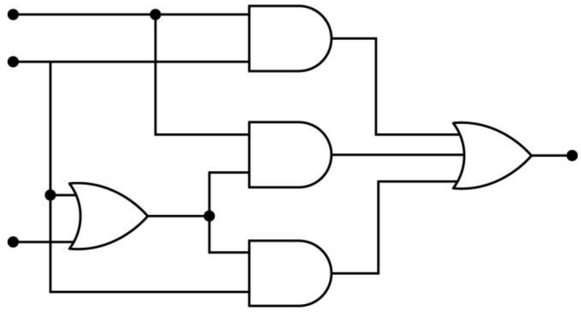


तर्क परिपथों के कई अनुप्रयोग होते हैं। अक्सर हमें ऊपर दिखाए गए परिपथ की तरह जटिल तर्क परिपथों का सरलीकरण करना होता है। इस इकाई में आप सीखेंगे कि बूलीय बीजगणित का उपयोग करके ऐसे तर्क परिपथों का किस प्रकार सरलीकरण किया जाता है।

इकाई 8

तर्क परिपथ

इकाई की रूपरेखा

अध्ययन निर्देशिका

इस इकाई में आप ऐसे तर्क परिपथों के बारे में पढ़ेंगे जो उन परिपथों से अधिक जटिल हैं जिनके बारे में आपने इकाई 7 में पढ़ा है। आप बूलीय बीजगणित भी सीखेंगे जिससे आप इन परिपथों का सरलीकरण कर सकेंगे। इसके लिए अभ्यास की आवश्यकता होगी। आप यह भी सीखेंगे कि किसी सत्यमान सारणी को किस प्रकार तुल्य तर्क परिपथ में रूपांतरित किया जाता है। हमारी आपको यह सलाह है कि इस इकाई को आप एक अभ्यास पुस्तिका की तरह मानें और अलग कागज पर हर चरण को स्वयं करें। सभी हल किए हुए उदाहरण, सभी बोध प्रश्न तथा इकाई के अंत में दिए गए प्रश्न स्वयं हल करें ताकि इस इकाई की अवधारणाएं आप अच्छी तरह सीख सकें।

"विज्ञान के प्रश्नों में हजारों की सत्ता में किसी एक व्यक्ति के विनम्र तर्क के बराबर योग्यता नहीं होती।"

गैलीलियो

8.1 परिचय

इकाई 7 में आपने AND, OR और NOT तर्क गेटों और उनके संयोजनों NAND, NOR, XOR और XNOR गेटों के बारे में पढ़ा है। ये गेट अधिकांश अंकीय परिपथों के आधारभूत खंड होते हैं। आम तौर पर अंकीय इलेक्ट्रॉनिकी में तर्क गेटों का अधिक संख्या में उपयोग होता है। किसी अनुप्रयोग के लिए अंकीय परिपथ डिज़ाइन करते हुए तर्क गेटों की संख्या न्यूनतम रखना महत्वपूर्ण होता है ताकि शक्ति की खपत और परिपथ की जटिलता कम रहें। बूलीय बीजगणित (Boolean algebra, जो द्वि-आधारी संख्याओं का बीजगणित है) के माध्यम से हम जटिल तर्क परिपथों का सरलीकरण कर सकते हैं, उन्हें प्रतीकात्मक रूप से व्यक्त कर सकते हैं और उनका कुशलतापूर्वक उपयोग कर सकते हैं।

अतः, हम पहले भाग 8.2 में बूलीय बीजगणित समझाएंगे। फिर भाग 8.3 में हम बूलीय बीजगणित का उपयोग कर तर्क परिपथों का सरलीकरण करेंगे। आप इसके लिए आवश्यक विधियां सीखेंगे। अंत में भाग 8.4 में हम गुणनफलों के योगफल की विधि और कारनाफ़ मानचित्र विधि द्वारा किसी दी हुई सत्यमान सारणी का तुल्य तर्क परिपथ में रूपांतरण समझाएंगे।

अगली इकाई में आप द्वि-आधारी संख्याओं के जोड़ और व्यवकलन के लिए तर्क परिपथों के अनुप्रयोग सीखेंगे। यही समस्त कम्प्यूटरों में अंकगणितीय संक्रियाओं का आधार है।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- बूलीय बीजगणित के कायदे लागू करके किसी दिए हुए तर्क परिपथ और उसकी सत्यमान सारणी के लिए बूलीय समीकरण लिख सकेंगे;
- बूलीय प्रमेय लिख सकेंगे और उन्हें लागू करके बूलीय समीकरणों और तर्क परिपथों का सरलीकरण कर सकेंगे;
- दिए हुए बूलीय व्यंजक से सत्यमान सारणी प्राप्त कर सकेंगे; और
- दी हुई सत्यमान सारणी के तुल्य तर्क परिपथ प्राप्त कर सकेंगे।

8.2 बूलीय बीजगणित

इस भाग में आप बूलीय बीजगणित के बारे में पढ़ेंगे जिससे एक ऐसी विधि उपलब्ध होती है, जिसे लागू करके जटिल अंकीय परिपथ को सरल परिपथ में बदला जा सकता है। बूलीय बीजगणित का आविष्कार 1854 में गणितज्ञ जॉर्ज बूल ने किया था। यह बीजगणित की वह शाखा है जिसमें चर राशियों के केवल दो मान होते हैं : सही और ग़लत जिन्हें क्रमशः प्रतीकों 1 और 0 से दिखाया जाता है। आप इस भाग को पढ़ते हुए समझ पाएंगे कि बूलीय बीजगणित क्यों अंकीय परिपथों और उनके विश्लेषण का आधार है। आइए, पहले हम बूलीय बीजगणित के कायदों और अभिगृहीतों के कथन दें।

8.2.1 बूलीय बीजगणित के कायदे और अभिगृहीत

इकाई 7 में आपने विभिन्न तर्क गेटों और उनके निवेश-निर्गम संबंधों के बारे में पढ़ा है। वहां भी बिना नाम लिए हम बूलीय बीजगणित का उपयोग कर रहे थे। आइए, अब हम बूलीय बीजगणित के कायदों औपचारिक कथन दें।

1. बूलीय बीजगणित में चर राशियों के केवल दो मान हो सकते हैं : 0 या 1।

2. (NOT गेट के संगत) शाब्दिक समीकरण Y = NOT A का बूलीय समीकरण होता है :

$$Y = \overline{A} \qquad (8.1)$$

A के ऊपर का बार संक्रिया NOT A का प्रतीक है और समीकरण (8.1) को इस तरह पढ़ा जाता है : "Y NOT A के बराबर है" या "Y A का पूरक है"। अतः,

यदि A, 0 है, तब $Y = \overline{A} = \overline{0} = 1$ और

यदि A 1 है, तब $Y = \overline{A} = \overline{1} = 0$

3. शाब्दिक समीकरण $Y = A$ OR B का बूलीय समीकरण होता है :

$$Y = A + B \qquad (8.2)$$

जिसे इस तरह पढ़ा जाता है : "Y A OR B के बराबर है"। ध्यान दें कि यह OR गेट का निवेश-निर्गम संबंध लिखने का मानक तरीका है। अतः, बूलीय बीजगणित में प्रतीक + संक्रिया OR का द्योतक है (हाशिए पर दी गयी टिप्पिणी पढ़ें)। अतः, यदि

A 0 है और B 0 है, तब $Y = 0 + 0 = 0$

A 0 है और B 1 है, तब $Y = 0 + 1 = 1$

A 1 है और B 0 है, तब $Y = 1 + 0 = 1$

A 1 है और B 1 है, तब $Y = 1 + 1 = 1$

4. शाब्दिक समीकरण $Y = A$ AND B का बूलीय समीकरण होता है :

$$Y = A \,.\, B \quad \text{या} \quad Y = AB \qquad (8.3)$$

जिसे इस तरह पढ़ा जाता है : "Y A AND B के बराबर है"। ध्यान दें कि समीकरण (8.3) AND गेट का निवेश-निर्गम संबंध लिखने का मानक तरीका है। अतः, बूलीय बीजगणित में चरों के बीच प्रतीक **.** या किसी प्रतीक का नहीं होना AND संक्रिया का द्योतक है। अतः, यदि

A 0 है और B 0 है, तब $Y = 0 \,.\, 0 = 0$

A 0 है और B 1 है, तब $Y = 0 \,.\, 1 = 0$

A 1 है और B 0 है, तब $Y = 1 \,.\, 0 = 0$

A 1 है और B 1 है, तब $Y = 1 \,.\, 1 = 1$

आपको बूलीय बीजगणित में योग और गुणा के प्रतीकों के उपयोग से भ्रमित नहीं होना चाहिए। जहां दशमलव पद्धति में प्रतीक + और **.** योग और गुणा के प्रतीक हैं, बूलीय बीजगणित या तर्क परिपथों पर चर्चा में ये प्रतीक OR और AND संक्रियाओं के लिए प्रयुक्त होते हैं जो समीकरणों (8.2 और 8.3) द्वारा परिभाषित होती हैं।

अब हम बूलीय बीजगणित के इन कायदों का उपयोग करके तर्क परिपथों के लिए समीकरण लिख सकते हैं। लेकिन आगे पढ़ने से पहले हम चाहेंगे कि आप निम्नलिखित संकेतन पद्धति को सीख लें जिसका हम अब उपयोग करेंगे।

संकेतन पद्धति

हम किसी **संक्रिया में आने वाले बिटों को तिरछे अक्षरों से दर्शाएंगे**। उदाहरण के लिए, यदि हमें तीन बिटों पर OR या AND संक्रियाएं करनी हैं तो हम इस तरह से तिरछे अक्षरों का उपयोग में करेंगे :

$$Y = A + B + C$$

या $$Y = A \,.\, B \,.\, C$$

लेकिन यदि हमें बिटों का उपयोग करके कोई शब्द लिखना है तो हम तिरछे अक्षरों का उपयोग नहीं करते। उदाहरण के लिए, हम

4 बिटों वाले शब्द को ABCD लिखते हैं

अतः, यदि *A* 1 है, *B* 1 है, *C* 0 है और *D* 0 है, तब *ABCD* इन 4 बिटों पर AND संक्रिया का द्योतक है और निम्नलिखित के बराबर है :

$$A.\, B.\, C.\, D = 1.1.\, 0.0 = 0$$

लेकिन ABCD 4 बिटों वाले शब्द का द्योतक है। उपरोक्त मानों के लिए यह है : 1100।

आइए, हम AND, OR और NOT गेटों के बूलीय व्यंजकों को तालिका 8.1 में सारबद्ध करें।

तालिका 8.1 : AND, OR और NOT गेटों के बूलीय व्यंजक

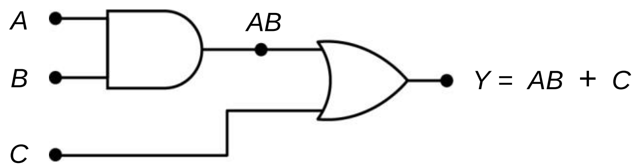
AND संक्रिया	OR संक्रिया	NOT संक्रिया
$0 . 0 = 0$	$0 + 0 = 0$	$\bar{0} = 1$
$0 . 1 = 0$	$0 + 1 = 1$	$\bar{1} = 0$
$1 . 0 = 0$	$1 + 0 = 1$	
$1 . 1 = 1$	$1 + 1 = 1$	

तालिका 8.1 में दी गई संक्रियाएं **बूलीय बीजगणित के दस अभिगृहीत** हैं।

ध्यान दें कि इनमें से प्रत्येक अभिगृहीत संगत तर्क गेट का निवेश-निर्गम संबंध देता है। अब आप किसी अंकीय परिपथ के लिए बूलीय समीकरण लिखना और उसका उपयोग करना सीख सकते हैं। आगे दिया हुआ उदाहरण पढ़ें।

उदाहरण 8.1 : बूलीय समीकरण लिखना

निम्नलिखित तर्क परिपथ के लिए बूलीय समीकरण लिखें।



चित्र 8.1 : AND और OR गेटों वाला अंकीय परिपथ।

हल ■ चित्र 8.1 में ध्यान दें कि A और B AND गेट के निवेश हैं। OR गेट का एक निवेश C है और दूसरा निवेश $A \, . \, B$ (AB) यानी AND गेट का निर्गम है। अतः, OR गेट का निर्गम है :

$$Y = AB + C$$

यह चित्र 8.1 के परिपथ के लिए बूलीय समीकरण है।

आइए, तालिका 8.1 का उपयोग करके हम चित्र 8.1 के परिपथ का A, B और C के विभिन्न मानों के लिए निर्गम Y प्राप्त करें। उदाहरण के लिए,

$A = 1$, $B = 1$ और $C = 1$ के लिए

$Y = 1\,.1 + 1 = 1$ (चूंकि तालिका 8.1 से $1.1 = 1$ और $1 + 1 = 1$)

इसी तरह, $A = 0$, $B = 1$ और $C = 1$ के लिए

$Y = 0\,.1 + 1 = 1$ (चूंकि तालिका 8.1 से $0.1 = 0$ और $0 + 1 = 1$)

आप निवेशों के कुछ अन्य मानों के लिए इस अभ्यास को जारी रख सकते हैं और चित्र 8.1 में दिखाए गए तर्क परिपथ के लिए सत्यमान सारणी बना सकते हैं। आगे पढ़ने से पहले बोध प्रश्न 1 हल करें।

बोध प्रश्न 1 – दिए हुए परिपथ के लिए बूलीय समीकरण

क) चित्र 8.1 के तर्क परिपथ के लिए सत्यमान सारणी बनाएं।

ख) यदि चित्र 8.1 में AND गेट और OR गेट की अदला बदली कर दी जाए तो तर्क परिपथ के लिए बूलीय समीकरण लिखें।

तालिका 8.1 की सहायता से अब हम अनेक बूलीय प्रमेय या सर्वसमिकाएं (identities) और डी मॉर्गन प्रमेय लिख सकते हैं जिनका उपयोग बूलीय बीजगणित में होता है।

8.2.2 बूलीय नियम और प्रमेय

इस संदर्भ में आपने विभिन्न मूलभूत गेटों के निर्गमों के बारे में इकाई 7 में जो सीखा है उसे याद करना ठीक रहेगा :

(क) i) AND गेट का निर्गम केवल तभी 1 होता है, जब सभी निवेश 1 हों।

ii) AND गेट का निर्गम 0 होता है, जब सभी या कोई भी एक निवेश 0 हो।

ख) i) OR गेट का निर्गम 0 होता है, जब सभी निवेश 0 हों।

ii) OR गेट का निर्गम 1 होता है, जब कोई भी एक निवेश या सभी निवेश 1 हों।

ग) NOT गेट का निर्गम अपने निवेश का प्रतिलोम होता है।

इन कथनों और अभिगृहीतों से हम निम्नलिखित बूलीय प्रमेय और नियम व्युत्पन्न करते हैं।

AND फलन से :

1. $X \,.\, 0 = 0$

2. $0 \,.\, X = 0$

3. $X \,.\, 1 = X$

4. $1 \,.\, X = X$

OR फलन से :

5. $X + 0 = X$

6. $0 + X = X$

7. $X + 1 = 1$

8. $1 + X = 1$

किसी चर का स्वयं के साथ या अपने पूरक के साथ संयोजन करने पर :

9. $X \,.\, X = X$

10. $X \,.\, \overline{X} = 0$

11. $X + X = X$

12. $X + \overline{X} = 1$

द्विक पूरकीकरण से (from double complementation) :

13. $\overline{\overline{X}} = X$

गुणन और योग के क्रमविनिमेय नियम (commutative laws) :

इन नियमों से यह पता चलता है कि दो चर राशियों पर किसी भी क्रम में OR संक्रिया या AND संक्रिया की जाए, तो उससे परिणाम पर कोई अंतर नहीं पड़ता है।

14. $X \,.\, Y = Y \,.\, X$

15. $X + Y = Y + X$

योग और गुणन के साहचर्य नियम (associative laws) :

इन नियमों से यह पता चलता है कि अनेक चर राशियों पर OR संक्रिया अथवा AND संक्रिया की जाती है, तो इस बात से कोई अंतर नहीं पड़ता कि किस क्रम में राशियों को रखा गया है।

16. $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z = X + Y + Z$

17. $X\,(YZ) = (XY)\,Z = XYZ$

बंटन नियम (distributive laws)

18. $X \,.\, (Y + Z) = (X \,.\, Y) + (X \,.\, Z)$

19. $X + (Y \,.\, Z) = (X + Y) \,.\, (X + Z)$

20. $(W + X) \,.\, (Y + Z) = WY + XY + WZ + XZ$

क्या आपने ध्यान दिया कि बूलीय बीजगणित के क्रमविनिमेय, साहचर्य और बंटन नियम साधारण बीजगणित के संगत नियमों के समान हैं? अतः, आपके लिए इन्हें याद रखना कठिन नहीं होना चाहिए।

अवशोषण नियम (absorption laws)

इस प्रकार का कोई नियम साधारण बीजगणित में नहीं होता।

21. $X + X.Y = X$

22. $X \,.\, (X + Y) = X$

23. $X + \overline{X}\,Y = X + Y$

24. $X \,.\, (\overline{X} + Y) = XY$

डी मॉर्गन के पहले और दूसरे प्रमेय :

डी मॉर्गन के पहले प्रमेय का कथन यह है : एक योगफल का पूरक, पूरकों के गुणनफल के बराबर होता है।

25. $\overline{X + Y} = \overline{X} \,.\, \overline{Y}$

डी मॉर्गन के दूसरे प्रमेय का कथन यह है : गुणनफल का पूरक, पूरकों के योगफल के बराबर होता है।

26. $\overline{X . Y} = \overline{X} + \overline{Y}$

हमारी आपको सलाह है कि आप इस भाग में दिए गए इन नियमों और प्रमेयों को याद कर लें। इन सभी का उपयोग तर्क परिपथों का सरलीकरण करने में होता है। आइए, हम बूलीय व्यंजक के सरलीकरण के लिए इन नियमों और प्रमेयों के अनुप्रयोग का एक सरल उदाहरण लें। आप इस प्रकार के अनुप्रयोगों का भाग 8.3 और भाग 8.4 में उपयोग करेंगे।

उदाहरण 8.2 : बूलीय प्रमेयों के अनुप्रयोग

निम्नलिखित बूलीय व्यंजकों का सरलीकरण करें :

क) $(A+B)(\overline{A}+B)(\overline{B}+C)$

ख) $ABC+A\overline{B}+AB\overline{C}$

हल ■ हम दो पद एक बार में लेकर बूलीय व्यंजकों का सरलीकरण दो चरणों में करते हैं।

क) $(A+B)(\overline{A}+B)(\overline{B}+C)$

हम पहले दो पदों के गुणनफल का पहले सरलीकरण करते हैं :

$(A+B)(\overline{A}+B)$

$=A\overline{A}+AB+B\overline{A}+BB$

$=0+AB+B\overline{A}+B$ (10 और 9 को लागू करके)

$=(A+\overline{A})B+B=B.1+B=B$ (12 और 11 को लागू करके)

$\therefore\ (A+B)(\overline{A}+B)(\overline{B}+C)=B(\overline{B}+C)=B\overline{B}+BC=BC$

(10 को लागू करके)

ख) $ABC+A\overline{B}+AB\overline{C}$

$=ABC+AB\overline{C}+A\overline{B}$

$=AB(C+\overline{C})+A\overline{B}$

$=AB.1+A\overline{B}=A(B+\overline{B})=A$ (दोनों चरणों में 12 को लागू करके)

अब हम बूलीय बीजगणित में मूलभूत गुणनफलों, मिनटर्म और मैक्सटर्म की अवधारणाओं से आपको परिचित कराएंगे जिनका उपयोग तर्क परिपथों के सरलीकरण में होता है।

8.2.3 मूलभूत गुणनफल, मिनटर्म और मैक्सटर्म

परिभाषा से, बूलीय बीजगणित में मूलभूत गुणनफल वे गुणनफल होते हैं जिनका निर्गम उच्च (1) होता है।

उदाहरण के लिए, मान लें कि दो निवेश A और B हैं। तब A और B पर वे सभी AND संक्रियाएं जिनका निर्गम 1 होता है A और B के मूलभूत गुणनफल हैं। अतः, A और B के चार संभव संयोजन हो सकते हैं और उनके संगत मूलभूत गुणनफल तालिका 8.2 में दिखाए गए हैं।

तालिका 8.2 : दो निवेशों के मूलभूत गुणनफल

A	B	मूलभूत गुणनफल	निर्गम
0	0	$\overline{A}\,\overline{B}$	1
0	1	$\overline{A}B$	1
1	0	$A\overline{B}$	1
1	1	AB	1

क्या आप ऊपर दी गई तालिका 8.2 में पैटर्न पहचान रहे हैं?

जब भी निवेश शून्य होता है तो हम गुणनफल में उसका पूरक लेते हैं।

3 निवेशों के लिए मूलभूत गुणनफल क्या होंगे? आइए, पता लगाएं। इनके 8 संयोजन होंगे जिनके संगत मूलभूत गुणनफल तालिका 8.3 में दिखाए गए हैं।

तालिका 8.3 : तीन निवेशों के मूलभूत गुणनफल

A	B	C	मूलभूत गुणनफल	निर्गम
0	0	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	1
0	0	1	$\overline{A}\,\overline{B}C$	1
0	1	0	$\overline{A}B\overline{C}$	1
0	1	1	$\overline{A}BC$	1
1	0	0	$A\overline{B}\,\overline{C}$	1
1	0	1	$A\overline{B}C$	1
1	1	0	$AB\overline{C}$	1
1	1	1	ABC	1

मिनटर्म (minterm) जिसे गुणनफल का योगफल (Sum of Product, SOP) भी कहते हैं, चरों के गुणनफल होते हैं जो योग के चिन्ह द्वारा पृथक्कृत होते हैं। ये चर पूरक भी हो सकते हैं और नहीं भी।

गुणनफल का योगफल या मिनटर्म (minterm) इस प्रकार प्राप्त किया जाता है :

सत्यमान सारणी की प्रत्येक उस पंक्ति के लिए जिसका निर्गम 1 है, बूलीय पद उन चरों का जो 1 के बराबर होते हैं और उन चरों के, जो 0 के बराबर होते हैं, पूरकों का गुणनफल होता है। इन गुणनफलों का योग अभीष्ट मिनटर्म होता है। उदाहरण के लिए, किसी दिए हुए तर्क परिपथ की 3 निवेशों वाली सत्यमान सारणी लें जिसे तालिका 8.4 में दिखाया गया है।

तालिका 8.4 : तीन निवेशों के लिए मिनटर्म

क्र. सं.	A	B	C	निर्गम
1.	0	0	0	0
2.	0	0	1	1
3.	0	1	0	1
4.	0	1	1	1
5.	1	0	0	1
6.	1	0	1	0
7.	1	1	0	0
8.	1	1	1	0

तो, तालिका 8.4 में क्रम संख्याओं 2 से 5 में निर्गम 1 हैं। इनमें से प्रत्येक निर्गम के लिए बूलीय पद है :

$\overline{A}\,\overline{B}C \qquad \overline{A}B\overline{C} \qquad \overline{A}BC \qquad A\overline{B}\,\overline{C}$

अतः, गुणनफल का योगफल यानी मिनटर्म (minterm) है :

$\overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C}$

और गुणनफल का योगफल बूलीय समीकरण है :

$X = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C}$

मैक्सटर्म (maxterm) जिसे **योगफल का गुणनफल** (Product of Sum, POS) भी कहते हैं, चरों के योग होते हैं जो गुणा के चिन्ह द्वारा पृथक्कृत होते हैं। ये चर पूरक हो भी सकते हैं और नहीं भी।

योगफल का गुणनफल या मैक्सटर्म (maxterm) इस प्रकार प्राप्त किया जाता है :

सत्यमान सारणी की प्रत्येक उस पंक्ति के लिए जिसका निर्गम 0 है, बूलीय पद उन चरों का जो 0 के बराबर होते हैं और उन चरों के, जो 1 के बराबर होते हैं, पूरकों का योगफल होता है। इन गुणनफलों का योग अभीष्ट मैक्सटर्म होता है। उदाहरण के लिए, तालिका 8.4 फिर से देखें। वे सभी पंक्तियां देखें जिनमें निर्गम 0 है। ऐसी 4 पंक्तियां हैं। तो, 4 बूलीय पद है :

$A + B + C \qquad \overline{A} + B + \overline{C} \qquad \overline{A} + \overline{B} + C \qquad \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

अतः, योगफल का गुणनफल यानी मैक्सटर्म है :

$(A + B + C)(\overline{A} + B + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + C)(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$

और योगफल का गुणनफल बूलीय समीकरण है :

$$Y = (A + B + C)(\overline{A} + B + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + C)(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$$

आगे पढ़ने से पहले भाग 8.2.2 और भाग 8.2.3 पर आधारित बोध प्रश्न 2 हल करें।

बोध प्रश्न 2 - बूलीय नियमों और प्रमेयों को लागू करना

क) बूलीय व्यंजक $A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$ का सरलीकरण करें।

ख) 2 निवेशों वाले NAND और NOR गेटों की सत्यमान सारणियों के लिए मिनटर्म (SOP) और मैक्सटर्म (POS) बूलीय समीकरण प्राप्त करें।

8.3 तर्क परिपथों का सरलीकरण

अभी तक आपने सीखा है कि एक तर्क परिपथ को बूलीय व्यंजक के रूप में व्यक्त किया जा सकता है जिसे बूलीय नियमों का प्रयोग करके सरलीकृत किया जा सकता है। अब आप जटिल तर्क परिपथों को सरलीकृत करना सीखेंगे। आइए, हम तर्क परिपथों और उनके संगत बूलीय व्यंजकों को सरलीकृत करने के नियम लिखें और फिर उन्हें लागू करें।

8.3.1 बूलीय समीकरणों के सरलीकरण के नियम

बूलीय व्यंजक का समीकरण निम्नलिखित दो रूपों में से किसी भी एक रूप में व्यक्त किया जा सकता है : क) गुणनफल का योगफल (SOP) और ख) योगफल का गुणनफल (POS)। यहां हम केवल SOP रूप पर ही चर्चा करेंगे क्योंकि इसका प्रयोग व्यापक रूप से होता है। तर्क परिपथ के सरलीकरण का उद्देश्य यह होता है कि उसमें संक्रियाएं या संक्रियात्मक चिन्ह कम से कम हों यानी उसमें तर्क गेट कम से कम हों या उस परिपथ के संगत बूलीय व्यंजक में चर राशियों की संख्या कम से कम हो। अनेक बार हमें एक तर्क परिपथ या उसके संगत बूलीय व्यंजक के एक से अधिक सरलीकृत रूप प्राप्त हो जाते हैं, जिनमें से प्रत्येक प्रयुक्त किए जाने वाले गेट की संख्या और राशियों की संख्या के संदर्भ में एक-दूसरे के तुल्य होते हैं। अंतिम विश्लेषण के समय हम बूलीय व्यंजक के **गुणनफल के निम्नतम योगफल** (Minimum Sum of Product, MSP) रूप का प्रयोग करेंगे, जिसे बिना कोष्ठक लगाए लिखा जाता है। उसके संगत तर्क परिपथ सबसे सरल होगा।

उदाहरण के लिए, एक सरलतम व्यंजक (reduced expression) $A(B + C)$ लें जिसे MSP रूप में $AB + AC$ की तरह लिखा जाता है। जहां सरलतम व्यंजक को एक AND गेट और एक OR गेट की आवश्यकता होती है, वहीं MSP व्यंजक को दो AND गेटों और एक OR गेट की आवश्यकता होती है। इस तरह, हम देखते हैं कि इस स्थिति में MSP व्यंजक सरलतम नहीं हुआ। अतः, मूल नियम यह है कि तर्क परिपथ के बूलीय व्यंजक को

क) **यथासंभव सरल किया जाए,** और

ख) **बिना कोष्ठक के लिखा जाए।**

तर्क परिपथों के बूलीय व्यंजकों के सरलीकरण के लिए बूलीय संक्रियाओं को निम्नलिखित क्रम में लागू करना चाहिए :

1) एकल चरों का प्रतिलोमन

2) कोष्ठकों वाली सभी संक्रियाएं

3) OR संक्रियाओं से पहले AND संक्रियाएं

4) OR संक्रियाएं

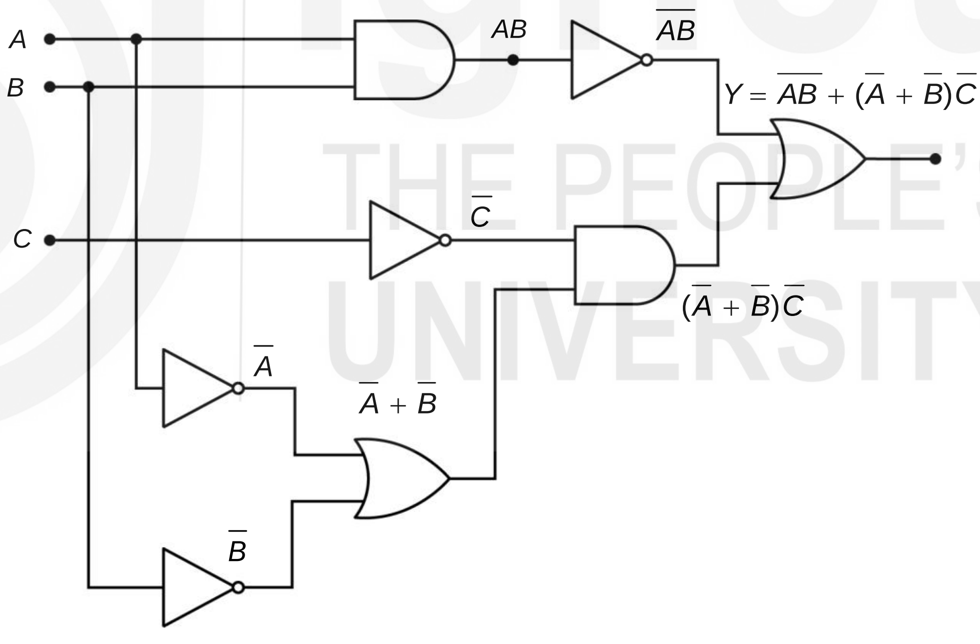
5) यदि किसी व्यंजक में बार (bar) लगा हो, तो प्रतिलोमन करने से पहले सभी संक्रियाओं को लागू कर लें।

आइए, तर्क परिपथों को सरलीकृत करने का एक उदाहरण लें।

उदाहरण 8.3 : तर्क परिपथों का सरलीकरण

निम्नलिखित तर्क परिपथ को सरलीकृत करें जिसका बूलीय समीकरण है :

$$Y = \overline{AB} + (\overline{A} + \overline{B})\overline{C} \qquad \text{(i)}$$



चित्र 8.2 : $Y = \overline{AB} + (\overline{A} + \overline{B})\overline{C}$ **के लिए अंकीय परिपथ।**

हल ■ हम बूलीय नियमों और प्रमेयों का प्रयोग करके बूलीय समीकरण (i) के लिए MSP व्यंजक प्राप्त करेंगे।

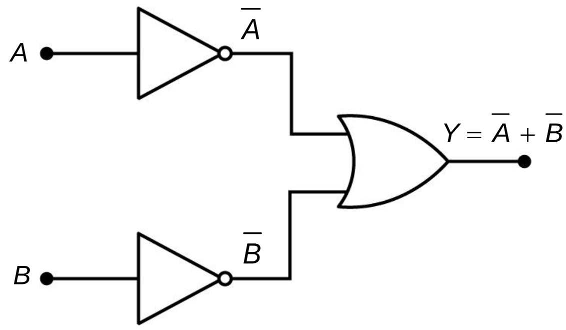
$Y = (\overline{A} + \overline{B})\overline{C} + \overline{AB} = (\overline{A} + \overline{B})\overline{C} + (\overline{A} + \overline{B})$ डी मॉर्गन प्रमेय 26 से

$= (\overline{A} + \overline{B})(\overline{C} + 1)$ $(\overline{A} + \overline{B})$ को उभयनिष्ठ लेकर

$= (\overline{A} + \overline{B}).1 = \overline{A} + \overline{B}$ 7 और 3 को लागू करके

अतः, MSP व्यंजक है : $Y = \overline{A} + \overline{B}$

चित्र 8.3 में इस MSP के लिए सरलीकृत तर्क परिपथ दिखाया गया है।



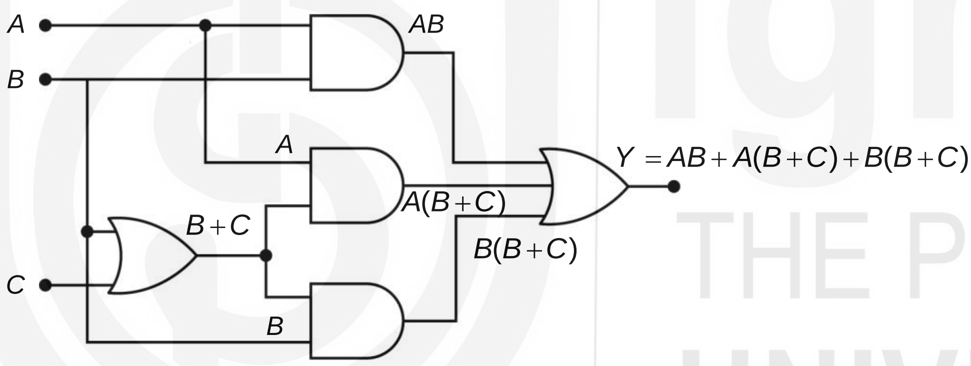
चित्र 8.3 : $Y = \overline{A} + \overline{B}$ **के लिए अंकीय परिपथ।**

आइए, तर्क परिपथों को सरलीकृत करने का एक और उदाहरण लें।

उदाहरण 8.4 : तर्क परिपथों का सरलीकरण

निम्नलिखित तर्क परिपथ को सरलीकृत करें जिसका बूलीय समीकरण है :

$$Y = AB + A(B + C) + B(B + C) \qquad \text{(i)}$$



चित्र 8.4 : $Y = AB + A(B+C) + B(B+C)$. **के लिए अंकीय परिपथ।**

हल ■ हम बूलीय नियमों और प्रमेयों का प्रयोग करके बूलीय समीकरण (i) के लिए MSP व्यंजक प्राप्त करेंगे।

$Y = AB + A(B + C) + B(B + C)$

$= AB + AB + AC + BB + BC$

$= AB + AB + AC + B + BC$ 9 को लागू करके

$= AB + AC + B + BC$ 11 को लागू करके

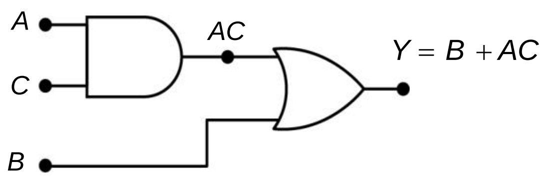
$= AB + AC + B(1 + C)$ B को उभयनिष्ठ लेकर

$= AB + AC + B.1$ 8 को लागू करके

$= (A + 1)B + AC \quad = 1.B + AC$ 7 को लागू करके

अतः, MSP व्यंजक है : $Y = B + AC$

चित्र 8.5 में इस MSP के लिए सरलीकृत तर्क परिपथ दिखाया गया है।



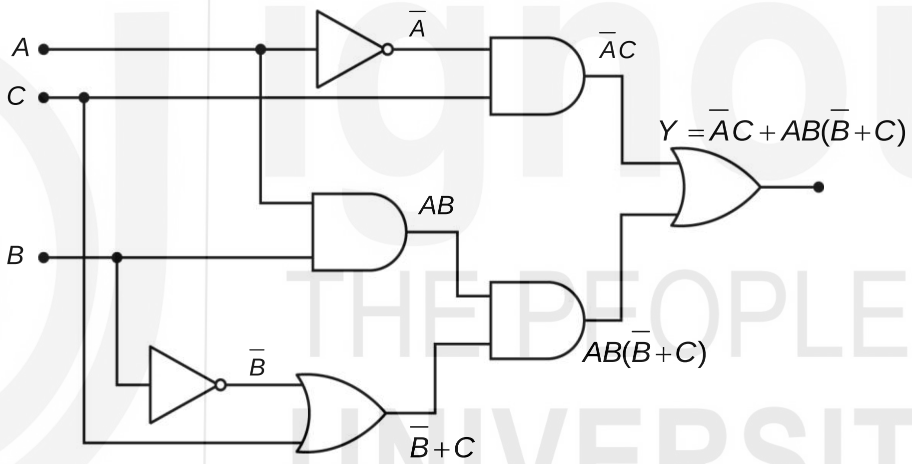
चित्र 8.5 : $Y = B + AC$ **के लिए अंकीय परिपथ।**

आइए, एक और उदाहरण लें।

उदाहरण 8.5 : तर्क परिपथों का सरलीकरण

निम्नलिखित तर्क परिपथ को सरलीकृत करें जिसका बूलीय समीकरण है :

$$Y = \overline{A}C + AB(\overline{B} + C) \qquad \text{(i)}$$



चित्र 8.6 : $Y = \overline{A}C + AB(\overline{B} + C)$ **के लिए अंकीय परिपथ।**

हल ■ हम बूलीय नियमों और प्रमेयों का प्रयोग करके बूलीय समीकरण (i) के लिए MSP व्यंजक प्राप्त करेंगे।

$Y = \overline{A}C + AB(\overline{B} + C)$

$= \overline{A}C + AB\overline{B} + ABC$

$= \overline{A}C + A.0 + ABC$ — 10 को लागू करके

$= \overline{A}C + ABC$ — 1 को लागू करके

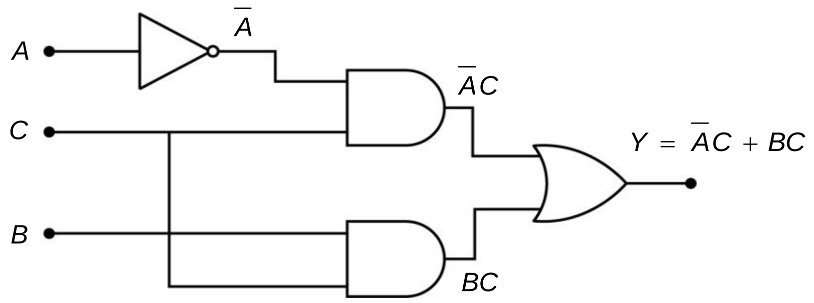
$= (\overline{A} + AB)C$ — C को उभयनिष्ठ लेकर

$= (\overline{A} + B)C$ — 23 को लागू करके

$= \overline{A}C + BC$ — 7 को लागू करके

अतः, MSP व्यंजक है : $Y = \overline{A}C + BC$

चित्र 8.7 में इस MSP के लिए सरलीकृत तर्क परिपथ दिखाया गया है।



चित्र 8.7 : $Y = \overline{A}C + BC$ **के लिए अंकीय परिपथ।**

अब आप तर्क परिपथ के लिए बूलीय समीकरण को स्वयं सरलीकृत करें। बोध प्रश्न 3 हल करें।

बोध प्रश्न 3 - बूलीय समीकरणों का सरलीकरण

निम्नलिखित बूलीय समीकरण का MSP व्यंजक प्राप्त करें :

$Y = A\overline{B}\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$

इस भाग में आपने बूलीय समीकरणों को सरलीकृत करने के नियम सीखे हैं जिनका उपयोग करके आप जटिल तर्क परिपथों से सरल तर्क परिपथ प्राप्त कर सकते हैं जिनमें तर्क गेटों की संख्या न्यूनतम हो। सार रूप में आपने ऐसा करने के लिए निम्नलिखित चरणों का अनुसरण किया है :

1) तर्क संक्रिया को बूलीय व्यंजक के रूप में लिखें।
2) बूलीय नियमों और प्रमेयों का प्रयोग करके सरलीकृत बूलीय व्यंजक प्राप्त करें।
3) सरलीकृत बूलीय व्यंजक जिसमें तर्क गेटों की संख्या न्यूनतम हो, के लिए अंकीय परिपथ का चित्र खींचें।

8.3.2 बूलीय व्यंजक से सत्यमान सारणी प्राप्त करना

आपने इकाई 7 में विभिन्न तर्क गेटों के लिए बूलीय व्यंजकों से सत्यमान सारणी बनाई है। अतः, आप बूलीय व्यंजक से सत्यमान सारणी प्राप्त करने की सरलतम विधि से परिचित हैं। आप सभी संभव संयोजनों में निवेशों के मान रखते हैं।

उदाहरण के लिए, आप जानते हैं कि 2 निवेशों के लिए 4 संयोजन होंगे, 3 निवेशों के लिए 8 संयोजन होंगे, आदि। आपने सीखा है कि n निवेशों के लिए 2^n संयोजन होंगे। और निवेश मानों के प्रत्येक संयोजन के लिए आपने निर्गम का मान प्राप्त किया था और उसे सत्यमान सारणी में उसकी संगत स्थिति में रखा था।

आइए, एक उदाहरण की मदद से इस विधि को पुनः दर्शाएं। मान लें कि आपको निम्नलिखित बूलीय व्यंजक के लिए सत्यमान सारणी बनानी है :

$$Y = AB + A(B + C) + B(B + C)$$

इसमें 3 निवेश हैं, तो 8 संयोजन होंगे जैसाकि तालिका 8.5 में दिखाया गया है :

तालिका 8.5 : बूलीय व्यंजक से सत्यमान सारणी प्राप्त करना

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

हमने प्रत्येक निवेश संयोजन के लिए निर्गम प्राप्त किया है जैसाकि हमने इकाई 7 में किया था। उदाहरण के लिए, पांचवी पंक्ति में जहां A, 1 है और B और C, 0 हैं, हमें मिलता है :

$$Y = 1.0 + 1.(0+0) + 0.(0+0)$$
$$= 0 + 1.0 + 0.0$$
$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

हम सभी निवेश संयोजनों के लिए निर्गमों के मान प्राप्त करते हैं। इस तरह हम तालिका 8.5 की सत्यमान सारणी प्राप्त करते हैं।

आप तालिका 8.5 में Y के मानों की जांच करना चाहेंगे। इसके लिए बोध प्रश्न 4 हल करें।

बोध प्रश्न 4 - बूलीय व्यंजक से सत्यमान सारणी प्राप्त करना

तालिका 8.5 में दूसरी, तीसरी और आठवीं पंक्तियों में निर्गम के मानों को सत्यापित करें।

अब हम बूलीय व्यंजक से सत्यमान सारणी प्राप्त करने की एक अन्य विधि समझाएंगे जो तर्क करने की विधि है।

आइए, हम पूछें : बूलीय व्यंजक का निर्गम 1 कब होगा? उदाहरण के लिए, निम्नलिखित MSP व्यंजक लें :

$$Y = A\overline{C} + BC$$

इस व्यंजक में निर्गम Y तब तक 1 रहेगा जब तक कि या तो $A\overline{C}$ या BC, 1 रहेगा। अतः, आपको $A\overline{C} = 1$ और/या $BC = 1$ की सभी प्रविष्टियों के लिए $Y = 1$ लेना

चाहिए। अतः, सत्यमान सारणी 8.6 में पंक्तियों 5 और 7 में और 4 और 8 में निर्गम 1 रखना चाहिए। अन्य पंक्तियों के लिए Y, 0 है।

इस तरह, तालिका 8.6 दिए हुए बूलीय व्यंजक की सत्यमान सारणी है।

तालिका 8.6 : $Y = A\overline{C} + BC$ **की सत्यमान सारणी**

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

अतः, सत्यमान सारणी प्राप्त करने में तर्क करने की विधि बेहतर होती है। इस विधि में केवल दो चरण होते हैं :

1. दिए हुए बूलीय व्यंजक का MSP रूप प्राप्त करें, और

2. तर्क करें कि MSP के व्यंजक के प्रत्येक गुणनफल या पद के लिए सत्यमान सारणी की कौन-कौन सी प्रविष्टियां 1 होनी चाहिए।

आइए, इस विधि को एक उदाहरण की मदद से समझाएं।

उदाहरण 8.6 : सत्यमान सारणी प्राप्त करना

निम्नलिखित बूलीय समीकरण की सत्यमान सारणी प्राप्त करें :

$$Y = A + AB + BCD \qquad \text{(i)}$$

हल ■ हम बूलीय नियमों और प्रमेयों का प्रयोग करके बूलीय समीकरण (i) के लिए MSP व्यंजक प्राप्त करेंगे।

$$\begin{aligned} Y &= A + AB + BCD \\ &= A(1 + B) + BCD \\ &= A.1 + BCD \\ &= A + BCD \end{aligned}$$

अतः, MSP व्यंजक है : $Y = A + BCD$

तर्क से हम देख सकते हैं कि जब भी A, 1 है या BCD, 1 है तब $Y = 1$ होगा।

अतः, समीकरण की सत्यमान सारणी में हम $A = 1$ की सभी प्रविष्टियों (यानी तालिका 8.7 में 9 से 16 तक की प्रविष्टियों) और $BCD = 1$ की सभी प्रविष्टियों (यानी तालिका 8.7 में 8 और 16 की प्रविष्टियों) के लिए $Y = 1$ रखते हैं। हम तालिका 8.7 की अन्य सभी प्रविष्टियों के लिए $Y = 0$ रखते हैं।

तालिका 8.7 : $Y = A + BCD$ **की सत्यमान सारणी**

	A	B	C	D	Y
1.	0	0	0	0	0
2.	0	0	0	1	0
3.	0	0	1	0	0
4.	0	0	1	1	0
5.	0	1	0	0	0
6.	0	1	0	1	0
7.	0	1	1	0	0
8.	0	1	1	1	1
9.	1	0	0	0	1
10.	1	0	0	1	1
11.	1	0	1	0	1
12.	1	0	1	1	1
13.	1	1	0	0	1
14.	1	1	0	1	1
15.	1	1	1	0	1
16.	1	1	1	1	1

बूलीय व्यंजक से सत्यमान सारणी प्राप्त करने की इस विधि के अभ्यास के लिए बोध प्रश्न 5 हल करें।

बोध प्रश्न 5 - बूलीय व्यंजक से सत्यमान सारणी प्राप्त करना

$Y = AB + BC + CA$ के लिए सत्यमान सारणी प्राप्त करें।

8.4 सत्यमान सारणी का तुल्य तर्क परिपथ में रूपांतरण

इस इकाई के अंतिम भाग में हम दी गई सत्यमान सारणी का बूलीय व्यंजक और उसके संगत तर्क परिपथ में रूपांतरण समझाएंगे। इसके लिए हम दो विधियों का उपयोग करेंगे : गुणनफल के योगफल की विधि और कारनाफ़ मानचित्र।

8.4.1 गुणनफल के योगफल की विधि

आइए, हम सत्यमान सारणी को बूलीय व्यंजक में रूपांतरित करने की इस विधि को एक उदाहरण की मदद से समझाएं। सत्यमान सारणी 8.8 लें।

तालिका 8.8 : दी गई सत्यमान सारणी

	A	B	C	Y
1.	0	0	0	0
2.	0	0	1	0
3.	0	1	0	0
4.	0	1	1	0
5.	1	0	0	1
6.	1	0	1	0
7.	1	1	0	1
8.	1	1	1	1

इस सत्यमान सारणी का वर्णन करने वाले बूलीय व्यंजक को लिखने के लिए हम सत्यमान सारणी की प्रत्येक उस पंक्ति के बूलीय व्यंजक को एक गुणनफल के रूप में लिखते हैं, जिसका निर्गम 1 होता है। फिर हम गुणनफलों का योगफल लेते हैं। ध्यान दें कि सारणी में प्रविष्टियों 5, 7 और 8 के निर्गम 1 हैं। प्रत्येक प्रविष्टि का बूलीय व्यंजक क्या है?

बूलीय व्यंजक प्राप्त करने के लिए हमें केवल प्रत्येक उस प्रविष्टि के लिए एक गुणनफल पद लिखना है जिसका निर्गम 1 है। अतः, इसे हम इस तरह करते हैं :

प्रविष्टि 5: $A = 1, B = 0, C = 0$ के लिए $Y = 1$

अतः, $Y = A\bar{B}\bar{C}$

क्योंकि AND गेट का निर्गम केवल तभी 1 होगा, जब सभी निवेश 1 हों। इसी तरह,

प्रविष्टि 7: $A = 1, B = 1, C = 0$ के लिए $Y = 1$

अतः, $Y = AB\bar{C}$

प्रविष्टि 8: $A = 1, B = 1, C = 1$ के लिए $Y = 1$

अतः, $Y = ABC$

अब हम OR तर्क के साथ सभी तीन गुणनफलों का योगफल लेते हैं। अतः, सत्यमान सारणी का बूलीय व्यंजक है :

$$Y = A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} + ABC \qquad \text{(SOP)}$$

हम इस बूलीय व्यंजक को निम्नलिखित तरीके से सरल करते हैं :

$$Y = A\bar{B}\bar{C} + AB(\bar{C} + C)$$

$$= A\bar{B}\bar{C} + AB$$

$$= A(\bar{B}\bar{C} + B)$$

$$= A(B + \bar{C}) \qquad \text{23 को लागू करके}$$

अतः, MSP व्यंजक है :

$$Y = AB + A\bar{C}$$

आप इस MSP व्यंजक के संगत तर्क परिपथ को आसानी से खींच सकते हैं। आगे पढ़ने से पहले इसे बोध प्रश्न 6 में बनाएं।

बोध प्रश्न 6 - सत्यमान सारणी से तर्क परिपथ प्राप्त करना

तालिका 8.8 के लिए प्राप्त $Y = AB + A\bar{C}$ के लिए तर्क परिपथ खींचें।

आइए, हम संक्षेप में इस विधि का विवरण दें :

1. AND संक्रिया द्वारा उन प्रविष्टियों के सभी निवेश चरों को संयोजित करें जिनके निर्गम 1 हैं।
2. गुणनफल के प्रत्येक निवेश चर का बार के साथ या बिना बार के इस तरह चयन करें कि (निवेशों पर AND संक्रिया से प्राप्त) निवेश मानों के गुणनफल से निर्गम 1 प्राप्त हो। आप देख सकते हैं कि ये गुणनफल **मूलभूत गुणनफल** हैं।
3. इन गुणनफलों को OR संक्रिया द्वारा एकत्रित करें।
4. इस तरह प्राप्त गुणनफलों का योगफल MSP व्यंजक नहीं भी हो सकता है। तब बूलीय नियमों और प्रमेयों का प्रयोग करके MSP व्यंजक प्राप्त करें।

आप चरण 1 से आरम्भ करके इस विधि का अभ्यास करना चाहेंगे। इसके लिए बोध प्रश्न 7 हल करें।

बोध प्रश्न 7 - सत्यमान सारणी से तर्क परिपथ प्राप्त करना

तालिका 8.9 में दी गई सत्यमान सारणी के लिए बूलीय व्यंजक प्राप्त करें।

तालिका 8.9 : दी गई सत्यमान सारणी

	A	B	C	Y
1.	0	0	0	1
2.	0	0	1	0
3.	0	0	1	0
4.	0	1	1	0
5.	1	0	0	1
6.	1	0	1	0
7.	1	1	0	0
8.	1	1	1	1

अब हम किसी दी गई सत्यमान सारणी को तर्क परिपथ के लिए बूलीय व्यंजक में रूपांतरित करने के लिए एक और विधि समझाएंगे।

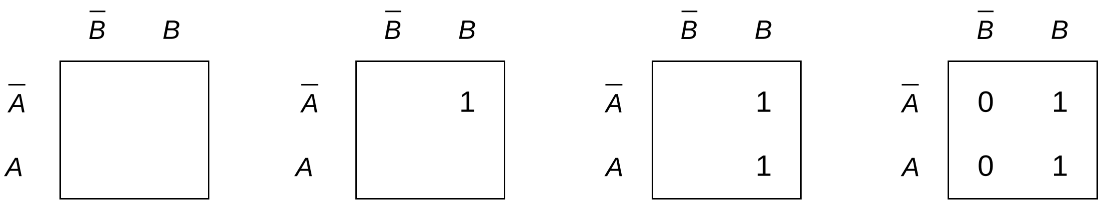
8.4.2 कारनाफ़ मानचित्र

आइए, पहले हम समझाएं कि तालिका 8.10 जैसी किसी दो निवेशों वाली सत्यमान सारणी के लिए दो चरों वाला कारनाफ़ मानचित्र कैसे बनाते हैं।

तालिका 8.10 : दी गई सत्यमान सारणी

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

उदाहरण के तौर पर आइए, हम तालिका 8.10 के लिए कारनाफ़ मानचित्र बनाएं। पहले हम एक ऐसा वर्ग खींचते हैं जैसा चित्र 8.8क में दिखाया गया है और निवेश चरों और उनके पूरकों को ठीक उसी तरह लिखते हैं जैसाकि चित्र में दिखाया गया है।



(क) (ख) (ग) (घ)

चित्र 8.8 : 2 निवेशों वाली सत्यमान सारणी के लिए कारनाफ़ मानचित्र बनाना।

तालिका के पहले चर को हम वर्ग के बायीं ओर ऊर्ध्वाधर कॉलम में लिखते हैं और दूसरे चर को वर्ग के ऊपर क्षैतिज पंक्ति में लिखते हैं। साथ ही, आप उस क्रम पर

ध्यान दें जिसमें हमने निवेश चरों और उनके पूरकों को इस वर्ग में रखा है। ऊर्ध्वाधर कॉलम में $\overline{A}$ (A का पूरक) A से पहले आता है। क्षैतिज पंक्ति में $\overline{B}$ (B का पूरक) B से पहले रखा जाता है। आपको हमेशा इस क्रम को याद रखना चाहिए।

अब हम तालिका 8.10 में देखते हैं कि निर्गम 1 कहां-कहां है। ध्यान दें कि पहला निर्गम 1 तालिका में तब आता है जब निवेश A, 0 है और B, 1 है। इसके लिए मूलभूत गुणनफल $\overline{A}B$ है क्योंकि निवेश मानों A (0) और B (1) के लिए $\overline{A}B$, 1 के बराबर है। अतः, हम पहला निर्गम 1 वैसे रखते हैं जैसा चित्र 8.8ख में दिखाया गया है। दूसरा निर्गम 1 मूलभूत गुणनफल AB के संगत है। अतः, हम दूसरा निर्गम 1 वैसे रखते हैं जैसा चित्र 8.8ग में दिखाया गया है।

आखिरी चरण में हम कारनाफ़ मानचित्र के शेष सभी स्थानों में 0 की प्रविष्टि करते हैं। इस तरह, हमें चित्र 8.8घ में दिखाया गया अंतिम कारनाफ़ मानचित्र मिलता है। अब हम निर्गम के लिए गुणनफल का योगफल (बूलीय व्यंजक) कारनाफ़ मानचित्र को देखकर ही लिख सकते हैं (चित्र 8.8घ)। यह है : $Y = \overline{A}B + AB$ । इसके संगत तर्क परिपथ आप खुद खींच सकते हैं। आइए, तालिका 8.12 जैसी 3 निवेशों वाली सत्यमान सारणी लेकर हम इस विधि को और आगे समझाएं। लेकिन आगे पढ़ने से पहले अपनी समझ परखने के लिए बोध प्रश्न 8 हल करें।

बोध प्रश्न 8 – कारनाफ़ मानचित्र खींच कर तर्क परिपथ प्राप्त करना

तालिका 8.11 के लिए कारनाफ़ मानचित्र खींचें।

तालिका 8.11

A	B	Y
0	0	0
1	0	1
1	0	0
1	1	1

आइए, अब तालिका 8.12 लें और उसके लिए कारनाफ़ मानचित्र खींचें।

तालिका 8.12 : दी गई सत्यमान सारणी

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

हम पहले चित्र 8.9क खींचते हैं। आप उस क्रम पर ध्यान दें जिसमें हमने निवेश चरों और उनके पूरकों को चित्र में रखा है और हमेशा इस क्रम को याद रखें। ध्यान दें कि क्रम $\overline{A}\overline{B}$, $\overline{A}B, AB$ और $A\overline{B}$ क्रम 00, 01, 11 और 10 के अनुसार हैं। ऐसा इसलिए किया जाता है ताकि केवल एक ही चर अपने पूरक (complemented) रूप से गैर-पूरक (uncomplemented) रूप में या गैर-पूरक रूप से पूरक रूप में परिवर्तित हो। उसके बाद हम तालिका 8.12 में उन सभी निर्गमों को देखते हैं जिनके मान 1 हों। तालिका

8.12 में पंक्तियों 2, 4 और 8 में निर्गम 1 है। हम इनके संगत मूलभूत गुणनफल लिखते हैं : $\overline{A}\overline{B}C, \overline{A}BC$ और ABC। फिर हम कारनाफ़ मानचित्र में चित्र 8.9ख के अनुसार निर्गम 1 भरते हैं और चित्र 8.9ग के अनुसार शेष सभी स्थानों में 0 भरते हैं।

(क)

	$\overline{C}$	C
$\overline{A}\overline{B}$		
$\overline{A}B$		
AB		
$A\overline{B}$		

(ख)

	$\overline{C}$	C
$\overline{A}\overline{B}$		1
$\overline{A}B$		1
AB		1
$A\overline{B}$		

(ग)

	$\overline{C}$	C
$\overline{A}\overline{B}$	0	1
$\overline{A}B$	0	1
AB	0	1
$A\overline{B}$	0	0

चित्र 8.9 : 3 निवेशों वाली सत्यमान सारणी के लिए कारनाफ़ मानचित्र बनाना।

हम निर्गम के लिए गुणनफल का योगफल (बूलीय व्यंजक) कारनाफ़ मानचित्र को देखकर ही लिख सकते हैं (चित्र 8.9ग)। यह है : $Y = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$ । इसके संगत तर्क परिपथ आप खुद खींच सकते हैं। कारनाफ़ मानचित्र इसलिए भी उपयोगी होते हैं क्योंकि वे हमें तर्क परिपथों का सरलीकरण करने के लिए एक बहुत कुशल साधन प्रदान करते हैं। लेकिन हम उस पक्ष पर यहां चर्चा नहीं करेंगे। अब इस इकाई में आपने जो सीखा है हम उसका सार प्रस्तुत करेंगे।

8.5 सारांश

अवधारणा	विवरण
बूलीय बीजगणित	■ सभी तर्क गेट और परिपथ द्वि-आधारी विधा में काम करते हैं यानी इन परिपथों के निवेशों और निर्गमों के मान केवल 0 या 1 हो सकते हैं। बूलीय बीजगणित का उपयोग तर्क परिपथों के निवेश-निर्गम संबंधों का वर्णन करने के लिए किया जाता है क्योंकि बूलीय बीजगणित में किसी चर का मान केवल 0 या 1 हो सकता है। बूलीय बीजगणित के सभी कायदे, नियम और प्रमेय तीन मूलभूत गेटों, AND, OR और NOT गेटों, की सत्यमान सारणी से प्राप्त किए जाते हैं। बूलीय बीजगणित में **मूलभूत गुणनफल** वे गुणनफल होते हैं जिनका निर्गम उच्च (1) होता है। **मिनटर्म** जिसे गुणनफल का योगफल (Sum of Product, SOP) कहा जाता है, उन चरों के गुणनफल के लिए प्रयुक्त होता है जो धन चिन्ह द्वारा पृथक्कृत होते हैं। **मैक्सटर्म** जिसे योगफल का गुणनफल (Product of Sum, POS) कहा जाता है उन चरों के योगफल के लिए प्रयुक्त होता है जो गुणा के चिन्ह से पृथक्कृत होते हैं।
तर्क परिपथों का सरलीकरण	■ एक अंकीय परिपथ को बूलीय व्यंजक के रूप में व्यक्त किया जा सकता है और बूलीय व्यंजक से तर्क परिपथ प्राप्त किया जा सकता है। बूलीय नियमों और प्रमेयों का प्रयोग करके तर्क परिपथ के बूलीय व्यंजक को सरलीकृत किया जा सकता है और सरल तर्क परिपथ प्राप्त किया जा सकता है। सरलीकरण का मूल नियम यह है कि तर्क परिपथ के बूलीय व्यंजक को क) **यथासंभव सरल किया जाए,** और ख) **बिना कोष्ठक के लिखा जाए**।

तर्क परिपथों के बूलीय व्यंजकों को सरलीकृत करने के लिए बूलीय संक्रियाएं निम्नलिखित क्रम में की जानी चाहिए :

1. एकल चरों का प्रतिलोमन
2. कोष्ठकों वाली सभी संक्रियाएं
3. OR संक्रियाओं से पहले AND संक्रियाएं
4. OR संक्रियाएं
5. यदि किसी व्यंजक में बार (bar) लगा हो, तो प्रतिलोमन करने से पहले सभी संक्रियाओं को लागू कर लें।

बूलीय व्यंजक से सत्यमान सारणी बिना उसके संगत तर्क परिपथ का उल्लेख किए हुए प्राप्त की जा सकती है।

सत्यमान सारणी का बूलीय व्यंजक और संगत तुल्य तर्क परिपथ में रूपांतरण

■ बूलीय व्यंजक और उसके संगत तर्क परिपथ को दी गई सत्यमान सारणी से प्राप्त करने के लिए दो विधियों का उपयोग किया जाता है : गुणनफल के योगफल की विधि (Sum of Product, SOP) और कारनाफ़ मानचित्र (Karnaugh map)। दोनों विधियों में बूलीय व्यंजक को गुणनफलों के योगफल के रूप में प्राप्त किया जाता है जिसे और सरलीकृत करके न्यूनतम गुणनफल के योगफल (MSP) के रूप में लाया जाता है। MSP व्यंजक का उपयोग करके अंतिम तर्क परिपथ खींचा जाता है।

8.6 अंत में कुछ प्रश्न

1. व्यंजक $Y = A\overline{B}D + A\overline{B}\,\overline{D}$ को उसके MSP रूप में सरलीकृत करें।
2. व्यंजक $Y = BCD + A\overline{B}CD$ को उसके MSP रूप में सरलीकृत करें।
3. व्यंजक $Y = \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$ को उसके MSP रूप में सरलीकृत करें।
4. व्यंजक $Y = \overline{(A + BC).(D + FG)}$ को उसके MSP रूप में सरलीकृत करें।
5. अंत के प्रश्न 2 के MSP व्यंजक के लिए सत्यमान सारणी लिखें।
6. $Y = \overline{A}B + A\overline{C}$ के लिए सत्यमान सारणी लिखें।
7. SOP विधि का उपयोग करके तालिका 8.13 में दी गई सत्यमान सारणी के लिए बूलीय व्यंजक लिखें और उसे सरलीकृत करें।

तालिका 8.13

A	B	C	Y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

8. SOP विधि का उपयोग करके तालिका 8.14 में दी गई सत्यमान सारणी के लिए बूलीय व्यंजक लिखें।

तालिका 8.14

A	*B*	*C*	*Y*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

9. सत्यमान सारणी 8.15 के लिए बूलीय व्यंजक लिखें और उसे सरलीकृत करें।

तालिका 8.15

A	*B*	*C*	*Y*
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

10. तालिका 8.16 में दी गई सत्यमान सारणी के लिए बूलीय व्यंजक लिखें और उसे कारनाफ़ मानचित्र द्वारा सरलीकृत करें।

तालिका 8.16

A	*B*	*C*	*Y*
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

8.7 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. क) $Y = AB + C$ के लिए सत्यमान सारणी तालिका 8.17 में दी गई है :

तालिका 8.17

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

ख) $Y = (A + B)\,C$

2. क) $A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC = A\bar{B}C + AB(\bar{C} + C)$

$= A\bar{B}C + AB = A(\bar{B}C + B)$

$= A(B + C) = AB + AC$ 23 को लागू करके

ख) 2 निवेशों वाले NAND और NOR गेटों की सत्यमान सारणियां निम्नवत् हैं :

तालिका 8.18 : 2 निवेशों वाले NAND गेट की सत्यमान सारणी

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

मिनटर्म (SOP) : $Y = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}B + A\bar{B}$

मैक्सटर्म (POS) : $Y = \bar{A} + \bar{B}$

तालिका 8.19 : 2 निवेशों वाले NOR गेट की सत्यमान सारणी

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

मिनटर्म (SOP) : $Y = \bar{A}\bar{B}$

मैक्सटर्म (POS) : $Y = (\overline{A} + B)(A + \overline{B})(\overline{A} + \overline{B})$

$= (A\overline{A} + AB + \overline{A}\,\overline{B} + B\overline{B})(\overline{A} + \overline{B})$

$= (AB + \overline{A}\,\overline{B})(\overline{A} + \overline{B})$ 10 को लागू करके

$= A\overline{A}B + AB\overline{B} + \overline{A}\,\overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{B}$

$= \overline{A}\,\overline{B}$ 9, 10 और 11 को लागू करके

$= \overline{(A + B)}$ 25 को लागू करके

3. $A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + ABC = A\overline{B}\,\overline{C} + AB(\overline{C} + C)$

$= A\overline{B}\,\overline{C} + AB = A(\overline{B}\,\overline{C} + B)$

$= A(B + \overline{C}) = AB + A\overline{C}$

4. बूलीय व्यंजक $Y = AB + A(B + C) + B(B + C)$ के लिए तालिका 8.5 की दूसरी पंक्ति में $A = 0, B = 0$ और $C = 1$ हैं। अतः,

$Y = 0.0 + 0.\,(0 + 1) + 0.\,(0 + 1)$

$= 0 + 0.1 + 0.1$

$= 0 + 0 + 0 = 0$

तालिका 8.5 की तीसरी पंक्ति में $A = 0, B = 1$ और $C = 0$ हैं। अतः,

$Y = 0.1 + 0.\,(1 + 0) + 1.\,(1 + 0)$

$= 0 + 0.1 + 1.1 = 0 + 0 + 1 = 1$

तालिका 8.5 की आठवीं पंक्ति में $A = 1, B = 1$ और $C = 1$ हैं। अतः,

$Y = 1.1 + 1.\,(1 + 1) + 1.\,(1 + 1)$

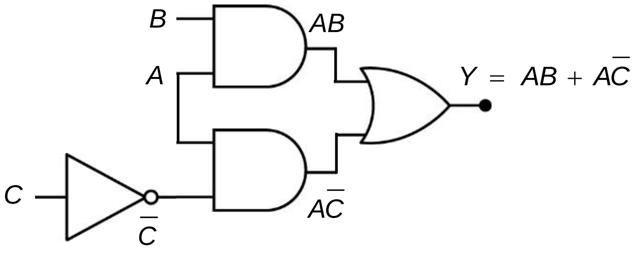
$= 1 + 1.1 + 1.1 = 1 + 1 + 1 = 1$

5. तर्क की विधि से $Y = 1$ होता है जब या तो AB, BC और CA में से कोई एक या सभी 1 होते हैं। अतः, हमें सत्यमान सारणी 8.20 प्राप्त होती है :

तालिका 8.20

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

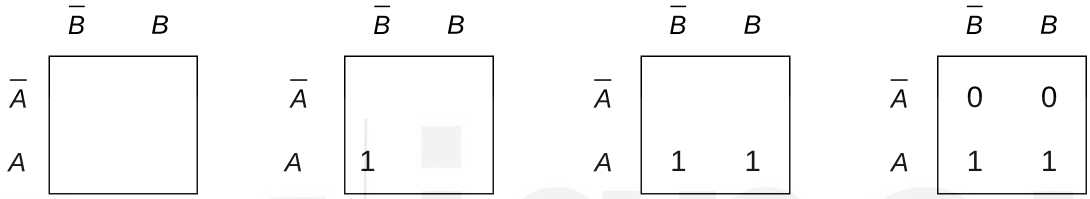
6. चित्र 8.10 देखें।



चित्र 8.10

7. $Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + ABC$

8. चित्र 8.11 देखें।



(क) (ख) (ग) (घ)

चित्र 8.11 : तालिका **8.11** के लिए कारनाफ़ मानचित्र।

अंत में कुछ प्रश्न

1. $Y = A\bar{B}D + A\bar{B}\bar{D}$

$= A\bar{B}(D + \bar{D})$

$= A\bar{B}.1 = A\bar{B}$

2. $Y = BCD + A\bar{B}CD$

$= (B + A\bar{B})CD$

$= (B + A)CD = BCD + ACD$

3. $Y = \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$

$= \bar{A}\bar{B}\bar{D}\,(C + \bar{C}) = \bar{A}\bar{B}\bar{D}$

4. इस व्यंजक को सरलीकृत करने के लिए डी मॉर्गन के पहले और दूसरे प्रमेय का उपयोग करेंगे।

$Y = \overline{(A + BC).\,(D + FG)}$

$= \overline{(A + BC)} + \overline{(D + FG)}$

$= \bar{A}.\overline{BC} + \bar{D}.\overline{FG}$

$= \bar{A}.(\bar{B} + \bar{C}) + \bar{D}.(\bar{F} + \bar{G}) = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{C} + \bar{D}\bar{F} + \bar{D}\bar{G}$

5. $BCD + ACD$ की सत्यमान सारणी के लिए तालिका 8.21 देखें।

तालिका 8.21

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

6. तालिका 8.22 देखें।

तालिका 8.22

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

7. $Y = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C + ABC$

$= \overline{A}\overline{C}\,(\overline{B} + B) + AC(\overline{B} + B)$

$= \overline{A}\overline{C} + AC$

8. $Y = \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + ABC$

9. $Y = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}C + AB\bar{C}$

$$= \bar{A}(\bar{B}C + B\bar{C}) + A(\bar{B}C + B\bar{C})$$

$$= (\bar{A} + A)(\bar{B}C + B\bar{C}) = \bar{B}C + B\bar{C}$$

10. कारनाफ़ मानचित्र के लिए चित्र 8.12 देखें।

	$\bar{C}$	C
$\bar{A}\bar{B}$		
$\bar{A}B$		
AB		
$A\bar{B}$		

(क)

	$\bar{C}$	C
$\bar{A}\bar{B}$	1	1
$\bar{A}B$	1	1
AB		
$A\bar{B}$		

(ख)

	$\bar{C}$	C
$\bar{A}\bar{B}$	1	1
$\bar{A}B$	1	1
AB	0	0
$A\bar{B}$	0	0

(ग)

चित्र 8.12 : अंत के प्रश्न 10 के लिए कारनाफ़ मानचित्र की रचना।

बूलीय व्यंजक है : $Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC$