
इकाई 6 दूत क्रीडा सिद्धांत और उसके प्रयोग (GAME THEORY AND ITS APPLICATIONS)

संरचना

- 6.0 उद्देश्य
- 6.1 विषय प्रवेश
- 6.2 दूत क्रीडा सिद्धांत (The Game Theory)
- 6.3 एक दूत क्रीडा (A Game)
- 6.4 दूत क्रीडा भेद (Types of Games)
 - 6.4.1 असहयोगात्मक बनाम सहयोगात्मक दूत (Non-Cooperative versus Cooperative Games)
 - 6.4.2 संपूर्ण एवं अपूर्ण सूचना दूत (Games of Complete and Incomplete Information)
 - 6.4.3 शून्य योग बनाम अशून्य योग दूत (Zero-sum Game versus Non-zero Sum Games)
 - 6.4.4 समसामयिक बनाम क्रमिक चाल दूत (Simultaneous-move versus Sequential-move Games)
- 6.5 दूत निरूपण के वैकल्पिक स्वरूप (Alternative Forms of Representing a Game)
 - 6.5.1 एक दूत का सामान्य स्वरूप निरूपण (Normal-form Representation of a Game)
 - 6.5.2 एक दूत का विस्तृत स्वरूप निरूपण (Extensive-form Representation of a Game)
- 6.6 एक दूत सिद्धांत समस्या का समाधान (Solving a Game Theory Problem)
 - 6.6.1 दमित युक्तियाँ (Dominated Strategies)
 - 6.6.2 प्रबल युक्तियाँ (Dominant Strategies)
 - 6.6.3 प्रबल युक्ति संतुलन (Dominant Strategy Equilibrium)
 - 6.6.4 दृढ़तापूर्वक दमित युक्तियों की आवर्तित निरस्त (Iterated Elimination of Strictly Dominated Strategies)
 - 6.6.5 नैश संतुलन (Nash Equilibrium)
 - 6.6.6 बहुलतापूर्ण संतुलन (Multiple Equilibria)
- 6.7 मिश्रित युक्तियाँ (Mixed Strategies)
- 6.8 आनुक्रमिक दूत (Sequential Games)
 - 6.8.1 उपदूत संपूर्ण नैश संतुलन (Sub-game Perfect Nash Equilibrium (SPNE))
 - 6.8.2 पश्च-आगमन (Backward Induction)
- 6.9 दूत सिद्धांत अनुप्रयोग (Application of the Game Theory)
- 6.10 सार-संक्षेप
- 6.11 संदर्भ ग्रंथादि
- 6.12 बोध प्रश्नों के उत्तर अथवा संकेत

6.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के बाद, आप कर पाएंगे :

- अर्थशास्त्र में द्यूत की संकल्पना की परिभाषा;
- एक क्रीड़ा के मूल तत्वों, अर्थात् (i) द्यूत खिलाड़ी, (2) युक्तियों और प्रतिप्राप्तियों का वर्णन;
- विभिन्न प्रकार की द्यूत क्रीड़ाओं पर चर्चा;
- किसी द्यूत क्रीड़ा को दो प्रकार से दर्शा पाना;
- किसी द्यूत सिद्धांत आधारित समस्या के समाधान हेतु आवश्यक संकल्पनाओं को समझना;
- द्यूत सिद्धांत संबंधित संतुलन संकल्पनाओं की व्याख्या;
- एक आनुक्रमिक द्यूत के विचार की व्याख्या; और
- द्यूत सिद्धांत के अनुप्रयोगों पर चर्चा।

6.1 विषय प्रवेश

इकाई 5 में हमने अल्पाधिकार की बाज़ार संरचना पर चर्चा की थी जहाँ फर्मों के बीच एक युक्ति स्तरीय परस्पर निर्भरता दिखाई देती है। ऐसे बाज़ार में एक फर्म के उत्पादन एवं कीमत निर्धारण के निर्णय अन्य फर्मों के उत्पादन एवं आगम अर्जन को प्रभावित करने लगते हैं। परिणामस्वरूप ऐसे बाज़ारों में फर्मों द्वारा इष्टतमीकरण में उक्त युक्ति स्तरीय निर्भरता पर ध्यान देना आवश्यक हो जाता है। द्यूत क्रीड़ा सिद्धांत और कुछ नहीं है बल्कि यह तो उस संदर्भ में एक अभिकर्ता व्यवहार का अध्ययन है जहाँ एक कर्ता के कार्यों के अन्य कर्ताओं की प्रतिप्राप्तियों पर भी प्रभाव होते हैं। पिछली इकाई में हमने फर्मों के बीच स्पर्धा के संदर्भ में द्यूत सिद्धांत पर चर्चा की थी। वास्तविक जीवन में अनेक बार ऐसे अवसर आ सकते हैं जहाँ दो या दो से अधिक कर्ता किसी निर्णय पर पहुँचने के लिए युक्ति स्तर पर परस्पर निर्भर हो जाते हैं। अर्थशास्त्री ऐसी यौक्तिक दशाओं में समाधान तक पहुँचने के लिए बहुत-से उपकरणों का प्रयोग कर सकते हैं। हमारी यह इकाई इस बात की विस्तृत व्याख्या करेगी। वास्तव में हाल के दशकों में द्यूत क्रीड़ा सिद्धान्त का प्रयोग अर्थशास्त्र के अलावा अन्य विषयों जैसे राजनीतिशास्त्र, समाजशास्त्र आदि में भी प्रयुक्त हो रहा है।

6.2 द्यूत क्रीड़ा सिद्धांत

इस द्यूत क्रीड़ा सिद्धांत के प्रारंभिक सूत्रों को ऑगस्टाइन कूर्णो (1838) की अपूर्ण प्रतियोगी बाज़ार की व्याख्या तथा 1944 में प्रकाशित न्यूमैन एवं मॉर्गेन्स्टर्न की रचना 'द थ्योरी ऑफ गेम्स एंड इक्नॉमिक बिहेवियर' में खोजा जा सकता है। अगला अहम् विकास जॉन नैश द्वारा प्रतिपादित 'नैश संतुलन' रहा। द्यूत सिद्धांत का प्रतिपादन मूलतः अनिश्चिततापूर्ण क्रीड़ाओं की समस्याओं के किसी सैद्धांतिक समाधान की खोज की प्रक्रिया में हुआ है। मूलतः इसमें एक औपचारिक कार्यविधि और तकनीकों का समुच्चय होता है जिनसे युक्तिपरक परिवेश में कार्यरत विवेकशील कर्ताओं के बीच

अनुक्रियाओं (interaction) का अध्ययन किया जाता है। कर्ता की 'विवेकशीलता' का तात्पर्य है कि वह ऐसा व्यक्ति है जो समस्त जानकारियों, घटनाओं की संभाव्यताओं, संभावी लागतों और लाभों का प्रयोग करते हुए अपने लिए सभी संभव कार्यों में से ऐसे कार्य का संपादन करता है जिससे उसके प्रत्याशित परिणाम इष्टतम हो सके। यहाँ "युक्तिस्तरीय परिदृश्य" की परिभाषा यही है कि एक व्यक्ति के कार्यों के अन्य व्यक्तियों के प्रतिलाभों या उपयोगिता स्तरों पर प्रभाव होते हैं। हम अनेक आर्थिक, राजनैतिक और सामाजिक संदर्भों में मानवीय व्यवहार के प्रतिमानों का निरूपण द्यूत क्रीड़ा सिद्धांतों के अनुप्रयोगों द्वारा कर सकते हैं। ये द्यूत क्रीड़ा सिद्धांत जटिल युक्तिस्तरीय परिदृश्यों का सहज सुगम्य निरूपण कर सकते हैं। जैसे कि हमने पूर्ण प्रतियोगिता, एकाधिकार एवं एकाधिकारी प्रतियोगिता में किया था, द्यूत क्रीड़ा सिद्धांत भी युक्तिस्तरीय दशाओं के एक गणितीय निरूपण से प्राप्त भाष्यांतर विशेष का प्रयोग कर पूर्व प्रयुक्त विधियों का सामान्यीकरण करता है। आइये, अब इस विषय से संबद्ध कुछ प्रारंभिक विचारों पर चर्चा करें।

6.3 एक द्यूत क्रीड़ा

एक द्यूत एक युक्तिपरक प्रावस्था (strategic situation) का सार स्वरूप है। इसे ऐसी प्रावस्था के रूप में परिभाषित किया जाता है जहाँ दो या दो से अधिक कर्ता या खिलाड़ी हों जो अनेक युक्तियों में से अपनी-अपनी पसंद की युक्ति चुन सकते हैं। प्रत्येक खिलाड़ी द्वारा चुनी गई युक्तियाँ ही द्यूत के परिणाम का निर्धारण करती हैं और प्रत्येक संभव परिणाम में सभी खिलाड़ियों के लिए कुछ प्रतिदान (pay off) होता है। अतः एक युक्तिपरक प्रावस्था को एक ऐसी द्यूत क्रीड़ा के रूप में प्रतिमानित या निरूपित कर सकते हैं जिसमें तीन घटक हों : (i) खिलाड़ी, (ii) युक्तियाँ, तथा (iii) प्रतिदान।

- i) **खिलाड़ी** : ये द्यूत खेलने वाले भागीदार हैं। ये फर्म, व्यक्ति या देश, सभी वे इकाइयाँ हो सकती हैं जो किसी युक्ति का प्रयोग कर पाने में सक्षम हों। एक द्वैधाधिकारी द्यूत में खिलाड़ी दो फर्म थीं। प्रायः यदि किसी द्यूत में 'n' खिलाड़ी हों तो उन्हें 1,2,3...n क्रमांक दिए जाते हैं जिन्हें 'i' द्वारा दर्शाया जाता है— अर्थात् i-वाँ खिलाड़ी आदि।
- ii) **युक्तियाँ** : ये खिलाड़ियों को उपलब्ध करने योग्य कार्य हैं। उदाहरण के लिए, एक कूर्णो द्यूत में प्रत्येक फर्म अपने प्रतिद्वंद्वी की उत्पादित मात्रा को स्थिर मानते हुए अपने उत्पादन की मात्रा का चयन कर सकती है। 'n' खिलाड़ी द्यूत में हम i-वें खिलाड़ी को उपलब्ध युक्तियों के समुच्चय को S_i द्वारा तथा इस समुच्चय के प्रत्येक अवयव को $s_i \in S_i$ द्वारा व्यक्त करते हैं।
- iii) **प्रतिदान (Pay-offs)**: ये विभिन्न खिलाड़ियों को द्यूत के अंत में होने वाली प्रतिप्राप्तियाँ हैं। उदाहरणार्थ एक लाभ को अधिकतम कर रही फर्मों के द्यूत में प्रतिदान उन्हें मिले लाभ ही होंगे। एक 'n' खिलाड़ी द्यूत में i-वें व्यक्ति का प्रतिदान फलन $U_i(s_1, s_2, s_3, \dots, s_n)$ द्वारा दर्शाया जाता है जहाँ $(s_1, s_2, s_3, \dots, s_n)$

उन युक्तियों का समूह है जो प्रत्येक खिलाड़ी द्वारा चुनी गई हैं – (एक युक्ति प्रतिव्यक्ति के नियम के अनुसार)। यहाँ U_i खिलाड़ी i को प्राप्त प्रतिदान है जो $(S_1, S_2, S_3, \dots, S_n)$ का फलन है।

उपर्युक्त 3 घटकों के साथ-साथ द्यूत में वह जानकारी भी निर्दिष्ट होती है जो प्रत्येक खिलाड़ी को अपने कार्य का चयन करते समय सुलभ होती है। सामान्यतः यह माना जाता है कि प्रत्येक खिलाड़ी को न केवल द्यूत के नियम बल्कि यह भी ज्ञात होता है कि अन्य खिलाड़ी क्या कुछ जानते हैं। जानकारी के अन्य आयाम खिलाड़ियों के चाल के समय बिंदु आदि के अनुसार प्रत्येक द्यूत में बदलते रहते हैं। एक द्यूत स्थैतिक (समसामयिक) अथवा गत्यात्मक (क्रमिक चाल) हो सकता है। यह इस बात पर निर्भर करता है कि खिलाड़ियों का सूचना आधार कैसा है अथवा खिलाड़ियों की युक्तियों का समय क्या है? एक समसामयिक चाल वाले द्यूत में किसी खिलाड़ी को यह ज्ञात नहीं होता कि प्रतिपक्षी क्या चाल चल रहा है। किंतु एक अनुक्रमीय द्यूत में पहला खिलाड़ी तो यह नहीं जानता कि दूसरा क्या करेगा, पर दूसरे को यह पता होता है कि पहले ने क्या किया है।

6.4 द्यूत क्रीड़ा भेद

6.4.1 असहयोगात्मक बनाम सहयोगात्मक द्यूत

द्यूत सिद्धांत की दो प्रशाखाएँ हैं : सहयोगात्मक एवं असहयोगात्मक द्यूत सिद्धांत। सहयोगात्मक द्यूत में खिलाड़ियों के समूह या उपसमूह एक ऐसा बाध्यताकारी समझौता करके कार्य प्राप्त करते हैं कि द्यूत का परिणाम समूचे समूह के लिए श्रेष्ठतम होगा—फिर वे उस प्रतिदान को आपस में समान रूप से बांट लेते हैं। इसके विपरीत एक असहयोगात्मक द्यूत में प्रत्येक खिलाड़ी केवल स्वहित से प्रेरित होता है, वह केवल ऐसा व्यवहार करता है जो उसकी अपनी उपयोगिता को अधिकतम करता है, उसे अपने निर्णय के अन्य खिलाड़ियों पर होने वाले प्रभावों की कोई चिन्ता नहीं होती। किंतु फिर भी समूचे द्यूत का परिणाम तो खिलाड़ियों द्वारा इसी प्रकार स्वतंत्र रूप से चुनी गई युक्तियों से ही निर्धारित होता है। परिणामस्वरूप यहाँ भी प्रत्येक खिलाड़ी का क्षेम आंशिक रूप से अवश्य अन्य खिलाड़ियों के निर्णयों पर निर्भर करता है। सहयोगात्मक द्यूत का एक उदाहरण दो फर्में द्वारा किसी नवीन प्रौद्योगिकी के विकास में निवेश है। असहयोगात्मक द्यूत का उदाहरण ऐसी दो फर्में होंगी जो अपने कीमत निर्णय लेते समय दूसरी फर्म के व्यवहार का हिसाब जरूर लगा लेती हैं।

स्वहित व्यवहार सदैव खिलाड़ियों के सामूहिक हित को श्रेष्ठतम स्तर तक नहीं ले जा पाता। इस विषय में हम विभिन्न द्यूत प्रकार भेदों के उदाहरण देते समय आगे चर्चा करेंगे। जहाँ अर्थशास्त्र में असहयोगात्मक द्यूत सिद्धांत का अधिक प्रयोग किया जाता है वहीं सौदेबाजी और राजनीतिक प्रक्रियाओं के निरूपण में सहयोगात्मक द्यूत सिद्धांत का प्रयोग किया जाता है।

6.4.2 संपूर्ण एवं अपूर्ण सूचना द्यूत

संपूर्ण सूचना द्यूतों में प्रतिप्राप्तियों, युक्तियों और खिलाड़ियों के भेदों की जानकारी सभी को होती है। पूर्ण सूचना का अर्थ है कि प्रत्येक खिलाड़ी को पूरे द्यूत के दौरान चालों के अनुक्रम, युक्तियों और प्रतिप्राप्तियों का ज्ञान रहता है। वे इस जानकारी का प्रयोग द्यूत के अंत में प्राप्त होने वाली अपनी प्रतिप्राप्तियों को अधिकतम करने हेतु योजना बनाने में सक्षम होते हैं। संतुलन समाधान की संकल्पनाएं नैश संतुलन या फिर उपद्यूत संपूर्ण नैश संतुलन की संकल्पनाएं हैं— ये इस बात पर निर्भर हैं कि द्यूत एक साथ चाल वाले स्थैतिक स्वरूप का है या फिर अनुक्रमिक चाल वाला गत्यात्मक है। हम आगामी उपभागों में इन संकल्पनाओं से आपका परिचय कराएंगे।

किसी अपूर्ण सूचना द्यूत में खिलाड़ियों को अपने प्रतिद्वंद्वियों के विषय में पूरी जानकारी नहीं होती। कुछ खिलाड़ियों को निजी या गोपनीय जानकारी उपलब्ध होती है और उनके व्यवहार के प्रति अपनी प्रत्याशाएं नियत करते समय अन्य खिलाड़ियों को इस तथ्य पर भी अवश्य ध्यान देना चाहिए। इसका एक सीधा-सा उदाहरण तो नीलामी है : प्रत्येक खिलाड़ी को अपने उपयोगिता फलन (अर्थात् संदर्भगत वस्तु के मूल्यमान) का ज्ञान होता है। किंतु उसे अन्य खिलाड़ियों के उपयोगिता फलन ज्ञात नहीं होते। द्यूतों के समसामयिक (स्थैतिक) या अनुक्रमिक (गत्यात्मक) चाल स्वरूप के अनुसार ही इनकी संतुलन समाधान संकल्पनाएं भी बेजियन नैश संतुलन या संपूर्ण बेजियन संतुलन बन जाती है।

6.4.3 शून्य योग बनाम अशून्य योग द्यूत

एक शून्य योग द्यूत में एक खिलाड़ी का लाभ दूसरे खिलाड़ी की समतुल्य हानि की लागत पर ही होता है। दोनों के प्रतिदानों का योग शून्य होता है। इसका एक आर्थिक उदाहरण एक क्रेता तथा विक्रेता के बीच लेन-देन हो सकता है। एक अशून्य योग द्यूत में किसी का प्रतिदान किसी अन्य को पहुँची हानि के कारण पैदा नहीं होता। इसका एक सहज उदाहरण किसी वस्तु के विज्ञापन में वृद्धि से सभी विक्रेताओं के लाभ में वृद्धि हो सकती है।

6.4.4 समसामयिक बनाम क्रमिक चाल द्यूत

द्यूत सिद्धांत में चालों का अनुक्रम महत्त्वपूर्ण होता है। किसी द्यूत में खिलाड़ी एक साथ अपनी चालें चल सकते हैं— या फिर वे एक के बाद दूसरे का पालन करते हैं। दोनों दशाओं में द्यूत के परिणाम अलग-अलग होते हैं। सम-सामयिक द्यूत में चाल चलते समय किसी को यह ज्ञात नहीं होता कि दूसरा क्या करने वाला है— अर्थात् वह प्रतिद्वंद्वी की युक्ति जाने बिना अपनी युक्ति का चयन करते हैं। उदाहरण के लिए, कूर्णों के अल्पाधिकार प्रतिमान में सभी फर्में अपने-अपने अधिकतम लाभ उत्पादन स्तर का एक साथ निर्धारण करती हैं। इसके विपरीत एक अनुक्रमवाची चाल द्यूत में चालों का क्रम सामने आ जाता है। यहाँ जब पहला खिलाड़ी अपनी चाल चलता है — तो दूसरे को उसका ज्ञान हो जाता है और उसको ध्यान में रखते हुए वह अपना निर्णय

लेता है – उसके बाद चलने वाले खिलाड़ी को सभी पहले चली गई चालों (अर्थात् अपनाई गई युक्तियों) की जानकारी होती है। इन अवलोकनों का प्रयोग कर वह (बाद में चलने वाला) खिलाड़ी अधिक परिष्कृत युक्ति बना सकता है— उसके लिए पूर्व निर्दिष्ट कोई युक्ति चुन लेना आवश्यक नहीं रहता। इस प्रकार विभिन्न खिलाड़ियों की युक्तियाँ पूर्ववर्ती खिलाड़ियों की युक्तियों पर निर्भर हो जाती हैं।

6.5 द्यूत निरूपण के वैकल्पिक स्वरूप

द्यूत निरूपण की दो मुख्य विधियाँ हैं – (i) सामान्य या युक्ति आधारित स्वरूप; तथा विस्तृत स्वरूप। सामान्य स्वरूप में द्यूत एक प्रतिप्राप्ति आव्यूह में पंक्तियों और स्तंभों द्वारा दर्शाया जाता है। पारंपरिक रूप से किसी दो-खिलाड़ी द्यूत में पंक्तियाँ पहले खिलाड़ी तथा स्तंभों को दूसरे खिलाड़ी के लिए रखे जाते हैं। कोष्ठकों में दोनों खिलाड़ियों को प्राप्य प्रतिप्राप्तियाँ दिखाई जाती हैं। विस्तृत स्वरूप एक चित्रांकन विधि से नियमों को दर्शाता है। चित्र के मुख्य स्वरूप को द्यूत वृक्ष कहते हैं। द्यूत मूल प्रथम खिलाड़ी से प्रारंभ होता है और उसे सुलभ विकल्प उस मूल से उद्गमित होने वाली शाखाओं द्वारा दर्शाए जाते हैं। एक शाखा के अंत पर दूसरा खिलाड़ी अपना चयन करता है और वह शाखा आगे अन्य शाखाओं में विभाजित हो जाती है। द्यूत यह भी निर्दिष्ट करता है कि खिलाड़ी किस क्रम में अपने चयन करते हैं, प्रत्येक खिलाड़ी कितनी बार चयन कर सकता है और अंततः प्रत्येक को चयन-श्रृंखला के अंत पर क्या प्रतिप्राप्ति होगी। सामान्य स्वरूप का प्रयोग एक साथ दोनों खिलाड़ियों द्वारा चयन करने की स्थिति के लिए प्रयोग किया जाता है जबकि विस्तृत स्वरूप एक साथ या अनुक्रमिक दोनों प्रकार के युक्ति चयनों की स्थितियाँ दर्शा सकता है। आइए हम जाने माने “बंदी की दुविधा” द्यूत का प्रयोग कर इन दोनों द्यूत स्वरूपों की व्याख्या का प्रयास करें।

बंदी की दुविधा

किसी अपराध के लिए दो संदिग्धों 1 तथा 2 को हिरासत में लिया गया है। उन्हें पृथक्-पृथक् एवं बिल्कुल एकांत में रखा गया है और उनके बीच परस्पर संवाद की कोई संभावना नहीं है। न्याय दण्डाधिकारी दोनों से अलग-अलग बात करता है और उनसे भेदिया बन जाने को कहता है। उसका प्रस्ताव है कि यदि तुम अपराध स्वीकार कर लेते हो तो तुम्हें मुक्त कर दिया जाएगा तथा दूसरे को 4 वर्ष का कारावास दिया जाएगा। यदि दोनों ही इस प्रस्ताव को स्वीकार कर अपराध स्वीकारोक्ति कर लेते हैं तो उन्हें तीन-तीन वर्ष का कारावास होगा। यदि दोनों चुप रहते हैं तो उन्हें एक-एक वर्ष का ही कारावास दिया जा सकता है। अतः दोनों खिलाड़ियों के पास दो-दो युक्तियाँ या चालें हैं : N स्वीकारोक्ति नहीं तथा C स्वीकारोक्ति और वे एक साथ अपना चयन कर सकते हैं।

6.5.1 एक द्यूत का सामान्य स्वरूप निरूपण

इस स्थिति को एक सामान्य युक्ति आधारित रूप में दर्शा सकते हैं जिसके घटक तत्व ये हैं :

खिलाड़ी : दो संदिग्ध बंदी 1 और 2

युक्ति : प्रत्येक खिलाड़ी N या C के समुच्चय से अपना चयन कर सकता है

प्रतिप्राप्ति : कारावास का दण्ड वर्षों में

खिलाड़ी 2

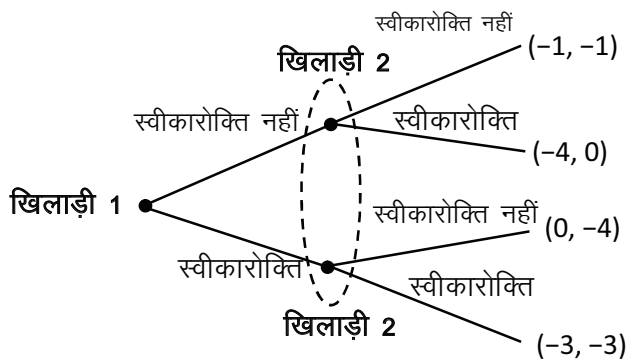
	स्वीकारोक्ति नहीं	स्वीकारोक्ति
खिलाड़ी 1	स्वीकारोक्ति नहीं (-1, -1)	स्वीकारोक्ति (-4, 0)
	स्वीकारोक्ति	स्वीकारोक्ति नहीं (0, -4)
		स्वीकारोक्ति

चित्र 6.1 : प्रतिप्राप्ति आव्यूह

उपर्युक्त चित्र के प्रत्येक कोष्ठक में दो-दो अंक दिए गए हैं। ये क्रमशः पहले और दूसरे खिलाड़ी की विभिन्न युक्तियों से प्रतिप्राप्तियाँ हैं। ऋणात्मक चिन्ह केवल यही दर्शाता है कि बंदीगृह में रहना कोई सकारात्मक लाभ नहीं है। दूसरे शब्दों में इन कोष्ठकों के अंक क्रमशः पहले और दूसरे खिलाड़ी को मिली दंड रूपी प्रतिप्राप्ति दर्शा रहे हैं। यदि हम (स्वीकारोक्ति नहीं, स्वीकारोक्ति नहीं) की क्रिया पर ध्यान दें तो इसका संबंध (-1, -1) की प्रतिप्राप्ति से पाते हैं अर्थात् दोनों खिलाड़ी एक साथ स्वीकारोक्ति नहीं करने का निर्णय करते हैं, इस दशा में उन दोनों को एक-एक वर्ष तक बंदीगृह में बिताना ही पड़ेगा। पहली पंक्ति, दूसरे स्तंभ में पहला खिलाड़ी अपराध स्वीकार नहीं करता किंतु दूसरा अपराध में सहभागी होना स्वीकार कर उसके विरुद्ध साक्षी बन जाता है – परिणामस्वरूप पहले को 4 वर्ष का कारादंड मिलता है तथा दूसरा मुक्त हो जाता है।

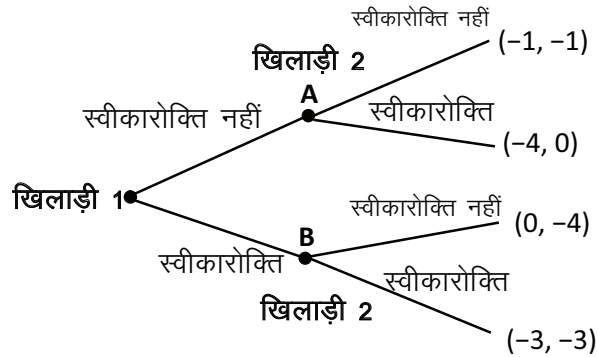
6.5.2 एक द्यूत का विस्तृत स्वरूप निरूपण

एक द्यूत वृक्ष द्वारा हम दोनों खिलाड़ियों द्वारा एक साथ चाल चलने का द्यूत भी दर्शा सकते हैं। चित्र 6.2 में प्रत्येक गहरा बिंदु निर्णय बिंदु कहलाता है। पहली चाल पहले खिलाड़ी की है – जो स्वीकारोक्ति करने या नहीं करने का निर्णय कर सकता है। अगली चाल खिलाड़ी 2 की होगी, उसे भी यही दो विकल्प सुलभ हैं। वृक्ष के अंतिम पल्लव पर ही द्यूत की प्रति प्राप्ति दिखाई जा रही है ताकि ध्यान रहे कि बंदी की दुविधा एक सम-सामयिक रूप से खेला जाने वाला द्यूत है, खिलाड़ी 2 के निर्णय बिंदुओं पर एक बिंदु-वृत्त बनाया गया है— अर्थात् यह खिलाड़ी यह नहीं देख पा रहा कि पहले खिलाड़ी ने क्या चाल चली है। वह अपना निर्णय यह जाने बिना ही करता है कि पहले खिलाड़ी ने स्वीकारोक्ति की है या नहीं। इस बिंदु वृत्त को खिलाड़ी-2 का सूचना समुच्चय भी कहा जाता है।



चित्र 6.2

चित्र 6.2 एक समसामयिक द्यूत की मान्यता से संगतिपूर्ण है। यदि इसी द्यूत को आनुक्रमिक द्यूत की भांति निरूपित करना चाहें तो हमें ये मानना होगा कि दूसरा खिलाड़ी पहले खिलाड़ी की चाल को जानते हुए अपना निर्णय लेता है। फिर हमें दूसरे खिलाड़ी के निर्णय बिंदुओं पर बिंदु वृत्त बनाने की आवश्यकता नहीं रहेगी, अर्थात् हमें चित्र 6.3 मिलेगा :



चित्र 6.3

सामाजिक विज्ञान विषयों में बंदी की दुविधा द्यूत का व्यापक रूप से अध्ययन किया जाता है। यह दोनों खिलाड़ियों के लिए स्वहित एवं सामूहिक हित के बीच के तनाव की उस अवस्था को चित्रित करता है जो हमें अपने आस-पास निरंतर दिखाई देती रहने के कारण अध्ययन-संवीक्षण करने को विवश कर देती है। इसे समझ लेना ही हमें एक असहयोगात्मक द्यूत में प्रति-उत्पादक परिणामों की वास्तविकता के दर्शन कराता है।

6.6 एक द्यूत सिद्धांत समस्या का समाधान

पिछले भाग के द्यूत के निरूपण के स्वरूपों पर चर्चा के बाद अब हम इस बात पर आते हैं कि द्यूत सिद्धांत समस्या का समाधान या हल किस प्रकार प्राप्त किया जाता है। हम विभिन्न प्रकार की युक्तियों विषयक आधारिक संकल्पनाओं की चर्चा से अपनी बात आरंभ करते हैं।

6.6.1 दमित युक्तियां

हम पूर्व परिचित बंदी की दुविधा से ही चर्चा आरंभ कर रहे हैं। विभिन्न निर्णय विकल्पों पर ध्यान दें कि हमें यह स्पष्ट हो जाएगा कि यदि पहले खिलाड़ी ने स्वीकारोक्ति का विकल्प चुना है तो दूसरे का विकल्प भी उसी से तय हो जाएगा। वह भी स्वीकारोक्ति कर 3 वर्ष का दंड पाना बेहतर समझेगा न कि 4 वर्ष का। इसी प्रकार यदि पहला स्वीकारोक्ति नहीं करना चुनता है तो उसके विपरीत जाकर दूसरा तुरंत मुक्त होना चाहिए न कि उसका भी स्वीकारोक्ति कर अधिक सजा पाना। दूसरे शब्दों में पहले (दूसरे) खिलाड़ी की प्रत्येक युक्ति के लिए दूसरे (पहले) खिलाड़ी की प्रतिप्राप्ति स्वीकारोक्ति की अपेक्षा अस्वीकारोक्ति से कम रहेगी। इसीलिए अस्वीकारोक्ति की युक्ति पर स्वीकारोक्ति की युक्ति भारी पड़ रही है। कोई भी विवेकशील खिलाड़ी अपनी धनात्मक प्रतिप्राप्ति को अधिकतम (ऋणात्मक को न्यूनतम)

करना चाहता है – वह किसी पूर्णतः दमित युक्ति का चयन नहीं करेगा। इस प्रकार, बंदी की दुविधा में विवेकशील खिलाड़ी स्वीकारोक्ति का विकल्प चुन लेंगे और परिणाम होगा (स्वीकारोक्ति, स्वीकारोक्ति) तथा इससे मिली प्रतिप्राप्तियाँ होंगी $(-3, -3)$ । यह परिणाम (अस्वीकारोक्ति, अस्वीकारोक्ति) युक्ति चयन की तुलना में इष्टतम नहीं माना जा सकता— उस अवस्था में प्रतिप्राप्तियाँ $(-1, -1)$ ही रहतीं। दूसरे शब्दों में यदि दोनों अस्वीकारोक्ति की युक्ति अपनाते तो उन्हें केवल एक-एक वर्ष का कारावास मिलता किंतु वे स्वीकारोक्ति का विकल्प चुन बैठते हैं और तीन-तीन वर्ष की सज़ा भुगतते हैं। हम नैश संतुलन के संदर्भ में इस विषय में कुछ और विस्तार से चर्चा करेंगे।

सामान्यतः किसी n -खिलाड़ी घूत में s'_i तथा s''_i ; दोनों युक्तियाँ किसी खिलाड़ी i के युक्ति समुच्चय S_i की घटक हैं और s'_i युक्ति s''_i द्वारा दमित युक्ति होगी यदि खिलाड़ी i की s'_i से प्रतिप्राप्ति s''_i से संभव प्रतिप्राप्ति से, अन्य खिलाड़ियों की युक्तियों के प्रत्येक संयोजन की अवस्था में अधिक हो (अर्थात् अन्य खिलाड़ी चाहे जो युक्तियाँ अपनाएं)।

6.6.2 प्रबल युक्तियाँ

किसी खिलाड़ी के लिए एक प्रबल युक्ति वह होती है जो उसे श्रेष्ठतम प्रतिप्राप्ति प्रदान करे, उसके प्रतिद्वंद्वी चाहे जो भी युक्ति अपनाते रहें। अर्थात् यह प्रतिद्वंद्वियों की सभी संभव युक्तियों के लिए उसकी सबसे अच्छी प्रतिक्रिया है। सामान्यतः खिलाड़ी i की प्रबल युक्ति को s_i^* द्वारा दर्शाया जाएगा यदि वह इस s_i^* का प्रयोग करते हुए प्रतिद्वंद्वियों द्वारा किये गए किसी भी युक्ति प्रयोग के बावजूद श्रेष्ठतम प्रतिप्राप्ति पा लेता है।

कृपया ध्यान रखें : यदि s_i^* उक्त खिलाड़ी की प्रबल युक्ति है तो उसे सुलभ अन्य सभी युक्तियाँ दमित युक्तियाँ बन जाती हैं। किंतु यह भी संभव है कि खिलाड़ी के पास कोई प्रबल युक्ति नहीं हो और फिर भी उसके पास कुछ दमित युक्तियाँ हो सकती हैं।

6.6.3 प्रबल युक्ति संतुलन

एक विवेकशील खिलाड़ी से आशा की जाती है कि वह अपनी प्रबल युक्ति का प्रयोग करेगा। यदि सभी खिलाड़ियों के पास प्रबल युक्तियाँ हों तो यही उनके लिए विवेकशील होगा कि वे अपनी-अपनी प्रबल युक्ति का ही प्रयोग करें। ऐसी दशा में हमें प्रबल युक्ति संतुलन ही प्राप्त होगा। बंदी की दुविधा के संदर्भ में दोनों खिलाड़ियों की प्रबल युक्ति “स्वीकारोक्ति” करना है – अर्थात् दूसरा कुछ भी करें, प्रत्येक को ‘स्वीकारोक्ति’ ही श्रेष्ठतम विकल्प लगता है। अतः बंदी की दुविधा का प्रबल युक्ति समाधान (स्वीकारोक्ति, स्वीकारोक्ति) यह प्रतिप्राप्ति $(-3, -3)$ प्रदान करता है।

6.6.4 दृढ़तापूर्वक दमित युक्तियों की आवर्तिक निरस्ति

अब दृढ़तापूर्वक दमित युक्तियों की आवर्तिक निरस्ति की विधि अपनाते हुए द्यूत सिद्धांत समस्या के समाधान की ओर चलते हैं। हमने दमित युक्तियों से अभिप्राय पर उपभाग 6.6.1 में चर्चा की थी। यह दमितावस्था दृढ़ अथवा मृदु हो सकती है। एक खिलाड़ी 'i' के युक्ति समुच्चय S_i में s'_i तथा s''_i के बीच s'_i को s''_i द्वारा दमित माना जाता है यदि अन्य खिलाड़ियों द्वारा चुनी गई प्रत्येक युक्ति के लिए खिलाड़ी i को s''_i से प्राप्त प्रतिप्राप्ति s'_i से प्रतिप्राप्ति से अधिक हो। दूसरी ओर s'_i को मृदुल रूप से दमित माना जाएगा यदि s'_i से प्रतिप्राप्ति कम से कम s'_i की प्रतिप्राप्ति जितनी अवश्य हो। स्वाभाविक रूप से दमित युक्ति s'_i है और s''_i प्रबल युक्ति है।

दमित युक्तियों की आवर्तिक निरस्ति प्रतिद्वंद्वी की अभी तक निरस्त न की गई युक्तियों की अपेक्षा (अधिक) दमितयुक्तियों को तब तक क्रमिक रूप से इस प्रकार निरस्त करते जाना है कि कोई दृढ़तापूर्वक दमित युक्ति नहीं बचे। इस विधि का सारा तर्क आधार यही है कि कोई विवेकशील खिलाड़ी तब तक किसी दमित युक्ति का प्रयोग नहीं करना चाहेगा जब कि उसे उससे बेहतर (प्रतिद्वंद्वियों द्वारा अपनाई गई प्रत्येक युक्ति के लिए) प्रतिप्राप्ति देने वाली युक्ति विद्यमान हो। अतः एक दृढ़तापूर्वक दमित युक्ति का पूर्णतः त्याग कर, अपेक्षाकृत कम दमित युक्तियों के साथ ही द्यूत खेलना सुरक्षित रहता है। आइए इस द्यूत पर विचार करें जहाँ खिलाड़ी 1 तथा 2 हैं और उनकी युक्तियाँ क्रमशः P, Q तथा A, B, C हैं।

		खिलाड़ी 2		
		A	B	C
खिलाड़ी 1	P	(6,6)	(1, 11)	(4, 5)
	Q	(4,1)	(3,3)	(5, 6)

हम किसी भी खिलाड़ी की दमित युक्ति की निरस्ति द्यूत का आरंभ कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, खिलाड़ी-2 के पास 3 युक्तियाँ हैं— A, B और C। मान लें कि पहला खिलाड़ी युक्ति P अपनाता है तो खिलाड़ी 2 को A, D और C से क्रमशः 6, 11 और 5 की प्राप्ति हो सकती है। यहां स्पष्टतः A तथा C दमित युक्तियाँ हैं और B प्रबल है, क्योंकि उससे प्रतिप्राप्ति (11) अधिकतम है। यदि पहला खिलाड़ी Q अपनाता है तो खिलाड़ी 2 की प्रतिप्राप्तियाँ क्रमशः 1, 3 या 6 हो सकती हैं। स्पष्टतः यहाँ A तथा B युक्ति C से दमित रहती है। लेकिन A तो दोनों ही दशाओं में दमित युक्ति ही रहती है। अतः उसे निरस्त कर द्यूत का पुनर्विन्यास इस प्रकार किया जा सकता है :

		खिलाड़ी 2	
		B	C
खिलाड़ी 1	P	(1, 11)	(4, 5)
	Q	(3,3)	(5, 6)

अब यदि खिलाड़ी 2 युक्ति B अपनाता है तो खिलाड़ी 1 को P से 1 तथा Q से 3 की प्रतिप्राप्ति होगी। अतः वह P को Q से दमित पाता है। यदि खिलाड़ी 2 युक्ति C अपनाता तो खिलाड़ी 1 की P तथा Q से प्रतिप्राप्तियाँ क्रमशः 4 तथा 5 होंगी। पुनः P युक्ति Q द्वारा दमित है। हम पाते हैं कि दोनों ही दशाओं में युक्ति P Q द्वारा दमित है। अतः P को निरस्त कर हम द्यूत को इस प्रकार दर्शा सकते हैं :

		खिलाड़ी 2	
		B	C
खिलाड़ी 1	Q	(3,3)	(5, 6)

खिलाड़ी 1 के पास तो एक ही युक्ति Q बची है। खिलाड़ी 2 भी केवल C का उपयोग करना श्रेयस्कर समझेगा क्योंकि यहां उसकी प्रतिप्राप्ति 6 युक्ति B से संभव 3 से अधिक है। अतः संतुलन युक्ति निरूपण (Q, C) प्राप्त हो जाता है जहाँ प्रतिप्राप्ति (5, 6) होती है।

6.6.5 नैश संतुलन

दमित युक्तियों की उपस्थिति कुछ संभावित परिणामों को द्यूत से बाहर निकाल कर हमें समाधान तक पहुंचने में सहायक हो जाती है। किंतु कुछ ऐसे द्यूत भी हो सकते हैं जहां कोई भी युक्ति दमित (या फिर प्रबल) नहीं हो। अतः किसी संभावित परिणाम को निरस्त का विकल्प ही नहीं होता, वहां द्यूत का एक अधिक व्यापक स्तरीय समाधान संभव हो सकता है जिसे नैश संतुलन कहा जाता है। नैश संतुलन वहां होता है जहाँ प्रत्येक खिलाड़ी अपने-अपने युक्ति समुच्चय में इस प्रकार अपनी इष्टतम युक्ति चुनता है कि किसी को भी प्रतिद्वंद्वियों की दी हुई युक्तियों के साथ अपनी चयनित युक्ति को परिवर्तित करने की कोई संप्रेरणा नहीं होती। दूसरे शब्दों में, यदि अन्य सभी खिलाड़ी अपनी-अपनी युक्ति पर दृढ़ रहते हैं तो किसी भी खिलाड़ी को अपनी चयनित से किसी अन्य युक्ति को अपनाने से अधिक प्रतिप्राप्ति नहीं हो सकती। यदि किसी वस्तु की उत्पादक दो फर्मों का संदर्भ लें तो नैश संतुलन वहाँ होगा जहां दोनों के स्तरों के लिए गए समुच्चयों के परिदृश्य में कोई भी फर्म अकेले अपना उत्पादन स्तर को परिवर्तित कर अधिक लाभ नहीं उठा पाती। दूसरे शब्दों में, कोई भी फर्म दूसरी फर्म के उसके निर्णय पर जमे रहने की दशा में अपना उत्पादन स्तर बदल कर लाभान्वित नहीं हो सकती।

सामान्यतः एक n -खिलाड़ी द्यूत में युक्ति निरूपण $(s_1^*, s_2^*, s_3^*, \dots, s_n^*)$ को नैश संतुलन माना जाता है यदि प्रत्येक i -वें खिलाड़ी की युक्ति s_i^* अन्य सभी $n - 1$ की युक्तियों के आलोक में उसकी इष्टतम युक्ति हो। इस संतुलन संकल्पना का आधार प्रत्येक खिलाड़ी द्वारा प्रतिद्वंद्वियों की युक्तियों को सटीक रूप से भॉप लेना ही है। यह दीर्घकाल से चली आ रही पारस्परिक अनुक्रियाओं का परिणाम हो सकता है क्योंकि सभी ये भली-भाँति समझे हुए होते हैं कि किसकी क्या प्रतिक्रियाएँ होती हैं।

आइये, बंदी की दुविधा में नैश संतुलन ज्ञात करें। हम द्यूत के सामान्य स्वरूप पर ही विचार कर रहे हैं :

खिलाड़ी 2

		स्वीकारोक्ति नहीं	स्वीकारोक्ति
		खिलाड़ी 1	स्वीकारोक्ति नहीं
	स्वीकारोक्ति	(0, -4)	(-3, -3)

आइए, अब प्रतिद्वंद्वी खिलाड़ी की श्रेष्ठतम युक्ति के आलोक में प्रत्येक की युक्ति पर विचार करें। यदि खिलाड़ी-2 को विश्वास है कि पहला खिलाड़ी स्वीकारोक्ति नहीं करेगा तो उसकी श्रेष्ठतम प्राप्ति स्वीकारोक्ति होगी – क्योंकि (स्वीकारोक्ति नहीं, स्वीकारोक्ति नहीं) का परिणाम तो (-1, -1) की प्रतिप्राप्ति में होगा, अर्थात् खिलाड़ी-2 को दो वर्ष का अधिक कारावास भुगतना पड़ेगा, यदि दोनों स्वीकार कर लें, जबकि (स्वीकारोक्ति नहीं, स्वीकारोक्ति) की दशा में प्रतिप्राप्ति (-4, 0) होगी— अर्थात् खिलाड़ी-2 कारावास से छूट जाएगा। हमने पहले खिलाड़ी की 'स्वीकारोक्ति नहीं' के लिए दूसरे की प्रतिक्रिया से उसे प्रतिप्राप्ति को रेखांकित किया है। हम इसी प्रकार दोनों ही प्रतिक्रियाओं को रेखांकित करते हुए (स्वीकारोक्ति, स्वीकारोक्ति) की प्रतिप्राप्ति (-3, -3) पर पहुँच जाते हैं।

खिलाड़ी 2

		स्वीकारोक्ति नहीं	स्वीकारोक्ति
		खिलाड़ी 1	स्वीकारोक्ति नहीं
	स्वीकारोक्ति	(<u>0</u> , -4)	(- <u>3</u> , - <u>3</u>)

उपर्युक्त प्रतिप्राप्ति आव्यूह में एक युक्ति संयोजन को नैश संतुलन कहा जाता है यदि वह दूसरे पक्ष की युक्ति के लिए श्रेष्ठतम प्रत्युत्तर हो। दूसरे शब्दों में, कोष्ठकों में दोनों अंक रेखांकित हों— अर्थात् श्रेष्ठतम प्रतियुक्ति हों, तो उसे विशुद्ध नैश संतुलन कहा जाएगा— अर्थात् इस द्यूत में (-3, -3) की प्रतिप्राप्ति [जो स्वीकारोक्ति, स्वीकारोक्ति) के समतुल्य है] ही नैश संतुलन होगी।

किंतु ध्यान दें कि यदि दोनों खिलाड़ी "स्वीकारोक्ति नहीं" की युक्ति अपनाते तो दोनों ही बेहतर स्थिति में रहते। उन्हें एक वर्ष का कारावास ही भुगतना पड़ता। यह नैश संतुलन वाले 3 वर्षीय कारावास, से जो दोनों द्वारा 'स्वीकारोक्ति' की दशा में उन्हें मिलता है, उससे बेहतर स्थिति होती। किंतु ध्यान दें : 'स्वीकारोक्ति नहीं' की युक्ति को "स्थिरतापूर्ण" नहीं कहा जा सकता, इससे विचलित होकर 'स्वीकारोक्ति' करना दोनों को ही श्रेयस्कर लगता है। यदि उनमें कोई बंधनकारी सहमति संभव होती तो वे 'स्वीकारोक्ति नहीं', 'स्वीकारोक्ति नहीं' पर ही कायम रहते और उच्चतम प्रतिप्राप्ति [न्यूनतम कारावास, (-1, -1)] लेते। अतः जहां द्यूत का नियम बंधनकारी सहमति की

अनुमति नहीं देता वहां तो दोनों को ही संभव से निकृष्ट प्रतिप्राप्ति पर संतोष करना पड़ता है। वास्तविक जीवन में अनेक मामलों में बंदी की दुविधा जैसी द्यूत प्रावस्थाएँ हमारे सामने उपस्थित हो जाती हैं। उदाहरण के लिए, एक व्यापार अभिसंधि पर विचार करें जहां इस्पात निर्माता उत्पादन सीमित कर उच्च कीमत और लाभ उठाने पर सहमत होते हैं किंतु ऐसी सहमति अस्थिर रहती है क्योंकि सभी भागीदारों को उच्च कीमत पर अधिक माल बेचकर और अधिक लाभ कमाने का लालच आकर्षक लगता है।

याद रखें :

- 1) द्यूत सिद्धांत में प्रत्येक प्रबल युक्ति संतुलन नैश संतुलन होता है— किंतु किसी नैश संतुलन का प्रबल युक्ति संतुलन होना आवश्यक नहीं।
- 2) यदि दोनों खिलाड़ियों को दो-दो युक्तियाँ सुलभ हों तो एक युक्ति के प्रबल होने पर दूसरी 'दमित' रह जाएगी। किंतु दो से अधिक युक्तियाँ सुलभ होने पर यह आशंका हो जाती है कि खिलाड़ी के पास दमित युक्तियाँ ही हों, प्रबल कोई भी नहीं। यदि किसी खिलाड़ी के पास प्रबल युक्ति नहीं हो तो हम दमित युक्तियों की क्रमिक निरस्ति तथा मूल विश्लेषण के सरलीकरण द्वारा नैश संतुलन की व्युत्पत्ति कर सकते हैं।
- 3) नैश संतुलन को ही संतुलन की परिभाषा के रूप में बड़े व्यापक स्तर पर प्रयोग किया जाता है क्योंकि यह सभी प्रकार के द्यूत परिवेशों में साध्य होता है। ऐसे द्यूत जो प्रारंभ में नैश संतुलन रहित प्रतीत होते हैं वे भी अंततः मिश्रित युक्ति (अगले भाग में चर्चित) नैश संतुलन तक पहुँच ही जाते हैं।

6.6.6 बहुलतापूर्ण संतुलन

नैश संतुलन स्थिरतापूर्ण और विशुद्धतया मिश्रित, दोनों युक्ति परिवेशों में उपलब्ध होने के कारण उपयोगी माना जाता है। किंतु कई बार एक विद्रूप (unpleasant) स्थिति भी उत्पन्न हो जाती है जहां एक से अधिक नैश संतुलन उभर आते हैं। इसका कारण यही है कि किसी अद्वितीय परिणाम की पूर्व कल्पना संभव नहीं हो पाती। इस बहु-संतुलन संभावना को समझाने के लिए हम एक अन्य परिचित द्यूत— "बैटल ऑफ सैक्ससेज" (Battle of sexes) का उदाहरण ले रहे हैं।

बैटल ऑफ सैक्ससेज

इस द्यूत के दो खिलाड़ी पति-पत्नी हैं और दोनों एक मनोरंजक संध्या साथ-साथ बिताना चाहते हैं। किंतु पत्नी एक ओपेरा का लुत्फ उठाना चाहती है तो पति महाशय का मन एक मुक्केबाजी मुकाबले को देखने पर अटका है। इस द्यूत का सामान्य स्वरूप इस प्रकार है :

		पति	
		ओपेरा	मुक्केबाजी
पत्नी	ओपेरा	(3, 1)	(0, 0)
	मुक्केबाजी	(0,0)	(1, 3)

यदि दोनों ओपेरा में पहुँचें तो पत्नी को 3 तथा पति को 1 की आनंदरूपी प्रतिप्राप्ति होती है जबकि दोनों के मुक्केबाजी के अखाड़े की दर्शक दीर्घा में पहुँचने पर पति को 3 व पत्नी को 1 की प्रतिप्राप्ति का अनुभव होता है। यदि दोनों अलग-अलग किंतु अपनी वरीय गतिविधि को देखने जाते हैं तो दोनों को आनंद-अनुभूति शून्य रह जाती है। यहां किसी भी खिलाड़ी के पास कोई प्रबल युक्ति नहीं है। एक व्यक्ति तभी ओपेरा जाएगा जब दूसरा भी साथ जा रहा हो, इसी प्रकार मुक्केबाजी देखने भी साथ ही जाने का आग्रह है। अतः कोई भी प्रबल युक्ति संतुलन विद्यमान नहीं है, यही नहीं, यहां दमित युक्तियों की आनुक्रमिक निरस्ति से भी द्यूत का समाधान नहीं हो पाता। नैश संतुलन में हम पति-पत्नी की सर्वश्रेष्ठ युक्तियों का रेखांकन इस प्रकार कर सकते हैं :

		पति	
		ओपेरा	मुक्केबाजी
पत्नी	ओपेरा	(3, 1)	(0, 0)
	मुक्केबाजी	(0,0)	(1, 3)

दोनों के लिए श्रेष्ठ वही है जो दूसरा कर रहा हो। इससे एक से अधिक विशुद्ध युक्ति नैश संतुलन उदित हो जाते हैं, अर्थात् (ओपेरा, ओपेरा) तथा (मुक्केबाजी, मुक्केबाजी) जिनसे प्रतिप्राप्तियाँ (3, 1) तथा (1, 3) रहती है। ये दोनों सममित हैं अतः इनमें से 'श्रेष्ठतर' का निर्णय संभव नहीं हो पाता।

6.7 मिश्रित युक्तियाँ

अभी तक चर्चित बंदी की दुविधा द्यूत में निश्चितता के साथ एक ही युक्ति का प्रयोग हो रहा था, उसे विशुद्ध युक्ति का नाम दिया गया था। कुछ द्यूत प्रतिमानों में इसकी अपेक्षा अधिक जटिल मिश्रित युक्ति को अपनाया जाता है। इस प्रतिमान में खिलाड़ी विभिन्न संभाव्यताओं के साथ संभव युक्तियों में से चुनाव करते हैं। इस मिश्रित युक्ति की संकल्पना को समझने के लिए हम "सिक्कों के मिलान" के एक प्रतिष्ठित द्यूत पर विचार कर रहे हैं।

सिक्कों के मिलान

इस द्यूत में दोनों खिलाड़ियों के पास एक-एक सिक्का है तथा उन्हें एक साथ वे सिक्के दिखाने होते हैं। यदि दोनों सिक्कों पर एक जैसा चित्र (सन् या बीवी अथवा heads या tail) दिखाई देता है तो दूसरे खिलाड़ी को अपना सिक्का पहले खिलाड़ी

को सौंपना होता है। यदि दोनों सिक्कों के चित्र समान नहीं हों तो पहला खिलाड़ी अपना सिक्का दूसरे को सौंप देगा। इस द्यूत का सामान्य स्वरूप इस प्रकार होगा :

खिलाड़ी 2

		खिलाड़ी 2	
		'सन'	'बीवी'
खिलाड़ी 1	सन	(1, -1)	(-1, 1)
	बीवी	(-1, 1)	(1, -1)

ऐसे द्यूत को शून्य योगी द्यूत कहा जाता है क्योंकि प्रत्येक कोष्ठक में दोनों खिलाड़ियों की प्रतिप्राप्तियों का योगफल शून्य होता है। बंदी की दुविधा में ऐसा नहीं था। यहां भी हम प्रत्येक खिलाड़ी की श्रेष्ठतम प्रतिक्रिया को रेखांकित करने की विधि अपना रहे हैं जैसे कि बंदी की दुविधा में नैश संतुलन पाने के लिए किया गया था। हमें ये परिणाम मिलते हैं :

खिलाड़ी 2

		खिलाड़ी 2	
		'सन'	'बीवी'
खिलाड़ी 1	सन	(<u>1</u> , -1)	(-1, <u>1</u>)
	बीवी	(-1, <u>1</u>)	(<u>1</u> , -1)

यहाँ कोई नैश संतुलन नहीं होता, क्योंकि दूसरा खिलाड़ी जो भी चुने, खिलाड़ी एक भी वही चुनाव करना चाहे— क्योंकि फिर तो दूसरे खिलाड़ी का विकल्प चयन बदल जाएगा। इस प्रकार के विकल्प परिवर्तन अंतहीन श्रृंखला का रूप ले सकते हैं। स्पष्ट है कि जब तक एक खिलाड़ी को दूसरे का चुना हुआ विकल्प मालूम होगा, वह उसे (प्रतिद्वंद्वी को) निकृष्ट अवस्था में पहुँचाने का प्रयास अवश्य करेगा। अतः दोनों ही यही चाहेंगे कि उसकी युक्ति गुप्त रहे। ऐसी ही युक्तियों को मिश्रित युक्ति कहा जाता है और ऐसी प्रावस्था का युक्ति-निरूपण मिश्रित नैश युक्ति संतुलन कहलाता है।

एक मिश्रित युक्ति संतुलन में अपने विकल्प चयन को लेकर सम-अधिमानि रहते हैं। हम पाते हैं कि यदि एक खिलाड़ी का युक्ति चयन यादृच्छिक हो तो दूसरा भी विभिन्न विकल्पों के बीच सम-अधिमानि हो जाता है।

एक मिश्रित युक्ति संतुलन में, प्रत्येक खिलाड़ी अपनी प्रत्येक युक्ति ('हैड' और 'टेल') से संतुलन अवस्था में प्रत्याशित प्रतिप्राप्तियों को एक समान करता है। दूसरे शब्दों में, खिलाड़ी इस विषय में निरपेक्ष होंगे कि वे कौन-सी चाल चलेंगे। यदि खिलाड़ी उपलब्ध चाल विकल्पों के बीच निरपेक्ष नहीं हों तो इसका अर्थ है कि किसी एक विकल्प से उन्हें अन्य विकल्पों की अपेक्षा उच्चतर प्रतिप्राप्ति होगी और वह निश्चित रूप से (संभाव्यता 1 के साथ) उसी चाल को चलेगा — किसी संभाव्यता आबंटन वाली मिश्रित युक्ति का प्रयोग नहीं करेगा।

मिश्रित युक्ति नैश संतुलन हल करने के लिए मान लें कि खिलाड़ी 2 संभाव्यता p के साथ हैड तथा संभाव्यता $1-p$ के साथ टेल चुनता है। इसी प्रकार खिलाड़ी 1 हैड और टेल के लिए संभाव्यताएँ q तथा $1-q$ का प्रयोग करता है। अब पहले खिलाड़ी के लिए जो हैड के लिए एक विशुद्ध युक्ति अपना रहा है तथा खिलाड़ी 2 संभाव्यता आबंटन p एवं $1-p$ वाली मिश्रित युक्ति अपनाए हुए है प्रत्याशित प्रतिप्राप्ति होगी :

$$E_1(H) = p(1) + (1-p)(-1) = 2p - 1$$

इसी प्रकार खिलाड़ी 2 की संभाव्यता आबंटन p और $(1-p)$ वाली मिश्रित युक्ति के सामने खिलाड़ी 1 की टेल के लिए विशुद्ध युक्ति से प्रत्याशित प्रतिप्राप्ति होगी :

$$E_1(T) = p(-1) + (1-p)(1) = -2p + 1$$

यदि खिलाड़ी 1 मिश्रित युक्ति का प्रयोग करें तो उसे संतुलन की अवस्था में हैड और टेल की प्रत्याशित प्रतिप्राप्तियों के बीच निरपेक्ष होना चाहिए। अतः

$$E_1(H) = E_1(T) \Rightarrow 2p - 1 = -2p + 1 \Rightarrow p = \frac{1}{2} \Rightarrow (1-p) = \frac{1}{2}$$

अतः खिलाड़ी 2 हैड और टेल के लिए संभाव्यता आबंटन $p = \frac{1}{2}$, $(1-p) = \frac{1}{2}$ के साथ मिश्रित युक्ति अपनाएगा। खिलाड़ी 1 अनुमान लगाते रहे जाए इसलिए खिलाड़ी 2 को हैड के लिए संभाव्यता $1/2$ तथा टेल के लिए $1/2$ वाली युक्ति अपनानी चाहिए। इसी प्रकार, हम ज्ञात कर सकते हैं कि खिलाड़ी 1 की मिश्रित युक्ति क्या होगी। अब मान लें कि जब पहला खिलाड़ी संभाव्यता आबंटन q और $1-q$ के साथ मिश्रित युक्ति अपना रहा हो तो खिलाड़ी 2 के लिए हैड की विशुद्ध युक्ति का प्रयोग करने पर प्रतिप्राप्ति क्या होगी? यह है :

$$E_2(H) = q(-1) + (1-q)(1) = -2q + 1$$

इसी प्रकार खिलाड़ी 2 की टेल के लिए विशुद्ध युक्ति, जबकि खिलाड़ी 1 ने संभाव्यता आबंटन q तथा $(1-q)$ वाली मिश्रित युक्ति अपनाई हो, से प्रतिप्राप्ति होगी :

$$E_2(T) = q(1) + (1-q)(-1) = 2q - 1$$

यदि खिलाड़ी 1 मिश्रित युक्ति चुनता है तो संतुलन की दशा में उसे हैड और टेल की प्रत्याशित प्रतिप्राप्तियों के बीच निरपेक्ष रहना चाहिए। अतः

$$E_2(H) = E_2(T) \Rightarrow -2q + 1 = 2q - 1 \Rightarrow q = \frac{1}{2} \Rightarrow (1-q) = \frac{1}{2}$$

अतः खिलाड़ी 1 हैड और टेल के लिए संभाव्यता आबंटन $q = \frac{1}{2}$ तथा $(1-q) = \frac{1}{2}$ वाली मिश्रित युक्ति अपनाएगा। अर्थात् वह दूसरे खिलाड़ी को अंदाजा लगाने में ही उलझाए रखने के लिए हैड संभाव्यता $1/2$ तथा टेल संभाव्यता $1/2$ की युक्ति अपनाएगा।

अतः मिश्रित युक्ति नैश संतुलन में खिलाड़ी 1 संभाव्यता $1/2$ के साथ हैड तथा $1/2$ के साथ टेल के लिए खेलेगा तो खिलाड़ी 2 भी इन्हीं संभाव्यताओं के लिए हैड

और टेल के लिए खेलेगा। ऐसे संतुलन को हम $p^*=1/2$ और $q^*=1/2$ से दर्शा सकते हैं।

ध्यान दें कि यदि $E_1(H) \geq E_1(T)$, अर्थात् खिलाड़ी 1 की हैड से प्रतिप्राप्ति टेल की प्रतिप्राप्ति से अधिक (कम) हो तो उस दशा में तर्कशील होने के नाते यह खिलाड़ी मिश्रित युक्ति अपनाने के स्थान पर निश्चितापूर्वक हैड (टेल) के लिए ही खेलता। अतः किसी खिलाड़ी को मिश्रित युक्ति तभी अपनानी चाहिए जब संतुलन की दशा में विभिन्न युक्तियों से उसकी प्रत्याशित प्रतिप्राप्तियाँ समान हों।

मान लें कि खिलाड़ी-2 संभाव्यता p के साथ बीवी विकल्प चुनता है और $1-p$ के साथ सन। तो बीवी चुनकर पहला खिलाड़ी $[(p + -1(1-p))] = 2p - 1$ प्रतिप्राप्ति पा सकता है, यदि वह सन चुने तो उसकी प्रतिप्राप्ति होगी : $[-1p + 1(1-p) = -2p + 1]$

यदि हम चाहते हैं कि पहला खिलाड़ी सन और बीवी के बीच समअधिमानी हो (खिलाड़ी-2 के 'p' विषयक चयन को जानते हुए) तो यह बात सत्य होनी चाहिए :

$$2p - 1 = -2p + 1 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$$

अतः खिलाड़ी-1 को अनुमान लगाने में ही लगाए रखने के लिए खिलाड़ी-2 को सन और बीवी के बीच अपना निर्णय संभाव्यता $\frac{1}{2}$ के अनुसार करना चाहिए। यह मानते हुए कि खिलाड़ी-1 बीवी का चयन प्रायिकता q तथा सन का चयन $(1-q)$ के अनुसार करेगा तो खिलाड़ी-2 की बीवी के चयन पर प्रतिप्राप्तियाँ होगी : $(-1)q + 1(1-q) = 1 - 2q$ तथा 'सन' के चयन पर $1q + -1(1-q) = -1 + 2q$ । दोनों युक्तियों के बीच खिलाड़ी-2 को समअधिमानी बनने की एक ही शर्त है :

$$(1 - 2q) = (-1 + 2q) \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

अतः मिश्रित युक्ति संतुलन में खिलाड़ी-2 भी अपनी युक्तियों का चयन $\frac{1}{2}$ के समान संभाव्यताओं के साथ करेगा।

बोध प्रश्न 1

1) इस दूत आव्यूह में दो खिलाड़ी हैं जिनके पास 2-2 युक्तियाँ हैं :

		खिलाड़ी 2	
		बायें	दाहिने
खिलाड़ी 1	ऊपर	(7,3)	(5,3)
	नीचे	(7,0)	(3, -1)

क) इस दूत को विस्तृत स्वरूप में लिखें।

.....

.....

.....

ख) द्यूत का नैश संतुलन ज्ञात करें।

.....

.....

.....

.....

ग) दोनों खिलाड़ियों की प्रबल युक्तियाँ ज्ञात करें।

.....

.....

.....

.....

2) इस द्यूत में दोनों खिलाड़ियों को 3-3 युक्तियाँ सुलभ हैं।

		खिलाड़ी 2		
		बायें	केंद्र में	दाहिने
खिलाड़ी 1	ऊपर	(4,5)	(1,6)	(5, 6)
	मध्य	(3,5)	(2,5)	(5, 4)
	नीचे	(2, 5)	(2, 0)	(7, 0)

क) इस द्यूत का विस्तृत स्वरूप अंकित करें।

.....

.....

.....

ख) द्यूत का नैश संतुलन आंकलित करें।

.....

.....

.....

3) एक द्यूत का प्रतिप्राप्ति/हानि आव्यूह इस प्रकार है :

		फर्म 'ख'	
		निम्न कीमत	उच्च कीमत
फर्म 'क'	निम्न कीमत	(2,2)	(4,-1)
	उच्च कीमत	(-1,4)	(6,3)

आकलन करें कि :

क) क्या फर्म 'क' के पास कोई प्रबल युक्ति है?

.....

.....

.....

.....

.....

ख) क्या फर्म 'ख' के पास प्रबल युक्ति है?

.....

.....

.....

.....

.....

ग) नैश संतुलन बताएं, यदि कोई हो?

.....

.....

.....

.....

4) इस आव्यूह में एक संगुट के सदस्यों की प्रतिप्राप्तियाँ उन द्वारा छल किए जाने और नहीं किए जाने के अनुसार दर्शाई गई हैं :

		फर्म 'ख'	
		छल	छल नहीं
फर्म 'क'	छल	(3,2)	(9,1)
	छल नहीं	(2,6)	(7,4)

क) नैश संतुलन निर्धारित करें।

.....

.....

.....

ख) यदि निचली पंक्ति के बायीं ओर के कोष्ठक को (4, 4) कर दिया जाए तो क्या होगा?

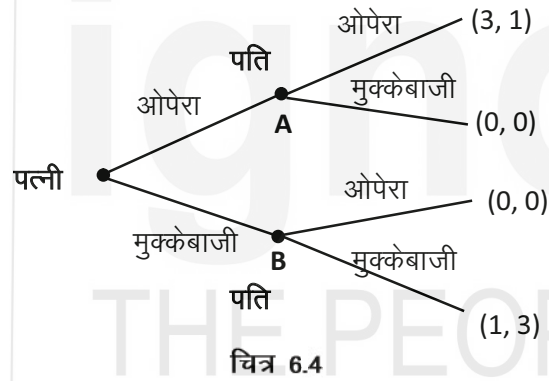
.....

.....

.....

6.8 आनुक्रमिक द्यूत

अभी हम ऐसे द्यूतों पर चर्चा कर रहे थे जहां सभी खिलाड़ी एक साथ निर्णय लेते हैं और उन्हें अपने प्रतिद्वंद्वियों के निर्णयों के विषय में कोई जानकारी नहीं होती। ऐसे द्यूत में समय का कोई महत्त्व नहीं होता। किंतु कितने ही द्यूतों में एक खिलाड़ी अन्य से पहले अपनी चाल चल सकता है। ऐसे द्यूत भी होते हैं जहाँ सभी खिलाड़ी एक निश्चित क्रम या बारी से अपनी-अपनी चाल चलते हैं। अतः उन्हें पूर्ववर्ती खिलाड़ियों के कार्यों के विषय में पूरी जानकारी होती है। दूसरे क्रम पर चाल चलने वाले को पहले खिलाड़ी के निर्णय की जानकारी होती है। वह इस जानकारी को ध्यान में रखकर अपना निर्णय करता है। आइए अब बैटल ऑफ सैक्सेज द्यूत पर फिर से विचार करें। युक्तियां और प्रतिप्राप्तियाँ पूर्ववत् ही हैं किंतु अब पति-पत्नी के निर्णय एक साथ नहीं क्रमिक रूप से होते हैं। पहले पत्नी ओपेरा या मुक्केबाजी देखने जाने का तय करती है और उसे देखकर पति उन्हीं दो विकल्पों के बीच चयन करता है। अब हम उस द्यूत को विस्तृत रूप में दर्शा सकते हैं :



एक और बात पर ध्यान दें : समकालिक चाल वाले द्यूत में दूसरे खिलाड़ी के निर्णय बिंदुओं पर बनाए गए चक्र को अब हटा दिया गया है (चित्र 6.2)। यहां दूसरा व्यक्ति (पति) अपना निर्णय करने से पूर्व पत्नी के निर्णय से परिचित है— अर्थात् उसे ज्ञात है कि वह किस निर्णय बिंदु पर है। पत्नी की संभव युक्तियाँ ओपेरा या मुक्केबाजी अपरिवर्तित रहती हैं— पर अब पति का संभव युक्ति समुच्चय चार युक्तियों तक विस्तृत हो गया है— उसे पत्नी के प्रत्येक चयन के साथ दो में से एक चयन करने का अवसर मिल गया है। यहाँ नैश समाधान पाने के लिए हम द्यूत के सामान्य स्वरूप का ही प्रयोग करते हुए उसमें श्रेष्ठतम प्रतिक्रिया से प्रतिप्राप्ति को रेखांकित कर रहे हैं:

		पति			
		सदा ओपेरा (ओपेरा ओपेरा) (ओपेरा मुक्केबाजी)	पत्नी का अनुसरण (ओपेरा ओपेरा) (मुक्केबाजी मुक्केबाजी)	पत्नी के विपरीत (मुक्केबाजी ओपेरा) (ओपेरा मुक्केबाजी)	सदा मुक्केबाजी (मुक्केबाजी ओपेरा) (मुक्केबाजी मुक्केबाजी)
पत्नी	ओपेरा	(3, 1)	(3, 1)	(0, 0)	(0, 0)
	मुक्केबाजी	(0, 0)	(1, 3)	(0, 0)	(1, 3)

अब हमारे पास एक 2×4 आव्यूह है जहाँ पत्नी को उपलब्ध युक्ति निरूपण $S_W = \{\text{ओपेरा|मुक्केबाजी}\}$ तथा पति का युक्ति निरूपण है: $S_H = \{(\text{ओपेरा|ओपेरा}), (\text{ओपेरा|मुक्केबाजी}), (\text{ओपेरा|ओपेरा}), (\text{मुक्केबाजी|मुक्केबाजी}), (\text{मुक्केबाजी|ओपेरा}), (\text{ओपेरा|मुक्केबाजी}), (\text{मुक्केबाजी|ओपेरा}), (\text{मुक्केबाजी|मुक्केबाजी})\}$ । यहाँ $(\text{ओपेरा|ओपेरा}), (\text{ओपेरा|मुक्केबाजी})$ का अर्थ है कि पत्नी के ओपेरा चयन की बात जानते हुए पति ओपेरा का चुनाव करता है तथा दूसरी दशा में वह पत्नी द्वारा मुक्केबाजी देखने के चयन के बाद ओपेरा देखने का चयन कर रहा है। अतः श्रेष्ठतम प्रतिक्रिया की प्रतिप्राप्तियों का रेखांकन निम्न आव्यूह की भांति किया जा सकता है :

		पति			
		सदा ओपेरा (ओपेरा ओपेरा) (ओपेरा मुक्केबाजी)	पत्नी का अनुसरण (ओपेरा ओपेरा) (मुक्केबाजी मुक्केबाजी)	पत्नी के विपरीत (मुक्केबाजी ओपेरा) (ओपेरा मुक्केबाजी)	सदा मुक्केबाजी (मुक्केबाजी ओपेरा) (मुक्केबाजी मुक्केबाजी)
पत्नी	ओपेरा	(<u>3</u> , <u>1</u>)	(<u>3</u> , <u>1</u>)	(<u>0</u> , <u>0</u>)	(<u>0</u> , <u>0</u>)
	मुक्केबाजी	(<u>0</u> , <u>0</u>)	(<u>1</u> , <u>3</u>)	(<u>0</u> , <u>0</u>)	(<u>1</u> , <u>3</u>)

यहां हमें अनेक नैश संतुलन मिल जाते हैं :

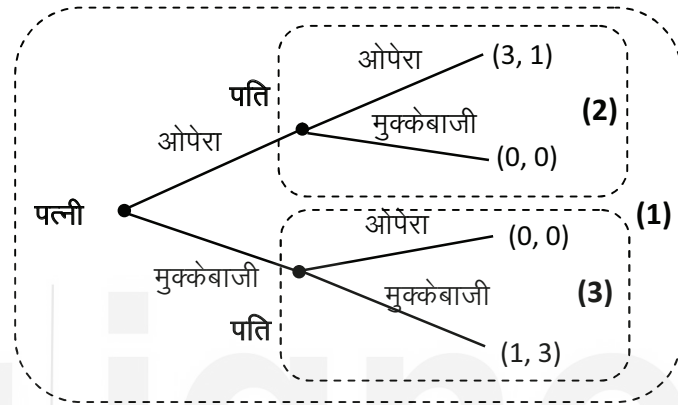
- पत्नी ने ओपेरा चुना और पति ने (ओपेरा|ओपेरा) $(\text{ओपेरा|मुक्केबाजी})$
- पत्नी ने ओपेरा चुना और पति ने (ओपेरा|ओपेरा) $(\text{मुक्केबाजी|मुक्केबाजी})$
- पत्नी ने मुक्केबाजी चुनी और पति ने $(\text{मुक्केबाजी|ओपेरा})$ $(\text{मुक्केबाजी|मुक्केबाजी})$

आइए अब इन संतुलनों में से प्रत्येक की संभाव्यता का विश्लेषण करें। हम पहले नैश संतुलन से शुरू कर रहे हैं। यहां पति एक चेतावनी देता दिखाई दे रहा है कि वह उसके मुक्केबाजी देखने जाने पर भी ओपेरा देखने ही जाएगा। किंतु यह एक गीदड़ भभकी ही है। कारण यही है कि यदि पत्नी सचमुच पहले मुक्केबाजी देखने का चयन करती तो पति को ओपेरा चुनने में 3 के समान प्रतिप्राप्ति का त्याग करना पड़ेगा— जो विश्वसनीय नहीं लगता। अतः पत्नी के मुक्केबाजी देखने जाने पर भी उसके ओपेरा जाने की धमकी कोरी धमकी ही है। इसी प्रकार तीसरे नैश संतुलन में पति की एक कोरी धमकी छुपी है कि वह तो मुक्केबाजी देखने ही जाएगा। भले ही, उसकी पत्नी ने पहले ही ओपेरा जाने की बात कही हो। यहां वह ओपेरा के स्थान पर मुक्केबाजी में जाकर केवल एक इकाई प्रतिप्राप्ति का ही त्याग करेगा।

6.8.1 उपद्यूत संपूर्ण नैश संतुलन (SPNE)

आनुक्रमिक द्यूतों में नैश संतुलन ऐसे युक्ति निरूपण दर्शा सकते हैं जो अधिक संभावी एवं स्वीकार्य नहीं लगते। अतः कोरी धमकी का निर्मूलन करते हुए एक उचित नैश संतुलन युक्ति निरूपण की औपचारिक विधि उपद्यूत संपूर्ण नैश संतुलन की संकल्पना के माध्यम से खोजी जा सकती है। इस विधि का आग्रह है कि किसी संतुलन की विवेकशीलता के लिए यह आवश्यक है कि वह न केवल पूरे द्यूत के स्तर पर बल्कि

प्रत्येक उपद्यूत स्तर पर भी संतुलन ही सिद्ध होता हो। एक उपद्यूत विस्तृत स्वरूप में किसी भी निर्णय बिंदु से प्रारंभ हो उस बिंदु से आगे आने वाले प्रशाखा समूह को स्वयं में समाहित किए होता है। संपूर्ण उपद्यूत वह होता है जो किसी अन्य निर्णय बिंदु के साथ अपने सूचना वृत्त के माध्यम से जुड़ा हुआ नहीं हो। इस प्रकार इस बैटल ऑफ सैक्सेज द्यूत में तीन उपद्यूत हैं— एक तो संपूर्ण द्यूत स्वयं और दूसरे उन निर्णय बिंदुओं से प्रारंभ उपद्यूत जहां पति को निर्णय लेने का अवसर मिलता है। हम इन उपद्यूतों को बिंदु आवृत्त आयतों द्वारा दिखा रहे हैं।



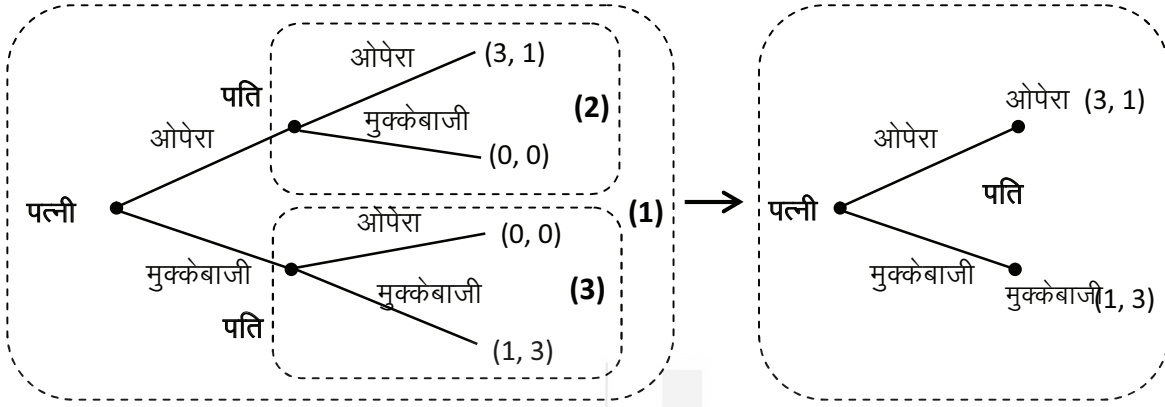
चित्र 6.5

एक उपद्यूत संपूर्ण नैश संतुलन दोनों खिलाड़ियों के लिए एक-एक युक्ति का ऐसा समुच्चय होता है जो प्रत्येक उपद्यूत के लिए एक नैश संतुलन की रचना कर देता है। आनुक्रमिक बैटल ऑफ सैक्सेज में किसी युक्ति निरूपण को SPNE होने के लिए पूरे द्यूत के साथ-साथ दोनों उपद्यूतों के लिए नैश संतुलन होना चाहिए। हमारे उपर्युक्त संदर्भ में जब पत्नी ओपेरा चुनती है तो उपद्यूत (ii) में पति को ओपेरा (प्रतिप्राप्ति एक इकाई) तथा मुक्केबाजी (प्रतिप्राप्ति शून्य) के बीच चयन करना होगा उसकी श्रेष्ठतम प्रतिक्रिया ओपेरा जाना होगी। इसी प्रकार यदि पत्नी मुक्केबाजी देखने का निर्णय करें तो पति को उपद्यूत में ओपेरा (प्रतिप्राप्ति शून्य) तथा मुक्केबाजी (प्रतिप्राप्ति 3) के बीच चयन करना होगा। उसकी श्रेष्ठतम प्रतिक्रिया मुक्केबाजी का चयन ही होगी। पति की एकमात्र युक्ति निरूपण (ओपेरा|ओपेरा) (मुक्केबाजी|मुक्केबाजी) होगा जो SPNE का भाग हो सके। अन्य दो युक्ति निरूपण (ओपेरा|ओपेरा) (ओपेरा|मुक्केबाजी) और (मुक्केबाजी|ओपेरा) (मुक्केबाजी|मुक्केबाजी) का अर्थ होगा कि वह किसी सटीक उपद्यूत में नैश संतुलन समर्थ युक्ति का प्रयोग नहीं कर पाएगा। अतः भाग 6.8 में हमने जिन तीन नैश संतुलनों को देखा है, उनमें से केवल दूसरा उपद्यूत संपूर्ण नैश संतुलन है जबकि पहला और तीसरा उपद्यूत इस कसौटी पर खरा नहीं उतर पाता।

6.8.2 पश्च-आगमन

पिछले भागों में हमने आनुक्रमिक बैटल ऑफ सैक्सेज द्यूत का संतुलन प्राप्त करने के लिए पहले सामान्य निरूपण में नैश संतुलनों का आकलन कर फिर उनमें से एक उपद्यूत संपूर्ण नैश संतुलन की खोज की विधि अपनाई थी। ऐसे ही परिवेश में उपद्यूत संपूर्ण नैश संतुलन तक पहुँचने की एक सीधी विधि 'पश्च आगमन' कहलाती है। इस

विधि में हम विस्तृत निरूपण के निम्नतम स्तर के उपद्यूतों से प्रारंभ कर उनका नैश संतुलन निर्धारित करते हैं। फिर इन उपद्यूतों के स्थान पर उनके अपने नैश संतुलन रख दिए जाते हैं। इस उपद्यूत का प्रतिस्थापन नैश संतुलन द्वारा करने की प्रक्रिया को फिर और पिछले स्तर तक ले जाना तब तक चलता है जब तक कि उपद्यूत संपूर्ण नैश संतुलन प्राप्त नहीं हो जाता। हम चित्र 6.6 में इसी प्रक्रिया को समझा रहे हैं।



चित्र 6.6

चित्र 6.6 की 'पश्च आगमन' विधि में पहले दो उपद्यूतों (2 और 3) को नैश संतुलन के लिए हल किया गया है। उपद्यूत 2 में पत्नी के ओपेरा के चयन के बाद पति के लिए श्रेष्ठतम विकल्प ओपेरा जाकर 1 इकाई की प्रतिप्राप्ति से संतुष्ट रहना होगा क्योंकि मुक्केबाजी देखकर तो उसकी प्रतिप्राप्ति शून्य ही रहेगी। इसी प्रकार उपद्यूत 3 में पत्नी द्वारा मुक्केबाजी का विकल्प चुनने के बाद पति के लिए भी मुक्केबाजी चुनना ही श्रेष्ठतम प्रतिक्रिया होगी। आइए, अब इन दो उपद्यूतों के स्थान पर इनके नैश संतुलन मान रखकर उस सरल द्यूत पर चलें जहां पत्नी को पहले निर्णय करना है। उसे ओपेरा से 3 तथा मुक्केबाजी से 1 इकाई प्रतिप्राप्ति होगी। अतः नैश संतुलन की क्रियाविधि का आग्रह है कि पत्नी ओपेरा का चयन करें। अतः हमें प्राप्त उपद्यूत संपूर्ण नैश संतुलन होगा।

6.9 द्यूत सिद्धांत अनुप्रयोग

विवेकशील निर्णयकर्ताओं के बीच 'टकराव' और 'सहयोग' के प्रतिमानों के अध्ययन से विकसित द्यूत सिद्धांतों का अर्थशास्त्र, जीवविज्ञान, समाजशास्त्र, राजनीतिशास्त्र आदि अनेक महत्त्वपूर्ण विषय क्षेत्रों में महत्त्वपूर्ण प्रवृत्तियों के पूर्वाकलन के लिए प्रयोग किया जाता है। पिछले कुछ भागों में हमने महत्त्वपूर्ण संकल्पनाओं और द्यूतों के कुछ उदाहरणों पर विचार किया है। वर्तमान भाग में हमारा उद्देश्य इनके अनुप्रयोगों पर एक विहंगम दृष्टिपात करना है। उदाहरण के लिए, एक अल्पाधिकारी बाजार में कार्य कर रही फर्म परस्पर निर्भरता के द्यूत सिद्धांत के परिवेश में कार्य कर रही होती हैं। वर्तमान इकाई में इस संदर्भ में चर्चित नैश संतुलन पूर्ववर्ती इकाई में वर्णित कूर्णों संतुलन का ही सामान्यीकरण है। कूर्णों संतुलन में प्रत्येक फर्म प्रतिद्वंद्वी के चयन को जानकर अपना अधिकतम लाभ देने वाला उत्पादन तय करती है। इसी प्रकार, हम कीमत विषयक युक्तियों के संदर्भ में बर्ट्रेड संतुलन की व्याख्या एक नैश संतुलन के

रूप में कर लेते हैं— प्रत्येक फर्म दूसरी फर्म द्वारा तय की जाने वाली कीमत की मान्यता के आधार पर अपनी लाभ अधिकतम कर सकने में समर्थ कीमत नियत करती है। आइए, कुछ अन्य उदाहरणों पर भी ध्यान दें।

उदाहरण 1

यहाँ हम उन फर्मों की निर्णय प्रक्रिया के संदर्भ में बंदी की दुविधा प्रतिमान का प्रयोग कर रहे हैं जिन्हें अपने प्रतिद्वंद्वियों के निर्णयों के बारे में कोई ज्ञान नहीं होता। अल्पाधिकार का सरलतम प्रतिमान कूर्णों (1838) का है जिसे मूलतः कूर्णों का द्वैधाधिकार का प्रतिमान कहा जाता था। उसमें दो प्रतिस्पर्धी फर्म $i=1,2$ होती हैं जो क्रमशः q_i मात्रा में उत्पादन करती हैं। दोनों का उत्पादन समरूप है जिसका मांग वक्र $p(Q)$ है, जहाँ बाज़ार कीमत p सकल उत्पादन $Q = q_1 + q_2$ का फलन है। कूर्णों के अनुसार प्रत्येक फर्म का मानना है कि उसके अपने कार्य का दूसरी फर्म पर कोई प्रभाव नहीं होगा। हम ऐसे असहयोगी संतुलन पर विचार कर रहे हैं जो दोनों फर्म उत्पादन की कीमत को अपनी युक्ति के रूप में प्रयोग कर रही हैं।

उदाहरण 2

हम किम स्वैल्स द्वारा दिया गया उदाहरण ले रहे हैं। दो फर्म हैं A तथा B जिनकी स्थिर औसत लागत रु. 2 प्रति इकाई है। फर्म के पास अपनी कीमत उच्च स्तर पर रु. 10 या निम्न स्तर रु. 5 प्रति इकाई नियत करने के दो विकल्प हैं। उच्च कीमत पर कुल मांग 100 तथा निम्न पर 180 इकाई हो सकती है। इन दोनों ही दशाओं में कूर्णों प्रतिमान की रचना के कारण बाज़ार मांग दोनों फर्मों के बीच समान रूप से विभाजित हो जाएगी। यदि एक फर्म उच्च कीमत नियत करे तथा दूसरी निम्न तो पहली फर्म मात्र 20 इकाई बेच पाएगी जबकि दूसरी 150 इकाइयाँ बेचने में सफल रहेगी। आइए! अब इन फर्मों के लाभों का आंकलन करें और बंदी की दुविधा का प्रयोग कर उनकी संतुलन युक्तियों का निरूपण करें।

हमारे पास फर्म A तथा B के लिए निम्नांकित संभव युक्ति निरूपण और संबद्ध प्रतिप्राप्तियाँ हैं :

- क) **(उच्च कीमत, उच्च कीमत)** : यहां कुल मांग 100 इकाई रहेगी, दोनों फर्म 50-50 इकाइयाँ बेच पाएगी। प्रत्येक का कुल आगम = $50 \times 10 = 500$ तथा कुल लागत = $2 \times 50 = 100$ । अतः प्रत्येक फर्म का लाभ होगा : $500 - 100 = 400$ रुपये।
- ख) **(निम्न कीमत, निम्न कीमत)** : अब कुल माँग 180 इकाई होगी। दोनों 90-90 इकाइयाँ बेचकर कुल आगम = $90 \times 5 = 450$ प्राप्त करेगी। दोनों की अपनी-अपनी कुल लागत = $90 \times 2 = 180$ । इसीलिए प्रत्येक फर्म का लाभ होगा = $450 - 180 = 270$ रुपये।
- ग) **(उच्च कीमत, निम्न कीमत)** : मान लें फर्म A उच्च कीमत तय करती है। वह रु. 10 प्रति इकाई पर 20 इकाई बेचकर $20 \times 10 = 200$ रुपये कुल आगम प्राप्त करती है। उसकी कुल लागत $20 \times 2 = 40$ रुपये। अतः उसका लाभ होगा $200 - 40 = 160$ रुपये। फर्म B निम्न कीमत पर 150 इकाइयाँ बेच लेती है। अतः

उसका कुल आगम = $150 \times 5 = 750$ रुपये तथा कुल लागत = $750 - 300 = 450$ रुपये।

घ) (निम्न कीमत, उच्च कीमत) : यहाँ फर्म A निम्न तथा फर्म B उच्च कीमत नियत करती है। अतः पूर्व परिचित आंकलन के अनुसार फर्म A का लाभ रु. 450 तथा B का रु. 160 हो जाएगा।

अतः इन फर्मों का लाभ प्रतिप्राप्ति आव्यूह होगा :

		फर्म B का लाभ	
		उच्च कीमत	निम्न कीमत
फर्म A का लाभ	उच्च कीमत	(400,400)	(160,450)
	निम्न कीमत	(450,160)	(270, 270)

दोनों फर्मों के पास एक-एक प्रबल युक्ति है : निम्न कीमत तय करना। अतः संतुलन (निम्न कीमत, निम्न कीमत) पर होगा जहां दोनों को ही (270, 270) का लाभ होगा। यह स्थिति बंदी की दुविधा जैसी ही है जहां संयुक्त प्रतिप्राप्ति न्यूनतम रहती है। किंतु (उच्च कीमत, उच्च कीमत) का परिणाम उनकी संयुक्त प्रतिप्राप्ति के पटल पर एक नैश संतुलन परिणाम पर पैरेटो सुधार हो सकता है।

संतुलन अवस्था में यह विरोधाभास क्यों उत्पन्न हो जाता है? प्रबल युक्ति परिप्रेक्ष्य में तो कोई फर्म दमित युक्ति (उच्च कीमत) का (प्रबल युक्ति को छोड़कर) चयन नहीं करेगी। अतः प्रबल युक्ति तो (निम्न कीमत, निम्न कीमत) ही होगी। आइए अब इसका नैश परिप्रेक्ष्य में विश्लेषण करें। प्रतिप्राप्ति आव्यूह से यह तो स्पष्ट ही है कि यद्यपि प्रत्येक फर्म को उच्च कीमत युक्ति अपनाए की संप्रेरणा तो उपस्थित है क्योंकि (उच्च कीमत, उच्च कीमत) की इस युक्ति में संयुक्त लाभ स्तर उच्चतम है, किंतु प्रत्येक फर्म यह भी जानती है कि उसके उच्च कीमत चयन करने पर प्रतिद्वंद्वी फर्म को इस प्रबल युक्ति से विचलित हो निम्न कीमत चुनकर उच्चतर लाभ रु. 450 ($450 > 400$) कमाने की लालसा भी अवश्य होगी। अतः उच्च कीमत के विरुद्ध निम्न कीमत अपनाए की ओर विचलित होने की एक परस्पर आशंका बनी रहेगी। इस आशंका के सार्थक होने से ही फर्म विवश होकर परस्पर श्रेष्ठतम प्रतिक्रिया युक्ति अपना लेंगी, भले ही वह एक अन-अभीष्ट परिणाम (निम्न कीमत, निम्न कीमत) हो।

उदाहरण 3

आइए अब एक ऐसी स्थिति पर विचार करें जहां गैर-कीमत स्पर्धा दिखाई दे रही है। दो फर्मों एक खर्चीले विज्ञापन कार्य पर व्यय के विषय में विचार कर रही है। यदि कोई भी विज्ञापन नहीं करें तो दोनों को रु. 50 मिलियन का सामान्य लाभ होगा। यदि एक फर्म विज्ञापन करें तो उसे तुलनात्मक लाभ के नियमानुसार रु. 25 मिलियन अधिक कमाने का अवसर मिल जाएगा जबकि दूसरी फर्म का लाभ आधा अर्थात् रु. 25 मिलियन ही रह जाएगा। इसका अर्थ हुआ कि विज्ञापन पर लागत के बाद भी विज्ञापनकर्ता फर्म के उत्पादन की लोकप्रियता बढ़ने के कारण वह दूसरी फर्म के

ग्राहकों को अपनी ओर खींचकर अधिक लाभ कमाने में सफल रहती है। किंतु यदि दोनों ही विज्ञापन करने लगे तो उनके बाजार अंश पूर्ववत् रहते हैं जबकि विज्ञापन व्यय तो उन्हें वहन करना ही पड़ता है। उनके लाभ भी घटकर रु. 20 मिलियन ही रह जाते हैं। अतः उनका प्रतिप्राप्ति आव्यूह कुछ इस प्रकार होगा :

		फर्म B की युक्ति	
		विज्ञापन	विज्ञापन नहीं
फर्म A की युक्ति	विज्ञापन	(20,20)	(75,25)
	विज्ञापन नहीं	(25,75)	(50,50)

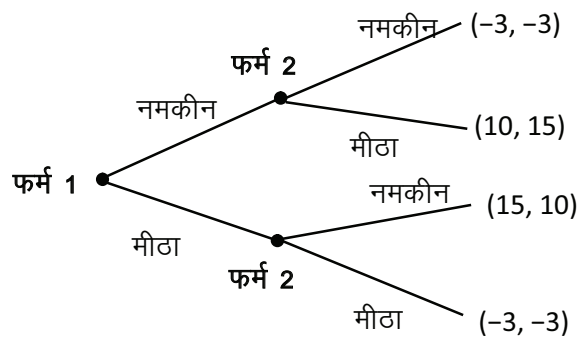
इस द्यूत में किसी फर्म के पास भी प्रबल युक्ति नहीं है, अतः कोई प्रबल युक्ति संतुलन भी नहीं होगा। किंतु द्यूत के दो नैश संतुलन हैं (विज्ञापन, विज्ञापन नहीं) तथा (विज्ञापन नहीं, विज्ञापन)

उदाहरण 4 : उत्पाद चयन समस्या

आनुक्रमिक द्यूतों में निर्णय श्रृंखला होती है और प्रत्येक निर्णय प्रतिद्वंद्वी के समक्ष संभावनाओं को प्रभावित करता है। द्यूत सिद्धांत में आनुक्रमिक द्यूत विश्लेषण इस दृष्टि से भी बहुत महत्वपूर्ण माना जाता है कि यह वास्तविकता को अधिक अच्छी तरह से प्रतिबिंबित करता है। आइये, दो फर्मों की समस्या पर विचार करें जो नमकीन या मीठे अल्पाहार के उत्पादन पर निर्णय लेना चाहती है। यदि दोनों एक ही चीज़ बनाने लगीं तो अति आपूर्ति के कारण दोनों को घाटा उठाना पड़ेगा। उनका प्रतिप्राप्ति आव्यूह कुछ ऐसा होगा :

		फर्म 2 की रणनीति	
		नमकीन	मीठा
फर्म 1 की रणनीति	नमकीन	(-3, -3)	(10, 15)
	मीठा	(15, 10)	(-3, -3)

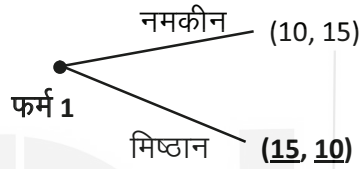
यदि फर्म-1 पहले निर्णय करे तो उसे 'मीठा' चुनना चाहिए और उसे फैसेले को देख फर्म-2 नमकीन बनाना शुरू कर देगी। वस्तुतः उसके पास यही विकल्प बचेगा। इस द्यूत को विस्तृत स्वरूप में निरूपित कर सकते हैं :



चित्र 6.7

ध्यान दें कि यहाँ फर्म-2 का चयन फर्म-1 के निर्णय से ही तय हो जाता है। प्रतिप्राप्ति आव्यूह इस सत्य को स्पष्ट नहीं कर पाता कि फर्म-2 को पहली फर्म का चयन ज्ञात हो चुका है।

मान लें कि फर्म 1 पहले चाल चल पाती है और फर्म 2 उसके बाद में। यदि फर्म 1 ने मिष्ठान चुना है तो उसे देखने के बाद फर्म 2 नमकीन चुनेगी। यदि फर्म 1 ने नमकीन चुना होता तो फर्म 2 मिष्ठान चुन लेती। गौर करें कि फर्म 2 का चयन तो फर्म 1 के निर्णय द्वारा ही तय हो जाता है— यह बात प्रतिप्राप्ति आव्यूह में नहीं बताई जा रही। यह बात भी आव्यूह छुपा जाता है कि फर्म 2 को फर्म 1 के चुनाव का पता होता है। पश्च गमन द्वारा उपद्यूत संपूर्ण नैश संतुलन परिणाम (मिष्ठान, नमकीन) तथा उपद्यूत संपूर्ण नैश युक्ति (मिष्ठान, नमकीन), (नमकीन, मिष्ठान) है जो द्यूत के न्यूनीकृत स्वरूप (चित्र 6.8) द्वारा दर्शाई गई है।



चित्र 6.8 : द्यूत का न्यूनीकृत स्वरूप

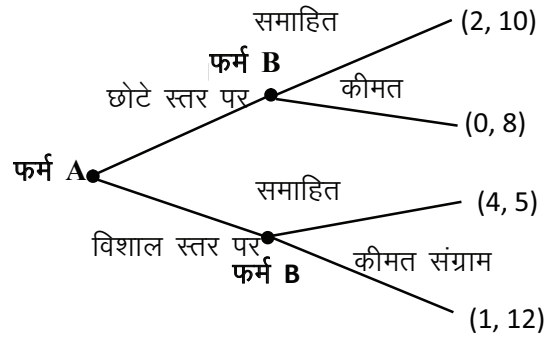
उदाहरण 5 : व्यवसाय द्यूत

मान लीजिए कि फर्म-A किसी व्यवसाय में प्रवेश करना चाहती है, चाहे लघु स्तर पर या बड़े स्तर पर। अब वहां पहले से कार्य कर रही फर्म-B को यह तय करना है कि वह A को इस व्यवसाय में समाहित होने देगी या कीमत संग्राम छेड़ना चाहेगी। अतः फर्म के विकल्प यही हैं कि वह छोटे पैमाने पर इस उद्योग में प्रवेश करेगी या फिर विशाल स्तर पर। ज़रा इस द्यूत के एक संभावित प्रतिप्राप्ति आव्यूह पर विचार करें :

		फर्म B	
		समाहित कर ले	कीमत संग्राम
फर्म A	छोटे स्तर पर	(2,10)	(0,8)
	विशाल स्तर पर	(4,5)	(1, 12)

इस आव्यूह से स्पष्ट है कि फर्म A के लिए प्रबल युक्ति तो विशाल स्तर पर प्रवेश ही होगी। किंतु इस चयन के प्रत्युत्तर में फर्म B कीमत संग्राम छेड़ देगी। परिणामस्वरूप नैश संतुलन (1,12) होगा जहाँ A मात्र 1 इकाई प्राप्त कर पाएगी। किंतु यदि फर्म इस द्यूत को आनुक्रमिक स्वरूप प्रदान कर दे तो लाभ में रह सकती है। यहां फर्म उत्पादन के किसी स्तर पर पहले से ही प्रतिबद्धता प्रकट कर सकती है। यदि वह "विशाल स्तर" नियत करती है तो फर्म B के पास कीमत संग्राम का ही श्रेष्ठतम विकल्प बचता है और फर्म A की प्रतिप्राप्ति मात्र 1 इकाई रह जाती है। किंतु यदि फर्म A छोटे स्तर का मंतव्य प्रकट करें तो फर्म B उसे 2 इकाई की प्रतिप्राप्ति पालेने देने का मन बना सकती है। आनुक्रमिक द्यूत में नैश संतुलन (2,10) हो जाएगा। जहां फर्म A छोटे स्तर पर प्रवेश करना चाहती है और फर्म B उसे व्यवसाय में

समाहित होने देती है। यहां स्पष्ट है कि पहले काम प्रारंभ करने वाली फर्म लाभ में रहती है।



चित्र 6.9

धमकी, प्रतिबद्धता और विश्वस्तता

कितनी ही बार अल्पाधिकारी फर्म अपने प्रतिद्वंद्वियों से आगे बढ़ने के लिए ऐसी युक्तियाँ भी अपनाती हैं जिनमें भले ही उनके अपने व्यवहार पर भी कुछ संरोध लग जाए। अल्पाधिकारी की प्रतिबद्धता स्तर झलकनी चाहिए तभी उस द्वारा दी जा रही धमकी विश्वस्त लगती है। आइए, अब एक ऐसी ही स्थिति पर विचार करते हैं जहाँ फर्म A कारें बनाती है किंतु कार सीटें फर्म B बनाती है। स्पष्टतः फर्म B के उत्पादन विषयक निर्णय फर्म A द्वारा तय किए गए कारों के उत्पादन पर निर्भर करेंगे, क्योंकि यह फर्म दो आकारों की कारें बनाती है, छोटी और बड़ी जिनमें अलग-अलग आकार की सीटें लगती हैं।

		फर्म A	
		छोटी कारें	बड़ी कारें
फर्म B	छोटी कार सीटें	(2,6)	(2,0)
	बड़ी कार सीटें	(1,1)	(10,3)

यह हमारे समक्ष एक आनुक्रमिक द्यूत है। इसमें A अग्रणी है। फर्म छोटी कारें बनाने में फायदा समझती है तो फर्म B को भी छोटी कारों की सीटें ही बनानी चाहिए।

क्या फर्म B फर्म A को यह धमकी दे सकती है कि वह बड़ी कारें ही बनाए? नहीं, क्योंकि यदि B बड़ी कारों की सीटें बनाने लगे किंतु A छोटी कारें ही बनाती रहे तो B का केवल '1' इकाई प्रतिप्राप्ति होगी, 2 नहीं। यह धमकी कोरी या खाली धमकी रह जाएगी। दूसरे शब्दों में, यह विश्वस्ततापूर्ण धमकी नहीं है। किंतु यह फर्म अपनी धमकी को विश्वसनीय बनाने के लिए यदि छोटी कारों की सीटें बनाने वाली फैक्ट्री बंद कर दे तो बात बदल सकती है। नया प्रतिप्राप्ति आव्यूह कुछ ऐसा रूप धारण कर जाएगा :

		फर्म A	
		छोटी कारें	बड़ी कारें
फर्म B	छोटी कार सीटें	(0,6)	(0,0)
	बड़ी कार सीटें	(1,1)	(10,3)

अब फर्म A बड़ी कारें बनाने को विवश हो सकती है और B की प्रतिप्राप्ति बड़ी कार सीटें बनाने से 10 तक पहुँच सकती है। किंतु यहां एक प्रश्न उठ सकता है : यदि फर्म किसी अन्य फर्म की तलाश कर ले जो छोटी कारों की सीटें बना सकती हो तो क्या होगा? यह किसी निर्माता की पहले से स्थापित 'प्रतिष्ठा' की बात महत्त्व धारण कर लेती है।

बोध प्रश्न 2

- 1) दो फर्म एक बाज़ार में प्रवेश करना चाहती हैं। फर्म-1 की आकार युक्तियाँ 'आक्रामक' या फिर 'समन्वयवादी' कही जा सकती है। ऐसा ही फर्म-2 के विषय में भी है। प्रतिप्राप्ति आव्यूह इस प्रकार है :

		फर्म 2	
		आक्रामक	समन्वयवादी
फर्म 1	आक्रामक	(7,2)	(10,3)
	समन्वयवादी	(9,5)	(11,4)

- क) यदि दोनों फर्म एक ही समय पर अपनी-अपनी युक्तियाँ तय करें तो नैश संतुलन क्या होगा?

.....

.....

.....

.....

- ख) इस द्यूत को विस्तृत स्वरूप में निरूपित करें और यदि फर्म-1 पहले निर्णय कर सके तो इसकी इष्टतम युक्ति निर्धारित करें। फर्म-2 इस दशा में क्या करेगी?

.....

.....

.....

.....

.....

2) दो फर्म A और B है जो अन्न अल्पाहार बनाना चाहती हैं। उन्हें यह तय करना है कि गेहूँ आधारित अल्पाहार बनाएं या चावल आधारित।

प्रतिप्राप्ति आव्यूह इस प्रकार है :

		फर्म 2	
		गेहूँ	चावल
फर्म 1	गेहूँ	(10,12)	(6,8)
	चावल	(1,6)	(8,12)

क) यदि दोनों फर्म एक ही समय अपने-अपने निर्णय करें तो नैश संतुलन क्या होगा?

.....

.....

.....

.....

ख) यदि फर्म-1 पहले तय कर ले कि फर्म-2 की इष्टतम युक्ति क्या होगा? क्या फर्म-1 को 'अग्रणी' बनने से कुछ लाभ होगा?

.....

.....

.....

.....

6.10 सार-संक्षेप

द्यूत सिद्धांत उन उपस्करों एवं नियमों का समुच्चय है जिनका उपयोग अर्थशास्त्री फर्मों के बीच टकराव और सहयोग के विश्लेषण के लिए करते हैं। प्रत्येक फर्म दूसरी फर्म से स्पर्धा करने के लिए अपनी युद्ध-योजना या युक्ति तैयार करती है। इस इकाई में किसी द्यूत को दर्शाने में प्रयुक्त विभिन्न तत्व या घटकों पर चर्चा की गई है। प्रत्येक द्यूत सिद्धांत प्रतिमान में खिलाड़ी, युक्तियां तथा प्रतिप्राप्तियां सम्मिलित होते हैं। खिलाड़ी निर्णयकर्ता है, और युक्तियां उनके संभावी चयन। प्रतिप्राप्त प्रत्येक युक्तियुग्म से होने वाले परिणाम या लाभ हैं। इकाई में द्यूत निरूपण के दो स्वरूपों, सामान्य और विस्तृत पर भी चर्चा की गई है। इसमें द्यूत सैद्धांतिक समस्या समाधान हेतु आवश्यक संकल्पनाओं पर भी चर्चा की है। किसी खिलाड़ी की प्रबल युक्ति वह है जिसे वह प्रतिद्वंद्वी द्वारा अपनाई गई किसी भी युक्ति का सामना करने के लिए अपनाता है। यदि दोनों खिलाड़ियों के पास अपनी-अपनी प्रबल युक्तियाँ हों तो हमें एक प्रबल युक्ति संतुलन प्राप्त हो जाता है। जब प्रत्येक खिलाड़ी प्रतिद्वंद्वी द्वारा चुनी हुई युक्ति के प्रत्युत्तर में अपनी श्रेष्ठतम युक्ति का प्रयोग करता है तो हमें नैश संतुलन प्राप्त होता है। संतुलन तक कैसे और कब पहुँचा जा सकता है, इसी बात को समझाने के

लिए हमने बंदी की दुविधा, बैटल ऑफ सैक्सेज तथा सिक्कों के मिलान आदि द्यूतों के उदाहरणों पर चर्चा की है। हमने विशुद्ध युक्तियों की दशा में कोई नैश संतुलन नहीं मिल पाने पर मिश्रित युक्तियों पर आधारित संतुलन की संकल्पना पर भी विचार किया है। समसामायिक चाल वाले द्यूतों से आगे चलकर हमने आनुक्रमिक द्यूतों पर चर्चा की है जहाँ चयनों की समय रचना महत्वपूर्ण हो जाती है। दो अतिरिक्त संकल्पनाएं, एक उपद्यूत संपूर्ण नैश संतुलन तथा उस तक पहुँचने की पश्च आगमन विधि पर भी सोदाहरण चर्चा की गई है। इस इकाई का समापन द्यूत सिद्धांत के कुछ अनुप्रयोगों पर चर्चा के साथ किया गया है।

6.11 संदर्भ ग्रंथादि

Varian, H. R. (2010). *Intermediate Microeconomics: A modern approach* (8thed.). New York: W.W. Norton & Co.

Gibbons, R. (1992). *Game Theory for Applied Economists*. Princeton, New Jersey : Princeton University Press.

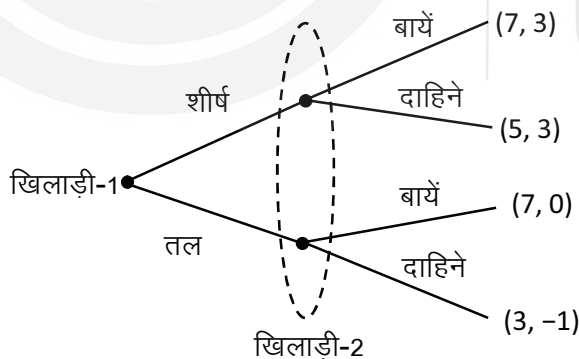
Nicholson & Snyder. *Intermediate Microeconomics and its Application* (11thed.), South-Western Cengage Learning.

“Notes 6: Game theory”. retrieved from <http://www2.econ.iastate.edu/classes/econ335/lewin/games.pdf>

6.12 बोध प्रश्नों के उत्तर अथवा संकेत

बोध प्रश्न 1

1) क)



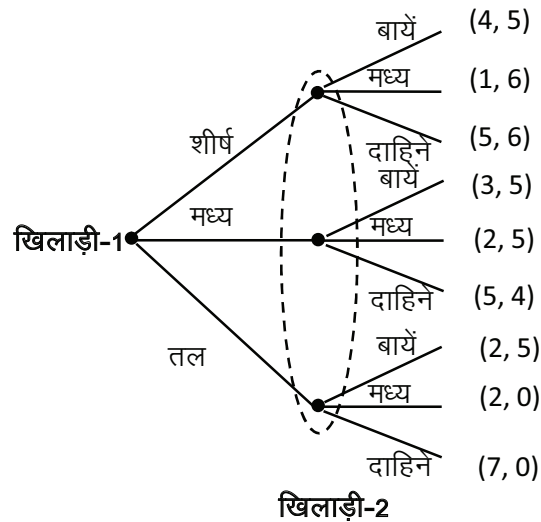
ख) यहाँ तीन नैश संतुलन हैं :

(शीर्ष, बायें), (शीर्ष, दाहिने) और (तल, बायें)

ग) खिलाड़ी-1 की प्रबल युक्ति है शीर्ष

खिलाड़ी-2 की प्रबल युक्ति है बायें

2) क)



ख) द्यूत का नैश संतुलन 'मध्य' है।

3) क) हाँ, यदि सभी खिलाड़ी अपनी प्रबल युक्ति प्रयोग कर रहे हैं तो वह प्रतिद्वंद्वियों के कुछ भी करने पर इष्टतम होने के कारण नैश संतुलन होगा।

नहीं, विलोम सत्य नहीं है।

4) क) फर्म-A के पास प्रबल युक्ति नहीं है।

ख) फर्म-B की प्रबल युक्ति न्यून कीमत है।

ग) नैश संतुलन होगा (निम्न कीमत, निम्न कीमत)

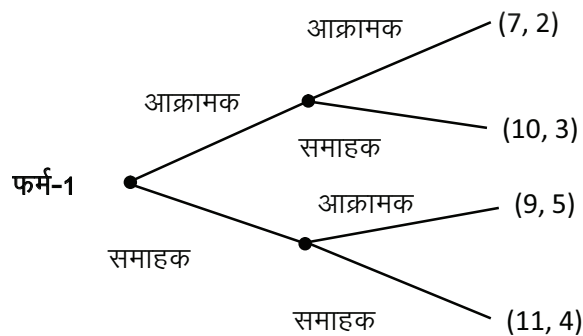
5) क) नैश संतुलन है (छल, छल)

ख) नैश संतुलन है (छल नहीं, छल)

बोध प्रश्न 2

1) क) नैश संतुलन होगा (समाहक, आक्रामक)

ख) यदि फर्म-1 को पहले चाल चलनी हो तो वह आक्रामक युक्ति अपनाएगी इसके बाद दूसरी फर्म 'समाहक' युक्ति अपनाएगी।



2) क) दो नैश संतुलन हैं : (गेहूँ गेहूँ), (चावल, चावल)

ख) फर्म-1 गेहूँ और फर्म-2 भी गेहूँ चुनेगी, इससे फर्म-1 की प्रतिप्राप्ति 10 होगी। हाँ, फर्म-1 को पहली चाल चलने का फायदा होगा। यदि फर्म-2 को पहली चाल का अवसर मिले तो वह चावल चुनेगी। फिर फर्म-1 भी चावल ही चुनेगी और उसकी प्रतिप्राप्ति 8 रह जाएगी।