनेक व्यक्तियों के लिए यह आपत्तिजनक है। तथापि थील ने इसका बचाव किया। जब 2 करोड़ व्यक्तियों वाले समाज में समस्त आय को किसी एक व्यक्ति द्वारा हड़प लिए जाने तथा दो व्यक्तियों वाले समाज में समस्त आय को एक व्यक्ति द्वारा हड़प लिए जाने की स्थिति में असमानता का स्तर एक जैसा नहीं हो सकता। पहला मामला एक ऐसी स्थिति के समतुल्य है जिसमें 2 करोड़ लोगों में से एक करोड़ लोगों के पास कुछ भी न हो तथा दूसरे एक करोड़ लोगों की आय एकसमान हो। दो व्यक्तियों के समाज में अधिकतम मान $\log 2$, है तथा दो करोड़ व्यक्तियों वाले समाज के लिए अधिकतम मान $7 \log 2$ है। कतिपय शोधकर्ता अभी भी इस बात पर जोर देते हैं कि $\log N$ से भाग देकर इस माप का सामान्यीकरण किया जा सकता है।

### 11.5.5 काकवानी निर्देशांक

A.2 से हमें पता चलता है कि

$$M^* = \mu\,(1–A) \tag{K.1}$$

इसमें अंतर्निहित सामाजिक कल्याण फलन $i$ निम्नलिखित प्रकार है :

$$W – NU\,(\mu^*) + NU\,\{\mu(1–A)\} \tag{K.2}$$

जो $\mu$ का एक बढ़ता हुआ फलन तथा A का घटता हुआ फलन है। इन्हीं अभिलक्षणों से युक्त कोई अन्य फलन निम्नलिखित प्रकार का भी हो सकता है :

जहाँ K काकवानी के कारण असमानता का माप है। योगीकरण सामाजिक कल्याण फलन के तहत $\mu^* = \dfrac{\mu}{1+K}$

और इसलिए $K = \dfrac{\mu}{\mu^*} - 1$

जो असमानता के सापेक्ष माध्य आय के प्रति संवेदनशील होने के सिवाय प्रत्येक दृष्टि से A की ही तरह है।

**बोध प्रश्न 4**

1) डाल्टन के अनुसार सामाजिक कल्याण फलन क्या है?

......................................................................................................

......................................................................................................

2) डाल्टन के असमानता निर्देशांक की विवेचना कीजिए।

......................................................................................................

......................................................................................................

......................................................................................................

3) एटकिन्सन निर्देशांक के पीछे क्या तर्क है?

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

4) सेन का निर्देशांक किस प्रकार एटकिन्सन के निर्देशांक से अलग प्रकार है?

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

5) थील के असमान के (entropy) निर्देशांक की विवेचना कीजिए।

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

## 11.6 सारांश

निर्धनता एवं संवृद्धि दोनों पर ही आर्थिक असमानता के प्रतिकूल प्रभावों के चलते, असमानता में कमी लाना सार्वजनिक नीति की प्राथमिकता हो गयी है। असमानता के विभिन्न मापों को दो संवर्गों में रखा जा सकता है। सकारात्मक या विशुद्ध तथा आदर्शक माप। विशुद्ध माप मूल निर्णयन के बिना आय की असमानता का माप करते हैं। इन मापों में विस्तार, चतुर्थक विस्तार, प्रमाप विचलन, गिनी अनुपात आदि शामिल हैं। लॉरेंज वक्र को भी इसी संवर्ग में रखा जाता है। यह दो वितरणों की तुलना में असमानता की सीमा का माप करता है। सामाजिक कल्याण के बारे में मूल्य निर्णयन से युक्त मापों को आदर्शक माप कहा जाता है। इसमें डाल्टन, एटकिन्सन, सेन तथा थील द्वारा प्रतिपादित निर्देशांकों को शामिल किया जाता है।

आर्थिक असमानता के मापन के वांछित अभिलक्षणों के लिए सरल समझ (Comprehension) तथा सरल गणना, सूचना की विविधता तथा परिमाण की आवश्यकता होती है। किसी निर्देशांक की प्रभावकारिता के मूल्यांकन के लिए अनेक स्वयं सिद्धियों (axioms) निर्धारित की गई हैं। इन्हें परिशिष्ट में रखा गया है।

## 11.7 शब्दावली

**माध्य अंतर गुणांक (Co-efficient of Mean Difference)** : जोड़ेवार सभी अंतरों के माध्य में अंतरों के माध्य से भाग देने पर प्राप्त भागफल को माध्य अंतर गुणांक कहते हैं।

**अपकिरण (Dispersion)** : इस तथ्य को कि किसी चर के सभी मान एक जैसे नहीं होते को अपकिरण कहा जाता है। बंटन के फैलाव या छितराव का मापन अपकिरण के माप द्वारा किया जाता है।

**परम विषमता अनुपात (Extreme Disparity Ratio) :** सबसे कम मान से सबसे अधिक मान का अनुपात परम विषमता अनुपात कहलाता है।

**असमानता का आदर्श माप (Normative Measures of Inequality) :** सामाजिक कल्याण फलन या सामाजिक कल्याण विचारों को बहिर्जात रूप से शामिल करके विकसित किए गए मापों को असमानता के आदर्शक माप के रूप में जाना जाता है।

**असमानता के प्रत्यक्ष माप (Positive Measures of Inequality) :** वितरण के सांख्यिकीय अभिलक्षणों पर आधारित असमानता के मापों को असमानता के प्रत्यक्ष या विशुद्ध माप कहा जाता है।

**सापेक्षिक प्रमान विचलन (Relative Standard Deviation) :** किसी बंटन के प्रमाप विचलन में उसके माध्य से भाग देने पर प्राप्त भागफल को सापेक्षिक प्रमाप विचलन कहा जाता है।

**प्रमाप लघुगुणक विचलन (Standard Logarithmic Deviation) :** किसी बंटन के मानों के लघुगुणकों का प्रमाप विचलन है। तार्किक दृष्टि से लघुगुणक मानों का विचलन गुणोत्तर माध्य के लघुगुणक से लिया जाना चाहिए लेकिन प्रायः वे अंकगणितीय माध्य (समान्तर माध्य) से लिए जाते हैं। इसलिए इसके दो स्वरूप हैं।

**सामाजिक कल्याण फलन (Social Welfare Function) :** यह सामाजिक खुशहाली का एक निर्देशांक है, जिसे श्रम विन्यास (disposition) के बिना, या मामलों को संभाव्य स्थिति की व्यक्तिगत रैकिंग के बिना व्यक्तिगत आयों या व्यक्तिगत उपभोग डलियाओं (Baskets) के फलनों के रूप में तैयार किया जाता है।

## 11.8 अभ्यास

1) जनवरी से जून 2004 के बीच राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण के 60वें चक्र से ग्रामीण भारत में प्रति व्यक्ति मासिक व्यय का निम्नलिखित वितरण लिया गया है।

| वर्ग | 50-225 | 225-255 | 255-300 | 300-340 | 340-380 | 380-420 | 420-470 | 470-525 | 525-615 | 615-755 | 755-950 | 950-1200 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| औसत व्यय | 100 | 240 | 280 | 325 | 365 | 405 | 450 | 500 | 580 | 700 | 850 | 1100 |
| व्यक्तियों का प्रतिशत | 2.4 | 2.7 | 6.4 | 8.3 | 9.6 | 9.6 | 10.8 | 10.0 | 12.2 | 12.6 | 6.7 | 8.8 |

इसके सभी संभावित प्रत्यक्ष मापों की गणना कीजिए।

2) कृषि गणना 1976–77 से क्रियात्मक जोतों का वितरण निम्नलिखित प्रकार है :

| | जोत | सीमान्त | लघु | अर्ध-मध्यम | मध्यम | वृहद | कुल |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| परिभाषा | Unit | 0.0-1.0 Ha | 1.0-2.0 Ha | 2.0-4.0 Ha | 4.0-10.0 Ha | 10.0 Ha | Above |
| संख्या | ’000 | 44523 | 14728 | 11666 | 8212 | 2440 | 81569 |
| क्षेत्र | ’000 Ha | 17509 | 20905 | 32428 | 49628 | 42673 | 163343 |

लॉरेंज वक्र खींचिए तथा गिनी अनुपात की गणना कीजिए।

## 11.9 कुछ उपयोगी पुस्तकें


Chaubey, P. K. (2004), *Inequality: Issues and Indices*, Kanishka Publishers, Distributors, Delhi.

Cowell, Frank A. (1995), *Measuring Inequality*, Prentice Hall/Harvester Wheatsheaf, London;

Sen, A.K. (1997) *On Economic Inequality*, Oxford University Press, Oxford. (with Annexe by James E. Foster.


## 11.10 बोध प्रश्नों के उत्तर या संकेत

1) किसी बंटन के उच्चतम तथा न्यूनतम मान के बीच अंतर ही विस्तार है। अपकिरण के इस माप पर आधारित असमानता निर्देशांक को इकाई स्वतंत्र और/या उन्हें (0,1) के बीच तक सीमित कर देने को सुनिश्चित करने के लिए इनके सरलीकरण की विधियों को प्रयुक्त किया जा सकता है। उपभाग 11.2.1 देखें।

2) सापेक्षिक विस्तार में केवल परम मानों पर ही विचार किया जाता है, जो बंटन के प्रतिनिधि नहीं हो सकते। यह निर्धनों (जोकि कुछ ही हो सकते हैं की तुलना धनवानों जो कोई एक ही हो सकता है) से करने जैसा है। अंतर-चतुर्थक माप 50 प्रतिशत प्रायकों (recipients) के साथ मध्य के बंटन पर विचार करता है।

3) माध्य विचलन में सभी मानों पर विचार किया जाता है। निरपेक्ष विचलन के माध्य में बंटन के माध्य से भाग दिया जाता है ताकि सापेक्षिक माध्य विचलन निकाला जा सके। उपभाग 11.2.3 देखें। चूँकि माध्य के एक ओर के विचलनों के योग आय के हस्तांतरण के फलस्वरूप कोई परिवर्तन नहीं होता, इसलिए निर्देशांक के परिमाण (आकार) में भी कोई परिवर्तन नहीं होता।

4) उपभाग 11.2.4 देखें। एक स्वरूप में विचलन गुणोत्तर माध्य से लिए जाते हैं जबकि दूसरे में समान्तर माध्य से। कुछ गणितीय परिवर्तनों से देखा जा सकता है कि पहला गुणोत्तर माध्य तथा समान्तर माध्य के लघु गुणकों के बीच के अंतर के वर्ग से दूसरे से अधिक है।

5) यह इस तथ्य का प्रत्यक्ष अनुप्रयोग है कि किसी वितरण का गुणोत्तर माध्य इसी वितरण के समान्तर माध्य से कम होता है। हाँ, जब मान इकाई से अधिक हो।

6) प्रत्येक प्रापक के भागों, जो प्रापकों की संख्या के साथ बदलते रहते हैं, के वर्गों का योग ही हरफिण्डाल निर्देशांक है। दो प्रापकों के बीच भागों के समान वितरण की स्थिति में हरफिण्डाल निर्देशांक का मान 0.5 तथा तीन व्यक्तियों के बीच इसका मान 0.3383 आएगा। इसीलिए इसे संकेन्द्रण के माप हेतु अधिकाधिक प्रयुक्त किया जाता है।

7) संदेश स्पष्ट है कि कोई अपनी नई विधि के लिए भी प्रयास कर सकता है। दूसरे भाग का उत्तर 5/9 है।

**बोध प्रश्न 2**

1) सभी जोड़ों के बीच औसत मानों के निरपेक्ष अंतर में इसके समान्तर माध्य से भाग देने पर प्राप्त भागफल का आधा गिनी अनुपात होता है।

2) बुनियादी अंतर यह है कि गिनी गुणांक की गणना में सभी अंतरों पर विचार किया जाता है, जबकि अन्यों में या तो कुछ ही अंतरों पर विचार किया जाता है या समान्तर/गुणोत्तर माध्य से विचलन पर विचार किया जाता है।

3) उपभाग 11.3.2 देखें।

4) किसी सारणी में लिखते हुए प्रत्येक वर्ग के वर्ग अंतरालों या मानों, आवृत्तियों, वर्ग के कुल मानों, संचयी आवृत्तियों, संचयी कुल मानों, संचयी भागों तथा संचयी अनुपातों को स्तंभों में लिखा जाता है। व्यंजक (L.G.5) के प्रयोग हेतु अनुपातों के लगातार चल अंतरों (या योगों) एवं लगातार, चल योगों (या अंतरों) की गणना दो अलग-अलग स्तंभों में की जाती है।

**बोध प्रश्न 3**

1) चित्र 11.4 एवं उपभाग 11.4.2 देखें तथा अभिलक्षणों को लिखें।

2) जब दो लॉरेंज वक्र एक-दूसरे को काटते हैं तो यह स्पष्ट कर पाना संभव नहीं हो पाता कि कौन-सा वितरण अधिक असमान है। वितरण 1 तथा उसके प्रतिपक्षी वितरण 2 के बीच तुलना में एक भाग में यह अधिक असमान जबकि दूसरे में कम असमान होगा।

3) गिनी गुणांक का मान समानता रेखा तथा लॉरेंज वक्र के बीच के क्षेत्रफल के दुगने के बराबर होता है।

4) काकवानी का असमानता माप लॉरेंज वक्र की लंबाई का प्रसामान्यीकरण है।

**बोध प्रश्न 4**

1) समाज के विभिन्न व्यक्तियों के वैयक्तिक कल्याण फलनों (उपयोगिताओं) का सरल योग डाल्टन का सामाजिक कल्याण फलन है। इसके अतिरिक्त यह मान लिया जाता है कि सभी व्यक्तियों का उपयोगिता फलन एक जैसा है।

2) उपभाग 11.5.1 डाल्टन के प्रस्ताव तथा इसके आधुनिक स्वरूप को लिखिए। यह भी बताइए कि यद्यपि इसकी संरचना उपयोगिता के रूप में की गयी थी, तथापि डाल्टन ने यह स्पष्ट किया था कि इस निर्देशांक का माप केवल आय के रूप में किया जाना चाहिए।

3) असमानता के माप वैयक्तिक उपयोगिता फलन के रेखीय रूपांतरण के साथ परिवर्तित नहीं होता। चूँकि डाल्टन के निर्देशांक में इस अभिलक्षण पर विचार नहीं किया जाता, इसलिए एटकिन्सन ने इस पर विचार नहीं किया। इसलिए उसने नए शिल्प-तथ्य के रूप में समान रूप से वितरित समतुल्य आय को अभिकल्पित किया तथा सम-लोच सीमान्त उपयोगिता फलन नामक एक नए उपयोगिता फलन का सुझाव दिया।

4) सेन का निर्देशांक एटकिन्सन के निर्देशांक से एक मामले में भिन्न है, वह यह कि उन्होंने एक ऐसे सामाजिक कल्याण फलन का चयन किया जिसमें व्यक्तिगत आय समयित और अर्द्ध अवनतोदर है। उपभाग 11.5.3 देखें।

5) उपभाग 11.5.4 देखें।

# परिशिष्ट 11.1

## असमानता मापों की स्वयंसिद्धियाँ

किसी भी सांख्यिकीय माप के लिए उच्चस्तरीय पाठ्यपुस्तकों में जिन वांछित अभिलक्षणों का उल्लेख है वे हैं (i) परिज्ञान (comprehension) की सरलता, (ii) आगणन की सरलता, (iii) विचलन का विस्तार, एवं (iv) वांछित सूचना का परिमाण। तथापि, हम केवल उन्हीं अभिलक्षणों की चर्चा करेंगे, जो आर्थिक असमानता के मापों के प्रति विशिष्ट है।

हमारा सामना प्रायः ऐसी परिस्थितियों से होता है जब हम असमानता के उनके स्तर के संदर्भ में किसी निर्देशांक की सहायता से दो बंटनों की तुलना करते हैं। दो बंटन किसी समय बिंदु पर किन्हीं दो देशों, किसी एक ही देश में दो समय बिंदुओं, या दो परिस्थितियों जैसे कि एक कर पूर्व तथा दूसरा करपश्च अंतर वैयक्तिक अंतरण आदि।

किसी असमानता निर्देशांक की प्रभावकारिता का मूल्यांकन करने के लिए लोगों ने अंतर्दशी दृष्टि (intritively) से महत्त्वपूर्ण अभिलक्षणों का निर्धारण किया है। ऐसे लक्षणों के एक समुच्चय को डाल्टन ने ''सिद्धांतों के रूप में प्रयुक्त किया है। आज के साहित्य में उन्हें स्वयंसिद्धियों (Axioms) के रूप में जाना जाता है। यहाँ कतिपय आम स्वयंसिद्धियों पर चर्चा की जा रही है। यहाँ यह भली-भाँति समझ लिया जाना चाहिए कि ये स्वयंसिद्धियाँ पूरी तरह से इस प्रश्न की उपेक्षा करती हैं कि किसी साधन सम्मन समाज या निर्धन समाज में असमानता क्या कोई मुद्दा है? पूरी चर्चा में यह मान कर चला जाएगा कि सभी आय धनात्मक हैं, भले ही हम यह जानते हैं कि व्यवसाय में असफलता या फसल नष्ट हो जाने पर आय ऋणात्मक अथवा शून्य भी हो सकती है।

### 1) पैमाने की स्वतंत्रता की स्वयंसिद्धि

यदि $N$ जैसे समान आकार के दो वितरण इस प्रकार के हों कि एक वितरण का प्रत्येक तत्व दूसरे वितरण के संग तत्व का गुणांक $\theta$ हो अर्थात्

$$x_1^2 = \theta x_1^1 \qquad i = 1,2,\ldots,N,$$

तब दोनों ही वितरणों में समानताओं का अंकीय परिमाण समान होना चाहिए अर्थात्

$$I(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_N^1) = I(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_N^2)$$

जहाँ कि असमानता माप $I$ को वितरण के एक फलन के रूप में दर्शाया गया है।

$$(x_1, x_{2,}, \ldots, x_N).$$

स्पष्टतया यह इस शर्त को भी संतुष्ट करता है कि पैमाने के माप में परिवर्तन के साथ असमानता के स्तर में परिवर्तन नहीं होना चाहिए जैसे कि रुपए से पैसे या बुशेल्स से कुन्तल।

इसका अर्थ तो यह भी है कि सभी आयों में समानुपातिक परिवर्तन से भी असमानता के स्तर में कोई परिवर्तन नहीं आएगा।

$$x_i(1+\lambda) = \theta x_{\mathrm{i}} \qquad i = 1,2,\ldots,N,$$

आनुपातिक परिवर्तन ऋणात्मक भी हो सकता है। इस प्रकार यह केक में हिस्से का प्रश्न है, न कि केक के आकार का। यह पूरी तरह से स्पष्ट है कि असमानता के माप को हिस्सों, $x_i$ के रूप में मापा जाता है क्योंकि सभी आयों में आनुपातिक परिवर्तन से हिस्सों में कोई परिवर्तन नहीं होता है। उदाहरणार्थ यदि 100 परिवारों के किसी वितरण में समूह की कुल आय (A) में से किसी एक इकाई (K) की आय का हिस्सा 1/12 है तो कुल आय के इस प्रकार से बढ़ जाने पर कि सभी इकाइयों की आय में समानुपातिक परिवर्तन हो तो (A+2000) का हिस्सा पहले की ही भाँति 1/12 ही रहेगा।

तथापि यह स्वयंसिद्धि डाल्टन के आय में आनुपातिक वर्द्धन (Proportionate Addition) के सिद्धांत के विरुद्ध जाती है, जो यह बताता है कि समान आनुपातिक वृद्धि (कमी) से असमानता के स्वर में कमी (वृद्धि) होनी चाहिए। संभवतया डाल्टन यह नहीं देख सके कि सैद्धांतिक रूप से समान आनुपातिक वृद्धि, मापन के पैमान में परिवर्तन के समतुल्य हैं। सापेक्षिक अपकिरण के मापने के मामले में भी ऐसा ही होता है।

आनुपातिक करारोपण/सहयायों (subsidies) के मामले इस स्वयंसिद्धि के अंतर्गत आच्छादित हैं। यह समझ लिया जाना चाहिए कि इस प्रकार की वृद्धि से कुल आय में व्यक्तिगत (वर्ग) हिस्सों में कोई परिवर्तन नहीं होता और लॉरेंज वक्र अपरिवर्तित रहता है। इसलिए लॉरेंज वक्र पर आधारित सभी माप इस स्वयंसिद्धि को संतुष्ट करते हैं। इसका यह अर्थ भी नहीं है कि केक के आकार का कोई महत्त्व नहीं है। सामाजिक कल्याण के मामले में केक के आकार तथा केक के वितरण दोनों का ही महत्त्व है। समानता के मापों के सीमित संदर्भों में ही इस अभिलक्षण की वांछनीयता पर विचार किया जाता है।

लॉरेंज (1997) ने विभिन्न आय धारकों की खुशहाली में गैर-आनुपातिक वृद्धि के रूप में इस स्वयंसिद्धि के विरुद्ध एक आपत्ति उठायी। वह यह कि आय में वृद्धि होने पर खुशहाली में बिखराव (Diffusion) होता है तथा जब आय में कमी होती है तो संकेन्द्रण बढ़ता है। इस प्रकार, यह विचार डाल्टन द्वारा उल्लेख किए जाने से पहले भी मौजूद था। कोई सरलता से यह समझ सकता है कि ह्रासमान सीमान्त उपयोगिता का विचार इस आपत्ति में शामिल है। तब इस स्वयंसिद्धि का वास्तविक क्षेत्र मापन की इकाई है।

2) **जनसंख्या आकार स्वतंत्रता की स्वयंसिद्धि**

प्रत्येक आय स्तर के व्यक्तियों की आनुपातिक संख्या में यदि वृद्धि हो जाए तो असमानता का स्तर अप्रभावित रहता है।

इसका अर्थ तो यह हुआ कि केक के वितरण में असमानता का परिमाण आय के विभिन्न स्तरों के साथ प्रापकों की सापेक्षिक संख्या पर निर्भर करता है। यदि हम $N$ आकार की एक जैसे वितरण वाली दो अर्थव्यवस्थाओं का आपस में विलय कर दें, तो इससे अर्थव्यवस्था का आकार $2N$ हो जाएगा और इससे किसी दी हुई आय के लिए यह विलय हुई जनसंख्या का अनुपात नहीं होगा। ऐसी पुनरावृत्तियाँ आय के स्तर को अपरिवर्तित ही रखेंगे। इस स्वयंसिद्धि को जनसंख्या प्रतिकृति (Replication) के सिद्धांत के रूप में जाना जाता है।

यह डाल्टन के व्यक्तियों की आनुपातिक वृद्धि सिद्धांत की तरह ही है। जब तक प्रत्येक वर्ग में लोगों का अनुपात एक जैसा रहता है तब तक लॉरेंज वक्र अपरिवर्तित ही रहता है, तथा लॉरेंज वक्र पर आधारित माप इस स्वयंसिद्धि को संतुष्ट करते हैं। हमें एक प्रति-अंतर्ज्ञानी (Counter intitutive) उदाहरण पर विचार करना है। माना कि हमारे पास दो व्यक्तियों का कोई समाज है जिसमें एक व्यक्ति की आय शून्य है तथा दूसरे के पास समाज की संपूर्ण आय है। अब हम इसी के समरूप एक ऐसी अर्थव्यवस्था पर विचार करते हैं जिसमें चार व्यक्ति हैं इसमें से दो व्यक्ति शून्य आय के साथ विपन्नता (destitutions) के सहभागी हैं, जबकि अन्य दो अर्थव्यवस्था की संपूर्ण आय में आधे-आधे के हिस्सेदार हैं। पहले के मामले में कोई असमानता नहीं थी, जबकि जब 50 प्रतिशत जनसंख्या आय को बराबर-बराबर हिस्से में बांट रही है। इसलिए, कुछ विद्वान इसे स्वीकार नहीं करेंगे।

3) **समान आय वृद्धि की स्वयंसिद्धि**

यदि $x_i^2, i = 1,2,\ldots N$ प्रकार का कोई वितरण $2\, x_i^1, i = 1, 2,\ldots,N,$ प्रकार के किसी अन्य वितरण 1 के प्रत्येक तत्व में समान धनराशि d (कहने को पेंशन) जोड़ देने से प्राप्त होता है। अर्थात्

$$x_i^2 = x_i^1 + d$$

तो वितरण 2 का असमानता का स्तर पहले वितरण 1 से कम होगा अर्थात्

$$I(x_1^2, x_2^2, ..., x_N^2) < I(x_1^1, x_2^1, ....x_N^1)$$

स्वाभाविक रूप में आय कोई भी कटौती (कहने को करारोपण) से असमानता का चिन्ह बदल जाएगा। अर्थात् यदि वितरण 2 के प्रत्येक तत्व की आय वितरण 1 को प्रत्येक आय में कर की धनराशि T को घटाने से प्राप्त हुई है तो वितरण 2 में असमानता का स्तर वितरण 1 में असमानता के स्तर से कम होगा। यहाँ यह समझ लिया जाना चाहिए कि पहली परिस्थिति में निर्धनों के हिस्से में वृद्धि हुई है, जबकि दूसरी परिस्थिति में निर्धनों का हिस्सा बढ़ गया है। यह स्वयंसिद्धि डाल्टन के आयों में समान वृद्धि के सिद्धांत की तरह ही है।

अब हम दो अति महत्त्वपूर्ण स्वयंसिद्धियों पर चर्चा करते हैं जो अन्य बातों के यथावत रहते हुए एक व्यक्ति से दूसरे व्यक्ति की ओर आय के हस्तांतरण से संबंधित है। पहली को पागू-डाल्टन शर्त तथा दूसरे को सेन शर्त कहा जाता है।

4) **आय हस्तांतरण की पहली स्वयंसिद्धि (पीगू -डाल्टन शर्त)**

यदि किसी धनवान व्यक्ति से किसी निर्धन व्यक्ति की ओर कोई समानीकरण हस्तांतरण होता है, तो असमानता का स्तर सुनिश्चित तौर पर काम हो जाता है किन्तु शर्त यह है कि समानीकरण हस्तांतरण दोनों की आय के बीच के अंतर से अधिक न हो। लगातार दो आय इकाइयों के बीच होने वाले ऐसे हस्तांतरण आय इकाइयों की रैंक में कोई परिवर्तन नहीं लाएंगे, इसलिए इस प्रक्रिया को रैंक-संरक्षणीकरण समानीकरण कहा जा सकता है।

इस स्वयंसिद्धि में आय के सभी स्तरों पर हस्तांतरण और इस तरह सभी आयों के कम से कम एक फलन के प्रति संवेदनशील असमानता आय की आवश्यकता होती है।

यह स्वयंसिद्धि डाल्टन के आय हस्तांतरण सिद्धांत के संगत हैं। डाल्टन (1920) का तर्क था कि असमानता के माप में कम से कम यह अभिलक्षण तो होना ही चाहिए। चूँकि इस संदर्भ में पीगू के योगदान (1912) को भी अति महत्त्वपूर्ण माना जाता है, इसलिए सेन (1973) ने इसे पीगू डाल्टन शर्त के रूप में निरूपित किया। इसका अनुसरण करते हुए बाद के अनेक विद्वानों ने इसे 'पी.डी. शर्त' का नाम दिया है।

अधिकांश सूचकांक, सापेक्षिक विस्तार तथा सापेक्षिक माध्य विचलन को छोड़कर, इस परीक्षण में खरे उतरते हैं। इस स्वयंसिद्धि को एक कमजोर हस्तांतरण स्वयंसिद्धि भी कहा जाता है क्योंकि यह असमानता के स्तर के परिमाण के बारे में कुछ भी न बताते हुए उसकी केवल दिशा मात्र बताती है।

5) **आय हस्तांतरण की दूसरी स्वयंसिद्धि (सेन शर्त)**

यदि हम एक बार में केवल एक जैसे दो हस्तांतरों पर विचार करें तो पैमाने के निचले स्तर पर हस्तांतरण का प्रभाव उसके प्रतिपक्षी पैमाने के ऊपरी स्तर की तुलना में अधिक होगा। सेन के अनुसार (1973), रु.1000 से रु.900 की ओर आय के हस्तांतरण का प्रभाव रु.1000100 आय से रु.1000000 की ओर होने वाले हस्तांतरण के प्रभाव की तुलना में अधिक होगा।

हमें ज्ञात है कि अनेक माप इनमें से किसी भी शर्त को पूरा नहीं करते तथा कुछ माप केवल पहली शर्त को ही पूरा करते हैं। लेकिन जो हस्तांतरण दूसरी शर्त को पूरा करते हैं वे स्वतः ही पहली शर्त को भी पूरा करते दिखाई देते हैं।

6) **सममितता की स्वयंसिद्धि**

यदि कोई वितरण $(x_1^p, x_2^p, ..., x_N^p)$ किसी वितरण $(x_1, x_2, ..., x_N)$ का हिस्सा (Permutation) हो तो दोनों ही वितरणों में असमानता का स्तर एक जैसा ही होगा।

इसका अर्थ यह निकलता है कि यदि दो व्यक्ति अपनी आय स्थितियों को आपस में बदल लेते हैं तो असमानता माप में कोई परिवर्तन नहीं होता। इस प्रकार यह स्वयंसिद्धि गैर-आय अभिलक्षणों के लिए व्यक्तियों के बीच निष्पक्षता (Impartiality) सुनिश्चित करती है। मूल्यांकनकर्ता अमर, अकबर और एन्थॉनी, शीलता और पीटर, छोटे या बड़े के बीच कोई भेद नहीं करता। असमानता केवल आयों के आवृत्ति वितरण पर निर्भर करती है।

7) **अंतराल की स्वयंसिद्धि**

असमानता माप $(0, 1)$ के बन्द अंतराल के बीच ही स्थित होने चाहिए।

सभी आय समान होने पर माप का मान शून्य, तथा यदि सम्पूर्ण आय किसी एक व्यक्ति के ही पास है, तो असमानता माप का मान इकाई के बराबर होता है।

अधिकांश लोग इस स्वयंसिद्धि से सहमत हैं। लेकिन कुछ, विशेष रूप से थील (1967) तथा काउवेल (1995) इससे सहमत नहीं हैं। उनका तर्क है कि दो व्यक्तियों वाले

समाज में किसी एक व्यक्ति द्वारा संपूर्ण आय हड़प लेने से उपजे असमानता के स्तर की तुलना 2 करोड़ व्यक्तियों वाले समाज में संपूर्ण आय किसी एक व्यक्ति के पास होने से उपजे असमानता के स्तर के साथ नहीं की जा सकती। क्योंकि ऐसा संभव ही नहीं है कि 2 करोड़ लोगों के समाज में समाज की संपूर्ण आय केवल किसी एक व्यक्ति के पास ही हो। दो व्यक्ति वाले समाज में भी ऐसा मान लेना आसान नहीं होगा कि एक व्यक्ति के पास संपूर्ण आय हो तथा दूसरे के पास कुछ भी न हो। एक मामले में 50 प्रतिशत जनसंख्या की आय धनात्मक है, जबकि दूसरे में केवल 0.00000005 प्रतिशत। इसलिए कुल लोग यह कह कर स्वयंसिद्धि को पूरा करते दिखाई देंगे कि एक व्यक्ति को समस्त आय प्राप्त हो रही है। इसलिए संख्या में वृद्धि के साथ-साथ माप के इकाई की ओर बढ़ने की प्रवृत्ति होगी।

जब किसी माप का सीमित (finite) अधिकतम होता है, तो ऐसे निर्देशांक को किसी ऐसे निर्देशांक के रूप में रूपांतरित करना सरल होता है, जहाँ इसका अधिकतम माप इकाई के बराबर हो। अधिकांश मापों, यद्यपि सभी का नहीं, का न्यूनतम मान शून्य होता है। लेकिन काउवेल (1995) ने जो प्रश्न उठाया है, वह यह है कि अनेक ऐसे तरीके हैं जिनके तहत माप को रूपांतरित करके उनके मानों के शून्य से एक ही रेंज के बीच लाया जा सकता है। लेकिन प्रत्येक रूपांतरण के संख्यावाचक अभिलक्षण अलग-अलग होते हैं।

8) विखंडात्मकता (**Decomposability**) की स्वयंसिद्धि

माना कि जनसंख्या को अनेक समूहों में उप-विभाजित किया जा सकता है तथा असमानता का समग्र निर्देशांक समूह-वार निर्देशांकों का एक फलन है। यदि जनसंख्या माध्य को समूह माध्यों के भारित औसत के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, तो असमानता के जनसंख्या निर्देशांक को विखंडनात्मक माना जा सकता है। समूहों को विभिन्न व्यवसायों में लगे व्यक्तियों, विभिन्न क्षेत्र के निवासियों, विभिन्न धर्मों या शैक्षिक पृष्ठभूमि आदि के रूप में माना जा सकता है।

तथापि ऐसे समूहों के बीच अनेक प्रकार की अतिव्याप्ति (Overlapping) भी पायी जा सकती है। इससे कुछ भार इकाई से भिन्न हो सकते हैं।

सभी सूचकांक विखंडनीय नहीं पाये गये हैं। असमानता का सर्वाधिक लोकप्रिय माप उसी दशा में विखंडनीय है जबकि संघटक समूह अतिव्याप्ति वाले न हों। काउवेल (1995) ने एक अति सुंदर प्रयोग किया। पहले, उसने समान आकार के दो समूहों में विभाजित हो सकने वाले समान माध्यम वाले दो समूहों के लिए असमानता के चार मापों की गणना इस प्रकार की कि कोई अतिव्याप्ति नहीं है।

जनसंख्या A: (60,70,80), (30,30,130)

जनसंख्या B: (60,60,90), (10,60,120)

अब पाया गया कि दो वितरणों में समूह माध्य तथा जनसंख्यामाध्य समान हैं तथा B में समूह असमानताएँ उसके प्रतिपक्षी A की तुलना में ऊँची हैं। लेकिन जब समग्र असमानता की माप की जाती है तो पता चलता है कि असमानता का परिमाण A की तुलना में B में नीचा है। असमानता की माप सर्वाधिक लोकप्रिय माप गिनी माप से की

गई है। उसके अनुसार यह अलग प्रकार का भले ही हो, लेकिन यह सच है कि यदि संघटकीय असमानता परिमाण उच्चतर है और भार समान है, तो समग्र माप नीचा कैसे को सकता है। इसलिए, संघटक समूहों में असमानता परिवर्तन के कुछ सतत फलनों में परिवर्तन के साथ असमानता में समग्र परिवर्तन को व्यक्त कर पाना असंभव है।

अंतर्दशी रूप से ये सभी उपयोगी और पसंद की जाने वाली स्वयंसिद्धियाँ हैं। किन्तु अन्य कुछ और स्वयंसिद्धि को विकसित किए जाने का क्षेत्र अभी भी खुला है। निर्धनता मापन के साहित्य में अनेक प्रकार की स्वयंसिद्धियाँ विकसित की गयी हैं। लेकिन हमारी चर्चा यहीं तक सीमित रहेगी।