इकाई 16 अरैखिक अंतर समीकरण*

संरचना

16.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात् आप, निम्नलिखित से भली–भांति अवगत हो जाएंगे :

- रैखिक एवं अरैखिक अंतर समीकरणों के बीच अंतर से;
- प्रावस्था आरेख की संकल्पना से तथा अरैखिक अंतर समीकरणों को समझने में इसके महत्वपूर्ण योगदान से;
- अरैखिक अंतर समीकरणों के गुणात्मक विश्लेषण की विधि से;
- अरैखिक अंतर समीकरणों को रैखिक बनाने की विधि से; तथा
- अरैखिक अंतर समीकरणों पर आधारित संवृद्धि प्रतिमान और आवर्तन तथा अनावर्तन (अव्यवस्था) सिद्धांत में उनके अनुप्रयोगों से।

16.1 विषय-प्रवेश

पिछली इकाई में हमने रैखिक अंतर समीकरणों के बारे में पढ़ा। वास्तव में, अनेक अर्थशास्त्रीय प्रतिरूपों में अरैखिक गत्यात्मक संबंध उत्पन्न होते हैं। अरैखिकता के आ जाने से अंतर समीकरणों की सार वस्तु नहीं बदलती। आईए हम एक साधारण अर्थशास्त्रीय तंत्र पर विचार करें। मान लीजिए कि अर्थशास्त्रीय तंत्र, जिस की हम चर्चा कर रहे हैं, एक ही चर $x \in X$ से वर्णित है, जहाँ $X \subseteq \mathbb{R}$ वास्तविक संख्या रेखा पर एक अंतराल है जो कि रिक्त नहीं है। आपने समुच्चयों पर केंद्रित इकाई में वास्तविक संख्या रेखा तथा उपसमुच्चयों के बारे में पढ़ा है। चर x को तंत्र प्रांत में तंत्र चर तथा X को तंत्र प्रांत कहा जाता है। तंत्र प्रांत में तंत्र चर के सभी संभव मान सम्मिलित होते हैं।

हमारे संदर्भ में, हम अर्थशास्त्रीय तंत्र को एक गत्यात्मक तंत्र मानते हैं, अर्थात् x का मान समय अनुसार परिवर्तित होता है। हम यह भी मान कर चलते हैं कि समय असतत

*श्री सौगतो सेन एवं सुश्री चैताली अरोड़ा

अंतरालों $t \in \{0,1,2,3..\}$ इत्यादि में मापा जा रहा है। चर x एक अंतराल में केवल एक बार ही बदलता है। समुच्चय Z^+ (अर्थात् धनात्मक पूर्णांकों का समुच्चय) सभी समय अंतरालों का समुच्चय है और समय प्रांत या समय क्षितिज कहलाता है। समय को चर x पर एक पादांक के रूप में लिखा जाता है। अतः, x_t समय अंतराल t में x के मान को व्यक्त करता है। सभी अंतर समीकरण समय के अनुसार चर के विकास को वर्णित करते हैं। तंत्र का गत्यात्मक विकास एक फलन f द्वारा परिभाषित जाता है, जो यह दर्शाता है कि किस प्रकार x_t, x के पूर्व मानों पर निर्भर करता है। हम इसे इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

यहाँ फलन f को गति का नियम अथवा तंत्र गतिकी कहते हैं। पिछली इकाई में हमने उन अंतर समीकरणों पर विचार किया जो कि एक रैखिक समीकरण द्वारा परिभाषित थे जैसे कि

$$x_{t+1} = a + bx_t$$

अरैखिक रूप में रैखिक अंतर समीकरण एक विशेष उद्धरण के रूप में सम्मिलित होते हैं परंतु अरैखिक अंतर समीकरणों का एक फायदा यह है कि इनमें विविध प्रकार के समय पथों की एक व्यापक श्रेणी को समाहित किया जा सकता है।

यद्यपि ऊपर दिए गए अरैखिक अंतर समीकरण को $x_{t+1} = f(x_t, t)$ से भी व्यक्त किया जा सकता है, यहाँ t एक स्वतंत्र चर की तरह उपस्थित रहता है, तथापि हम अंतर समीकरणों के केवल स्वायत्त रूप को ही लेंगे जिनमें समय, t, एक स्वतंत्र चर के रूप में उपस्थित नहीं होगा। अतः, हम यहाँ अपनी चर्चा को केवल निम्न प्रकार के अंतर समीकरणों के अध्ययन तक सीमित रखेंगे :

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

ध्यान दें x_{t+1} का मान केवल x के एक दम पिछले अंतराल के मान पर निर्भर करता है अर्थात् यह केवल x_t के मान पर निर्भर है, x_{t-1} तथा उससे पिछले मानों पर नहीं। इस प्रकार के अंतर समीकरणों को प्रथम–कोटि अंतर समीकरण कहते हैं। इस इकाई में हम केवल प्रथम–कोटि अंतर समीकरणों पर विचार करेंगे।

रैखिक अंतर समीकरणों का व्यापक रूप

$$x_{t+1} = f(x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_{t-k+1}, t)$$

है, जहाँ k एक धनात्मक पूर्णांक है। इस अंतर समीकरण की कोटि कहते हैं। ऊपर दिए हुए समीकरण में t भी एक स्वतंत्र चर के रूप में उपस्थित है, जैसा कि हमने ऊपर भी उल्लेख किया था। यदि t स्वयं एक चर के रूप में उपस्थित न हो तो अंतर समीकरण स्वायत्त कहलाता है।

कोटि एक के स्वायत्त अंतर समीकरण $x_{t+1} = f(x_t)$ का हल एक अनुक्रम $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$ होता है जहाँ $x_t \in X$ होता है और समीकरण $x_{t+1} = f(x_t)$ को संतुष्ट करता है। ऐसे अनुक्रम को समीकरण $x_{t+1} = f(x_t)$ की अग्रगति कहते हैं।

आईए हम अपने अंतर समीकरण $x_{t+1} = f(x_t)$ को एक बार पुनः देखें। ध्यान दें कि हम इसमें एक अंतराल की अवस्था बदलकर इसे $x_t = f\left(x_{t-1}\right)$ के रूप में लिख सकते हैं। यदि एक प्रारंभिक प्रतिबंध '$t = 0$ पर x_0 है' तो हम इसके हल के रूप में निम्नलिखित अनुक्रम ज्ञात कर सकते है।

$$x_1 = f\left(x_0\right)$$

$$x_2 = f\left(x_1\right) = f\left[f\left(x_0\right)\right] = f^2\left(x_0\right)$$

$$x_3 = f\left(x_2\right) = f\left[f^2\left(x_0\right)\right] = f^3\left(x_0\right)$$

.

.

.

.

$$x_t = f(x_{t-1}) = f\left[f^{t-1}(x_0)\right] = fh\,(x_0)$$

जहाँ $f^{\,t}$, f की t वीं पुनरावृत्ति को व्यक्त करता है f की घात को नहीं। फलन $x\left(t, x_0\right) = f^t\left(x_0\right)$ को तंत्र $x_t = f\left(x_{t-1}\right)$ की अग्रगति कहते हैं।

ऊपर दिए हुए समीकरण की गत्यात्मकता का विश्लेषण करने के लिए एक बहुत सरल परंतु प्रभावशाली विधि उपलब्ध है। इस तकनीक का प्रयोग करने के लिए, हमें फलन f का आलेख बनाना होगा और साथ ही $\{x_t, x_{t+1}\}$ के तल में एक 45^0 का कोण बनाती हुई एक रेखा भी।

अगले अनुच्छेद में हम इस प्रकार के आरेखों की सहायता से प्रथम–कोटि अंतर समीकरणों के हल तक पहुँचने कि विधि पर चर्चा करेंगे। इन आरेखों को हम प्रावस्था आरेख कहते हैं। उसके पश्चात् इस इकाई में हम इसे विषय पर चर्चा करेंगे कि किस प्रकार अरैखिक अंतर समीकरणों का विशिष्ट बिंदुओं के प्रतिवेश (neighbourhoods) में रैखिक अंतर समीकरणों से सन्निकटन किया जा सकता है। इसके पश्चात् इस इकाई के अनुच्छेद 16.4 में अरैखिक अंतर समीकरणों के कुछ अनुप्रयोगों की चर्चा की गई है। इस अनुच्छेद में सोलो द्वारा प्रतिपादित संवृद्धि प्रतिमान पर चर्चा की गई है। अंत में इस इकाई में अर्थशास्त्रीय तंत्रों के आवर्ती चक्र एवं अनावर्ती व्यवहार की चर्चा की गई है। अनावर्ती व्यवहार को अव्यवस्था भी कहते हैं।

16.2 प्रावस्था आरेख और गुणात्मक विश्लेषण [Phase Diagram and Qualitative Analysis]

अरैखिक अंतर समीकरणों के प्रावस्था आरेख हमें उनके गुणात्मक 'हल' ज्ञात करने में सहायक सिद्ध होते हैं। प्रावस्था आरेखों को समझने के लिए हम एक अंतर समीकरण $x_{t+1} = f(x_t)^*$, जहाँ $t = 0, 1, 2, 3\ldots$[1] पर विचार करते हैं।

एक व्यापक अरैखिक प्रथम कोटि अंतर समीकरण $x_{t-1} = f(x_t, t), t = 0,1,2\ldots\ldots$द्वारा व्यक्त किया जाता है। यहां हम एक ऐसे समीकरण पर विचार कर रहे हैं जो स्पष्टतः समय पर निर्भर नहीं करती, अर्थात् $x_{t+1} = f(x_t)$ जहां $t = 0,1,2,3\ldots\ldots$। इसे अरैखिक प्रथम कोटि स्वायत्त अंतर समीकरण कहते हैं।

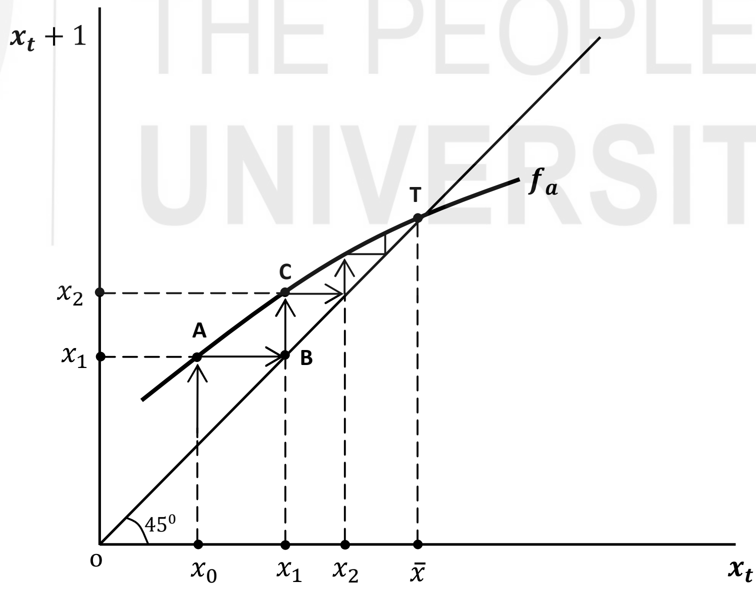
स्थिति 1 : $0 < f'(x) < 1$ और $f''(x) < 0$ है

हम पहले इस अरैखिक अंतर समीकरण का प्रावस्था आरेख यह मानते हुए ज्ञात करते हैं कि फलन $f(x)$ एक वर्धमान फलन है अर्थात् $f'(x) > 0$ है तथा जैसे–जैसे x बढ़ता है फलन समतल/सपाट होने लगता है अर्थात् $f''(x) < 0$ है।

यदि हम इस वक्र का आरेख बनाएं जिसमें x_{t+1} ऊर्ध्व तथा x_t क्षैतिज अक्ष पर लिया जाए, तो हमें रेखाचित्र 16.1 जैसा एक चित्र प्राप्त होगा। आईए हम इस वक्र को (जिसे प्रावस्था रेखा कहते हैं)

$$x_{t+1} = f_a(x_t) \qquad \ldots(1)$$

से व्यक्त करें। हमने रेखाचित्र 16.1 में हमने 45^0 रेखा भी बनाई है। वक्र f_a का 45^0 रेखा के साथ उभयनिष्ठ होना बिंदु $x_{t+1} = x_t$ पर एक संतुलन बिंदु को चिह्नित करता है। यदि x_0 क्षैतिज अक्ष पर दिया हुआ एक प्रारंभिक मान है, तो समीकरण (1) से हम एक ऊर्ध्व–निर्देशांक मान x_1 जहाँ $x_1 = f_a(x_0)$ है, प्राप्त करते हैं। यही रेखाचित्र 16.1 में प्रावस्था रेखा f_a प्रतिचित्रित करती है। दूसरे दृष्टिकोण से देखें तो, क्षैतिज अक्ष पर स्थित x_0 को यदि हम सीधे प्रावस्था रेखा तक ले जाएं तो, बिंदु A, x_1 का मान दर्शाता है। इसके पश्चात् हम अगला युग्म x_1 और x_2 का लेते हैं जहाँ $x_2 = f_a(x_1)$ है। ध्यान दें कि x_1 को ऊर्ध्वाधर अक्ष से क्षैतिज अक्ष पर पुनः, 45^0 रेखा (जिसकी ढाल 1 है) की सहायता से, आरेखित किया जा सकता है। आने वाले युग्मों के लिए यही विधि बार–बार अपनायी जाती है। यह प्रक्रिया जैसा कि हमने पिछली इकाई में भी पढ़ा है, आवर्ती विधि कहलाती है।

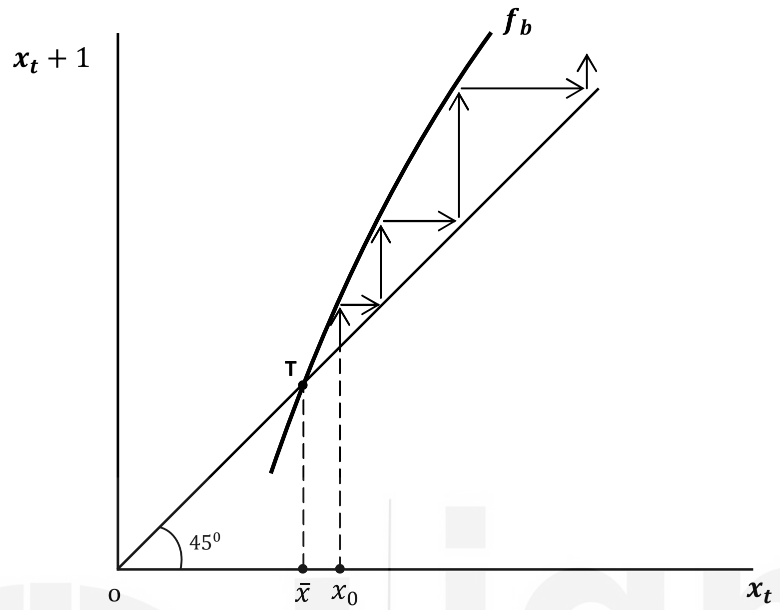


रेखाचित्र 16.1

इसी तरह नीचे दी तीनों स्थितियों में भी, ऊपर वर्णित आरेखीय आवर्ती विधि लगाई जा सकती है :

स्थिति II: $f'(x) > 1$ तथा $f''(x) < 0$ है

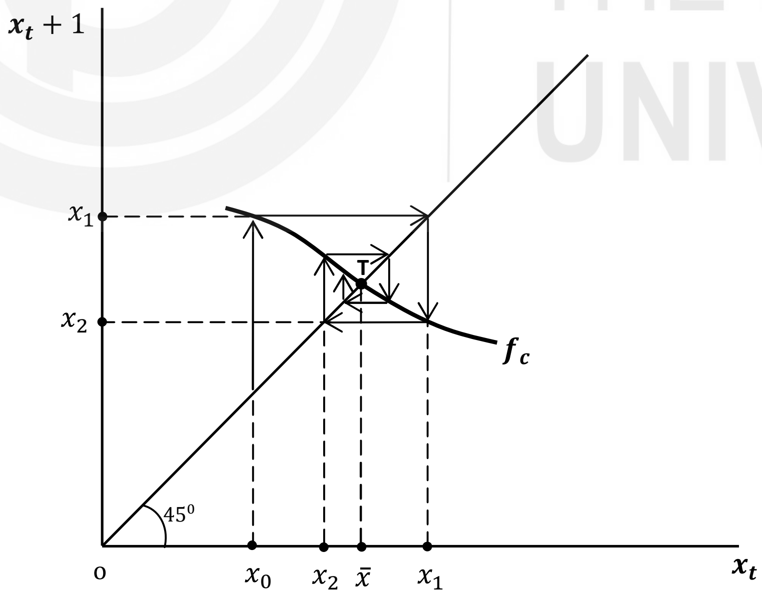
मान लीजिए प्रावस्था रेखा $x_{t+1} = f_b(x_t)$ है।



रेखाचित्र 16.2

स्थिति III: $-1 < f'(x) < 0$

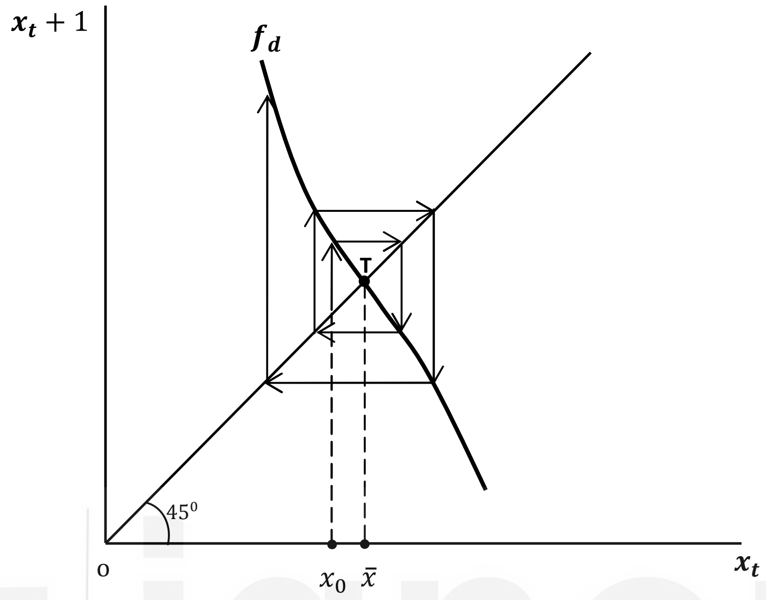
मान लीजिए प्रावस्था रेखा $x_{t+1} = f_c(x_t)$ है।



रेखाचित्र 16.3

स्थिति IV: $f'(x) < -1$

मान लीजिए प्रावस्था रेखा $x_{t+1} = f_d(x_t)$ है।



रेखाचित्र 16.4

ऊपर दी गई चार स्थितियाँ, प्रावस्था रेखा के चार आधारभूत प्रकार दर्शाती हैं। इनमें से प्रत्येक एक भिन्न समय पथ को दर्शाती है। प्रत्येक रेखाचित्र में x का अंतर्कालिक संतुलन मान, जिसे $\bar{x}$ से व्यक्त किया जाता है, रेखाचित्र में दी हुई प्रावस्था रेखा और उस से संबद्ध 45^0 रेखा के उभयनिष्ठता बिंदु से प्राप्त होता। प्रत्येक चित्र में उसे T से दर्शाया गया है। बिंदु T पर $x_{t+1} = x_t$ होता है।

अब हम यह जानना चाहते हैं कि यदि एक प्रारंभिक मान $x_0 \neq \bar{x}$ दिया है, तो क्या प्रावस्था रेखा द्वारा निर्दिष्ट परिवर्तन का प्रतिरूप हमें अविरूद्ध रूप से $\bar{x}$ की ओर ले जाएगा या इस से दूर। यदि यह हमें $\bar{x}$ की ओर ले जाता है तो यह अभिसरण की स्थिति कहलाती है, नही ंतो अपसरण की। ऊपर ली गई स्थिति 1 में प्रावस्था रेखा f_a हमें सुस्थिर पथ से, x_0 से $\bar{x}$ की ओर ले जाती है बिना किसी दोलन के। यदि x_0, $\bar{x}$ की दाईं ओर स्थित हो तो भी, $\bar{x}$ की ओर का पथ स्थिर और बाईं दिशा में रहता है। इसे संतुलन का अभिसरण कहा जाता है। स्थिति II में प्रावस्था रेखा f_b जिसकी ढाल 1 से बड़ी है, एक अपसारी पथ दर्शाती है। इस स्थिति में यदि हम $\bar{x}$ से बड़े प्रारंभिक मान x_0 से प्रारंभ करें तो हम निरंतर संतुलन मान से दूर, x के बड़े और अधिक बड़े मानों की ओर जाते हैं। इसी प्रकार यदि हम प्रारंभिक मान से छोटा लें, तो हम पाते हैं कि $\bar{x}$ के मान विपरीत दिशा में अपसारी गति दर्शाते हैं। स्थिति III और IV में वक्र संतुलन बिंदु से आगे निकल जाता है तथा हमें सुस्थिर दोलनी गति प्राप्त होती है। प्रावस्था रेखा f_c की निरपेक्ष ढाल 1 से कम है। इस स्थिति में x, $\bar{x}$ से जिस सीमा तक आगे निकल गया है, उसी के अंदर रहते हुए, प्रत्येक क्रमिक समय अंतराल में कम होता हुआ $\bar{x}$ की ओर अभिसरित होता है, अर्थात् x_0 से यह x_1 तक जाता है जो कि $\bar{x}$ से अधिक है, इसके पश्चात् यह x_1 से x_2 तक जाता है जो कि $\bar{x}$ से कम होता है। प्रावस्था रेखा f_d की निरपेक्ष ढाल 1 से अधिक है और हमारे समक्ष एक अपसारी समय पथ का विपरीत दृश्य उपस्थित होता है।

ऊपर की गई चर्चा से हम दो मूलभूत नियम प्राप्त होते हैं :

i) एक प्रथम-काटि, स्वायत, अरैखिक अंतर समीकरण का एक स्थिर स्थायी/अपरिवर्ती–दशा संतुलन बिंदु (stable steady-state equilibrium point) $\bar{x}$ होगा, यदि अवकलज (जो और कुछ नहीं, प्रावस्था रेखा की ढाल ही है) का निरपेक्ष मान $f'(\bar{x})$, 1 से कम है, और यह संतुलन बिंदु अस्थिर होगा यदि अवकलज का $\bar{x}$ पर निरपेक्ष मान 1 से अधिक है।

ii) एक प्रथम–कोटि, स्वायत, अरैखिक अंतर समीकरण से हमें x_t में प्रदोलन प्राप्त होता है यदि $f'(x)$, प्रत्येक $x_t > 0$ के लिए ऋणात्मक है जबकि x_t की गति एकदिष्ट होगी यदि $f'(x)$, प्रत्येक $x_t > 0$ के लिए धनात्मक है।

बोध प्रश्न 1

1) एक अरैखिक अंतर समीकरण क्या होता है?

....

....

....

....

....

2) एक प्रावस्था आरेख से आप क्या समझते हैं? इसका उपयोग क्या है?

....

....

....

....

....

3) एक रैखिक अंतर समीकरण और एक अरैखिक अंतर समीकरण के संतुलन में मूलभूत अंतर क्या है?

....

....

....

....

....

16.3 अरैखिक अंतर समीकरणों का रैखीयकरण [Linearising Non-Linear Difference Equations]

किसी अंतर समीकरण के संतुलन बिंदु अर्थात् स्थिर बिंदु ज्ञात करने के पश्चात् हमारे सामने जो मुख्य कार्य रह जाता है वह है उस संतुलन की स्थिरता का पता लगाना। अरैखिक समीकरणों के लिए, हम संतुलन बिंदुओं की जाँच केवल उनके आस-पास के

एक छोटे/लघु प्रतिवेश में कर सकते है। ऐसा करने के लिए, अरैखिक फलन को संतुलन बिंदु पर रैखिक बनाया जाता है और उसके पश्चात् इस रैखिक सन्निकटन की ढाल की जाँच की जाती है। वास्तव में, यह मात्र उसका विस्तार है जो हमने पिछले अनुच्छेद में किया था जब हमने प्रावस्था आरेखों का अध्ययन किया था : हमने संतुलन की स्थिरता का अनुमान लगाने के लिए प्रावस्था आरेख में फलन $f(x)$ की ढाल की सहायता ली थी। हमने संतुलन के क्षेत्र में $f(x)$ की ढाल की जाँच की थी।

हमने पहले भी एक इकाई में यह देखा है कि हम किस प्रकार टेलर श्रेणी प्रसार के प्रयोग से किसी अरैखिक फलन को रैखिक बनाते हैं। अब हम $f(x)$ अर्थात् अपने अरैखिक अंतर फलन को रैखिक बनाने का प्रयास करते हैं। इसके लिए हमें इस फलन का संतुलन बिंदु पर प्रथम-कोटि टेलर श्रेणी प्रसार ज्ञात करना पड़ेगा। यद्यपि एक प्रथम-कोटि टेलर श्रेणी प्रसार से हमें एक अरैखिक फलन का रैखिक सन्निकटन प्राप्त होता है, समस्या यह है कि यह सन्निकटन प्रसार बिंदु के आस-पास एक सीमित परिसर में ही सही मान देता है। साथ ही मूल फलन की वक्रता जितनी अधिक होगी, यह परिसर उतना ही छोटा होगा। निश्चित रूप से यह ज़रूरी नहीं कि हम इस प्रसार को प्रथम-कोटि तक ही सीमित रखें, हम इस प्रकार को जिस कोटि तक चाहें ले जा सकते हैं। यदि हमारे वक्र की वक्रता बहुत अधिक है तो हमें इसका अच्छा सन्निकटन प्राप्त करने के लिए उच्च-कोटि के प्रसार की आवश्यकता पड़ेगी परंतु उच्च–कोटि के प्रसारों में अरैखिक पद/तत्व आ जाते हैं और हमारा लक्ष्य एक रैखिक प्रसार प्राप्त करना है। इसलिए हम प्रथम-कोटि अर्थात् रैखिक प्रसार पर ही रूक जाते हैं।

किसी दिए हुए व्यापक फलन $f(x)$ का प्रथम-कोटि टेलर श्रेणी सन्निकटन ज्ञात करने के लिए, हम सर्वप्रथम x का वह मान निर्धारित करते हैं, जिस पर हमें अपने अरैखिक फलन का रैखिक सन्निकटन ज्ञात करना है। आईए हम x के इस मान को x^* से ज्ञात करें। इसका अर्थ है कि सन्निकटन बिंदु पर $f(x)$ का मान $f(x^*)$ होगा। फलन $f(x)$ का किसी भी बिंदु x^* पर सन्निकटन हम निम्न प्रकार से ज्ञात कर सकते हैं :

$$f\left(x\right) \approx f\left(x^*\right) + \frac{df(x^*)}{dx}(x - x^*)$$

ध्यान दें कि इस समीकरण के दाएं पक्ष में उपस्थित अवकलज का मान भी x^* पर ही ज्ञात किया जाएगा। x, x^* के जितना निकट होगा, सन्निकटन का मान उतना ही बेहतर होगा।

अब हम इस सन्निकटन विधि का प्रयोग एक प्रथम–कोटि अंतर समीकरण पर करते हैं। स्मरण रहे कि हम नीचे दी गई प्रथम-कोटि अंतर समीकरण का सन्निकटन ज्ञात करने का प्रयास कर रहे हैं, और x^* या $\bar{x}$ को तन्त्र के एक संतुलन बिन्दु को दर्शाने के लिए प्रयोग कर रहे हैं

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

x^* इस अंतर समीकरण का एक संतुलन बिंदु है। इस संतुलन बिंदु के निकट, फलन का सन्निकटन करने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$x_{t+1} = f\left(x_t\right) = f\left(x^*\right) + \frac{df\left(x^*\right)}{dx}\left(x_t - x^*\right) \qquad \dots (1)$$

ध्यान दें कि x^*एक संतुलन बिंदु है। अतः हम इस समीकरण को इस प्रकार भी लिख सकते हैं :

$$x_{t+1} = x^* + \frac{df\left(x^*\right)}{dx}(x_t - x^*) \qquad \ldots(2)$$

आईए हम एक नया चर x^D परिभाषित करें जो कि x के वर्तमान मान से संतुलन मान x^* के विचलन को व्यक्त करता है। अतः, $x^D{}_t = x_t - x^*$ और $x^D{}_{t+1} = x_{t+1} - x^*$ है। इस प्रकार हम समीकरण (2) को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$x_{t+1}^D = \frac{df\left(x^*\right)}{dx} x_t^D \qquad \ldots(3)$$

समीकरण (3) की व्याख्या करते हुए, हमें यह ध्यान रखना चाहिए कि हमने प्रथम अवकलज $\frac{df\left(x^*\right)}{dx}$ का मान एक बिंदु x^* (जो यहाँ पर संतुलन बिंदु है) पर ज्ञात किया है, अतः यह एक अचर है। इस तथ्य के प्रकाश में यह स्थिर गुणांक वाला एक समघात समीकरण बन जाता है। अर्थात् हमें एक प्रथम–कोटि समघात अंतर समीकरण प्राप्त होता है। क्योंकि यह एक समघात समीकरण है, इसका संतुलन $x^D = 0$ पर होगा। परंतु x^D मूल चर का संतुलन बिंदु से विचलन है, इसलिए $x^D = 0$ का अर्थ है $x = x^*$। अतः यदि समीकरण 2 स्थिर है जबकि x^D इसके संतुलन बिंदु की ओर अभिसरण करता है, तो x भी अपने संतुलन बिंदु की ओर अभिसरण करेगा।

बोध प्रश्न 2

1) हम अरैखिक अंतर समीकरणों को रैखिक बनाने की आवश्यकता क्यों पड़ती है?

....

....

....

....

....

2) एक ऐसी विधि सुझाइए जिससे एक प्रथम-कोटि अरैखिक अंतर समीकरण का सन्निकटन उसके संतुलन बिंदु के समीप एक लघु प्रतिवेश में किया जा सके।

....

....

....

....

....

....

....

16.4 अरैखिक अंतर समीकरणों के अनुप्रयोग [Applications of Non-Linear Difference Equations]

इस अनुच्छेद में हम अरैखिक समीकरणों के कुछ अनुप्रयोगों की चर्चा करेंगे। संभवतः इन समीकरणों के विभिन्न अनुप्रयोगों में सबसे अधिक जाने–पहचाने अनुप्रयोग आर्थिक विकास के कुछ प्रतिमानों में मिलते हैं। यही नहीं अनेक उपभोग प्रतिमान भी अरैखिक समीकरणों से निरूपित होते हैं विशेषकर तब, जब उपयोगिता फलन अत्यंत प्रतिबंधात्मक न हो। परंतु हम यहाँ उपभोग फलन की चर्चा नहीं करेंगे, अपितु अन्य अरैखिक गत्यात्मक प्रक्रमों की चर्चा करेंगे। विशेष रूप से हम अपनी चर्चा में राबर्ट सोलो द्वारा प्रस्तावित एक अरैखिक संवृद्धि प्रतिमान तथा आवर्तन और अनावर्तन को सम्मिलित करेंगे।

16.1.1 सोलो प्रतिमान [Solow Growth Model]

आईए हम जाने कि एक संवृद्धि प्रतिमान से हम क्या समझते हैं। क्योंकि हम गतिकी पर चर्चा कर रहे हैं, हम यह देखना चाहेंगे कि एक चर किस प्रकार समय के साथ विकसित होता है। यहाँ हम यह मानते हैं कि समय असतत् स्तर पर परिवर्तित होता है। आर्थिक संवृद्धि के सिद्धांत में हम देखते हैं कि किस प्रकार कुल उत्पाद या आय समय के साथ परिवर्तित होते हैं। हम इस सेमेस्टर में 'व्यष्टि अर्थशास्त्र के सिद्धांत' पाठ्यक्रम में पाठकों का परिचय एक उत्पादन फलन से करवा चुके हैं जो उत्पाद, श्रम तथा पूँजी पर निर्भर एक फलन होता है। यहाँ हम पूरी अर्थव्यवस्था के लिए एक कुल उत्पादन फलन पर विचार करेंगे।

'समष्टि अर्थशास्त्र सिद्धांत' पाठ्यक्रम के अंतर्गत पाठकों का परिचय कुल समुच्चीकृत अर्थव्यवस्था के अध्ययन से, अर्थात् किसी अर्थव्यवस्था के समष्टीगत पक्ष से होगा। दोनों पाठ्यक्रमों के अध्ययन से बनी हमारी समझ के आधार पर, हम यहाँ पर मूलतः यह जाँच कर रहे हैं कि किस प्रकार कुल उत्पाद या जिसे हम किसी अर्थव्यवस्था का कुल घरेलू उत्पाद कहते हैं, कुल श्रम तथा पूँजी (मशीनरी तथा उपकरण) में वृद्धि के परिणाम स्वरूप समय के साथ वर्धित होता है।

प्रोफेसर राबर्ट सोलो ने वर्ष 1956 में आर्थिक संवृद्धि का एक प्रतिमान प्रतिपादित किया था। यह प्रतिमान अर्थशास्त्रीय विश्लेषण का केंद्रीय/मुख्य प्रतिमान बन गया है और वह आधारभूत प्रतिमान बन गया है जिसके आधार पर संवृद्धि पर आगे काफी कार्य किया गया है और नए प्रतिमान सुझाए गए हैं। इस प्रतिमान के लिए प्रो. सोलो को 1987 में अर्थशास्त्र में नोबेल पुरस्कार दिया गया। राबर्ट सोलो का आर्थिक संवृद्धि प्रतिमान, जिसपर हम यहाँ विचार करने जा रहे हैं, संवृद्धि का नवशास्त्रीय प्रतिमान भी कहलाता है। इस प्रतिमान में दो चर वाला अंतर समीकरण होता है परंतु संवृद्धि प्रतिमानों में प्रयुक्त होने वाली एक सामान्य तकनीक से इसे एक चर वाले अंतर समीकरण में परिवर्तित किया जा सकता है। हम एक समुच्चीकृत (aggregate) उत्पादन फलन से प्रारंभ करते हैं :

$$Y_t = f(K_t, L_t)$$

जहाँ Y कुल उत्पाद है, K कुल पूँजी तथा L कुल श्रम है। प्रत्येक चर के साथ संलग्न पादांक यह दर्शातें हैं कि उत्पादन प्रक्रम/प्रक्रिया में कोई विलम्ब/अंतराल (lag) नहीं है।

स्थिति को सरल बनाने के लिए हम यह मानते हैं कि श्रम (जिसे हम जनसंख्या के समरूप मानते हैं, अर्थात् श्रम बल में भागीदारी की दर 100 प्रतिशत है) बहिर्जात अनुपातिक दर n पर बढ़ता है। दूसरे शब्दों में, हम निम्नलिखित अंतर समीकरण प्राप्त करते हैं :

$$L_t = (1+n)L_{t-1}$$

पूंजी, निवल निवेश के परिणामस्वरूप बढ़ती है। इसे कुल निवेश में से अवमूल्यन को घटा कर प्राप्त किया जाता है। अतः, निवल निवेश को दो क्रमिक समय अंतरालों में पूँजी की मात्रा में परिवर्तन के रूप में परिभाषित किया जाता है। यह एक नवशास्त्रीय प्रतिमान है, अतः सारी बचत को उत्पादक भौतिक पूँजी के रूप में निवेश किया जाता है। अतः, निवेश को बचत के बराबर माना जाता है। नीचे दिए समीकरण पर विचार कीजिए जिसमें अंतराल t पर पूंजी का मान (K_t), अंतराल $t-1$ पर पूँजी (K_{t-1}) के फलन के रूप प्राप्त होता है :

$$K_t = sF(K_{t-1}, L_{t-1}) + (1-\delta)K_{t-1}$$

यहाँ, s औसत बचत अनुपात अर्थात् $\frac{S}{Y}$ है। अतः, $S = sY = sF(K,L)$ है। हम बचत S को भी निवेश I के बराबर मान रहे हैं। अतः, हम इसे $I = sF(K,L)$ से व्यक्त कर सकते हैं। यह स्पष्ट होना चाहिए कि

$I_{t-1} = K_t - K_{t-1}$ है। इससे हमें प्राप्त होता है कि $K_t = I_{t-1} + K_{t-1}$ है। यदि हम δ की दर से मूल्यह्रास घटाएं, तो हम $K_t = I_{t-1} + (1-\delta)K_{t-1}$ प्राप्त करते हैं। I_t के स्थान पर $sF(K_{t-1}, L_{t-1})$ रखने पर हम पाते हैं कि $K_t = sF(K_{t-1}, L_{t-1}) + (1-\delta)K_{t-1}$ है।

ध्यान दें समय अंतराल t में आने वाली नई पूँजी के लिए अंतराल $t-1$ में बचत की जाती है। ऊपर दिया गया समीकरण हमें यह बताता है कि वर्तमान अंतराल की पूँजी (K_t) पिछले अंतराल की पूँजी में से मूल्यह्रास $[(1-\delta)K_{t-1}]$ को घटाकर प्राप्त हुए भाग तथा पिछले वर्ष की आय (उत्पाद) से की गई बचत (जो कि निवेश के बराबर होती है तथा जो कि नए अंतराल में नई पूँजीगत वस्तुओं तथा उपकरणों के माध्यम से व्यक्त होती है) के बराबर, अर्थात् $[sF(K_{t-1}, L_{t-1})]$ होती है।

आईए अब हम उत्पादन फलन के लिए भी एक कल्पना करें। हम मान कर चलते हैं कि उत्पादन फलन, पैमाने का स्थिर प्रतिफल दर्शाता है। इसका अर्थ है कि यदि श्रम और पूँजी में λ गुणा वृद्धि होती है तो उत्पादन भी उसी गुणक से अर्थात् λ गुणा हो जाएगा। अर्थात् पैमाने के स्थिर प्रतिफल, [CRS] से हमें प्राप्त होता है :

$$\lambda Y_t = F(\lambda K_t, \lambda L_t)$$

मान लीजिए $\lambda = \frac{1}{L_t}$ है। इस स्थिति में हम पाते हैं कि $\frac{F(K_t, L_t)}{L_t} = F\left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right)$ है, जहाँ $\frac{K_t}{L_t}$ वर्तमान पूँजी–श्रम अनुपात है। समीकरण का दायाँ पक्ष वह राशि दर्शाता है जो कि एक अकेला श्रमिक उत्पादित करेगा यदि उसे वर्तमान पूँजी–श्रम अनुपात के

बराबर पूँजीगत स्टॉक उपलब्ध हो। इस समीकरण का बायाँ पक्ष प्रति श्रमिक/व्यक्ति उत्पादन को दर्शाता है तथा इसे y_t से व्यक्त किया जाता है।

हम ऊपर प्राप्त समीकरण को $y_t = f(k_t)$ के रूप में लिख सकते हैं जहाँ $k_t = \frac{K_t}{L_t}$ है।

यहाँ हमने प्रति व्यक्ति उत्पादन को प्रति व्यक्ति पूँजी के फलन के रूप में दर्शाया है। अब ऊपर प्राप्त किए गए समीकरण $K_t = sF(K_{t-1}, L_{t-1}) + (1-\delta)K_{t-1}$ पर ध्यान दें। आईए हम इस समीकरण के दोनों पक्षों को L_t से विभाजित करें। इससे हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{K_t}{L_t} = s\frac{F(K_{t-1}, L_{t-1})}{L_t} + \frac{(1-\delta)K_{t-1}}{L_t}$$

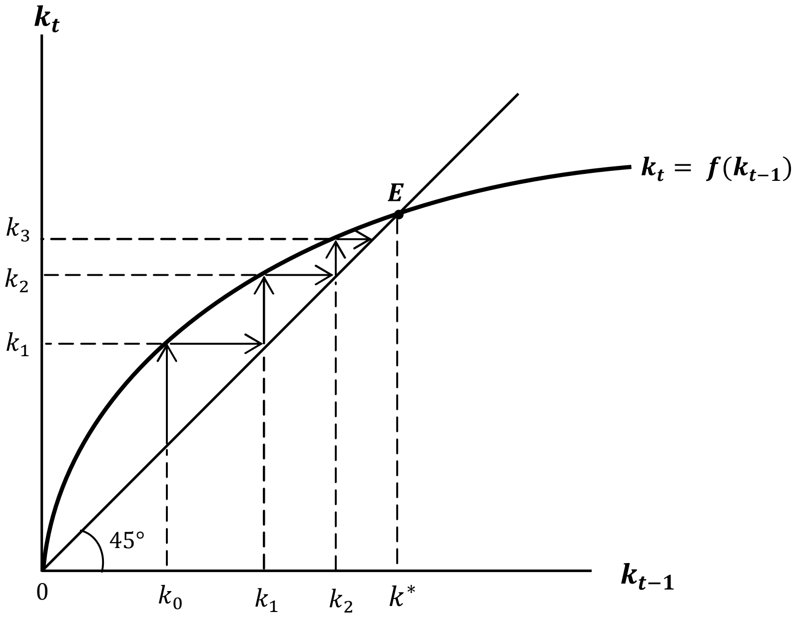
इस समीकरण के दाएँ पक्ष में दोनों समय अवधियों $t-1$ और t से संबंधित पद हैं। इसके समाधान के लिए, आईए हम दाएँ पक्ष के प्रत्येक पद को L_{t-1} से गुणा तथा विभाजित करें। ऐसा करने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{K_t}{L_t} = \left(\frac{sF(K_{t-1}, L_{t-1})}{L_{t-1}}\right)\left(\frac{L_{t-1}}{L_t}\right) + \left(\frac{(1-\delta)K_{t-1}}{L_{t-1}}\right)\left(\frac{L_{t-1}}{L_t}\right) \qquad \ldots(4)$$

इस समीकरण में पद $\frac{F(K_{t-1}, L_{t-1})}{L_{t-1}}$ समय अवधि $t-1$ में प्रति व्यक्ति उत्पादन है तथा पद $\frac{K_{t-1}}{L_{t-1}}$ समय अवधि $t-1$ में पूँजी–श्रम अनुपात है। हमने ऊपर देखा कि $L_t = (1+n)L_{t-1}$ है। इससे हम पाते हैं कि $\frac{L_{t-1}}{L_t} = \frac{1}{(1+n)}$ है। प्रति व्यक्ति मात्राओं के संकेत चिह्नों का प्रयोग करने पर जिन्हें हम पहले ही परिभाषित कर चुके हैं, हम समीकरण (4) को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$k_t = \frac{sf(k_{t-1})}{1+n} + \left(\frac{1-\delta}{1+n}\right)k_{t-1} \qquad \ldots(5)$$

यहाँ n और δ बहिर्जात हैं (अर्थात् प्रतिमान के बाहर से दिए हुए तथा निश्चित हैं)। अतः, हम एक प्रथम–कोटि अंतर समीकरण प्राप्त करते हैं जैसा कि समीकरण (5) में दर्शाया गया है, जिसमें k_t, k_{t-1} का फलन है। हमने $f(k_t)$ को एक परिशुद्ध फलन के रूप में व्यक्त नहीं किया है, अतः हम स्वयं को समीकरण (5) के एक गुणात्मक, प्रावस्था आरेख विश्लेषण तक सीमित रखते हैं। हम देख सकते हैं कि प्रति व्यक्ति उत्पादन फलन $y_t = f(k_t)$ के गुणधर्म सामान्य उत्पादन फलन के समान ही हैं। साथ ही $f'(x) > 0$ तथा $f''(x) < 0$ है। इन मान्यताओं के आधार पर हम एक प्रावस्था आरेख बना सकते हैं जैसा कि रेखाचित्र 16.5 में दर्शाया गया है।



रेखाचित्र 16.5 : एक नवशास्त्रीय संवृद्धि प्रतिमान का प्रावस्था आरेख

संतुलन बिंदु पर $k_{t-1} = k_t = k^*$ (मान लीजिए) है। इस प्रकार, यद्यपि हमारे पास $f(x)$ की एक सुस्पष्ट परिभाषा नहीं है, तो भी हम देख सकते हैं कि समीकरण (5) संबंध

$$\frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{(n+\delta)}{s}$$

को संतुष्ट करता है।

16.4.2 आवर्तन तथा अनावर्तन [Cycles and Chaos]

अभी तक हमने केवल उन्हीं अरैखिक अंतर समीकरणों पर विचार किया है जिनके लिए फलन $f(.)$ की ढाल अपना चिह्न नहीं बदलती, अर्थात् x_t+1 का x_t के सापेक्ष/प्रति या x_t का x_t+1 के सापेक्ष आलेख अपना चिह्न नहीं बदलता। दूसरे शब्दों में, प्रावस्था आरेख में x_t+1 के सापेक्ष x_t का आलेख, या तो एक दिष्ट वर्धमान अथवा एकदिष्ट ह्रासमान होता है परंतु कभी भी पर्वत के आकार का (उल्टे U के आकार का) या घाटी के आकार का (U के आकार का नहीं होता)। इस उप-अनुच्छेद में, उन अरैखिक अंतर समीकरणों पर विचार करते हैं जो प्रावस्था आरेख में पर्वत के आकार के वक्रों को उत्पन्न करते हैं। इस प्रकार के अंतर समीकरणों में रोचक गत्यात्मक व्यवहार देखने को मिलता है जैसे कि चक्र, जो प्रत्येक दो या तीन समय अवधियों में स्वयं को दोहराते हैं या फिर ऐसे गत्यात्मक प्रक्रम जिनमें x_t के व्यवहार में अनियमितता होती है। इस प्रकार के अनियमित प्रक्रम को अनावर्तन (*Chaos*) कहते हैं। ऐसी चक्रीय अथवा अव्यवस्थित व्यवहार का विस्तार में विश्लेषण करना इस इकाई के विषय-क्षेत्र से बाहर है। अतः, हम इस इकाई में इन विषयों का केवल परिचयात्मक उल्लेख करेंगे।

नीचे दिए प्रथम–कोटि, अरैखिक, स्वायत अंतर समीकरण पर विचार कीजिए :

$$x_{t+1} = A\, x_t\, (1 - x_t), \text{ where } t = 0, 1, 2, \ldots \qquad \ldots(6)$$

संतुलन $\bar{x}$ मान निम्नलिखित समीकरणों को हल करने से प्राप्त होते हैं

$$\bar{x} - A\bar{x}\,(1-\bar{x}) = 0 \Rightarrow A\bar{x}^2 - A\bar{x} + \bar{x} = 0$$

$$\Rightarrow A\bar{x}^2 + \bar{x}(1-A) = 0 \Rightarrow \bar{x}^2 + \bar{x}\frac{(1-A)}{A} = 0$$

इस प्रकार हम पाते हैं :

$$\bar{x}\left[\left(\frac{1-A}{A}\right) + \bar{x}\right] = 0$$

हमें दो संतुलन बिंदु $\bar{x} = 0$ तथा $\bar{x} = \left(\frac{A-1}{A}\right)$ प्राप्त होते हैं। दूसरे संतुलन बिंदु के आधार पर हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि स्थायी-अवस्था संतुलन केवल तभी प्राप्त होता है जब $A > 1$ हो। यदि $A \leq 1$ हो, तो स्थायी-अवस्थाएं शून्य या ऋणात्मक होती हैं। हम ऐसी अवस्थाओं पर चर्चा नहीं करेंगे क्योंकि अर्थशास्त्र में इनका कोई विशेष महत्व नहीं है। स्मरण करें कि हमने प्रावस्था आरेखों पर चर्चा करते हुए पाया था कि किसी प्रथम-कोटि, स्वायत, अरैखिक अंतर समीकरण का स्थायी-अवस्था संतुलन बिंदु स्थानीय रूप से स्थिर होता है यदि इसकी ढाल का निरपेक्ष मान, अर्थात् संतुलन बिंदु पर इसका अवकलन 1 से कम हो। समीकरण (6) में प्राप्त दो स्थायी बिंदुओं $\bar{x} = 0$ तथा $\bar{x} = \left(\frac{A-1}{A}\right)$ पर अवकलज के मान इस प्रकार हैं

$$\frac{dx_{t+1}}{dx_t} = A - 2Ax_t$$

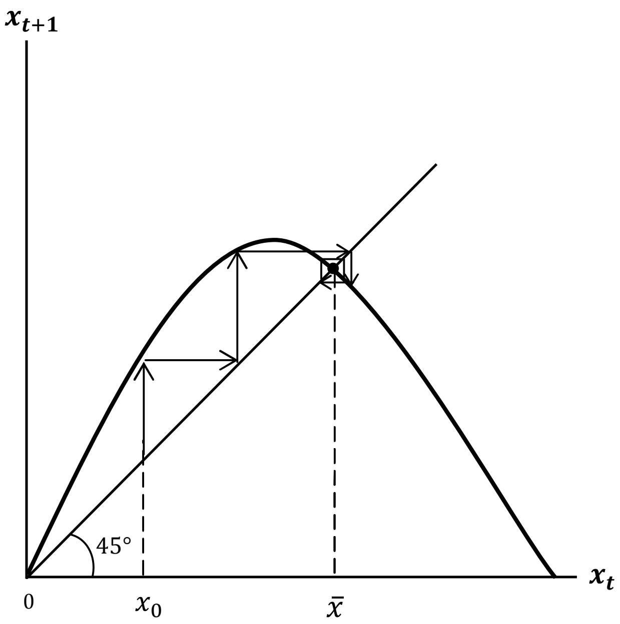
$\bar{x} = 0$ पर $\frac{dx_{t+1}}{dx_t} = A$ है और $\bar{x} = \frac{A-1}{A}$ पर $\frac{dx_{t+1}}{dx_t} = 2 - A$ है।

ऊपर प्राप्त परिणाम यह दर्शाते हैं कि स्थायी बिंदु $\bar{x} = 0$ अस्थिर है क्योंकि हमने $A > 1$ माना है। बिंदु $\bar{x} = \frac{A-1}{A}$

स्थानीय रूप से केवल तभी स्थायी होगा यदि $2 - A$ का निरपेक्ष मान अर्थात् $|2 - A| < 1$ हो, अर्थात् यदि $1 < A < 3$ हो। ध्यान दें कि अनुच्छेद 16.2 में प्राप्त आधारभूत नियम (i) यही है।

क्योंकि ऊपर लिया गया समीकरण एक प्रथम-कोटि अरैखिक अंतर समीकरण है, हम इस के लिए एक प्रावस्था आरेख बना सकते हैं। प्रावस्था रेखा का 45^0 रेखा का प्रतिच्छेदन समीकरण के स्थायी बिंदुओं पर, अर्थात्, 0 और $\left(\frac{A-1}{A}\right)$ पर प्राप्त होगा। आलेख का अधिकतम मान $x = \frac{1}{2}$ पर होगा, जहाँ ढाल $\frac{dx_{t+1}}{dx_t} = 0$ होगी। फलन का दूसरा अवकलज $\frac{d^2x_{t+1}}{dx_t^{\,2}} = -2A$ है, जो कि ऋणात्मक है। यह दर्शाता है कि फलन का आलेख उल्टे U के आकार का होगा (रेखाचित्र 16.6 देखें)

इस आरेख से पाठक स्वयं देख सकते हैं कि प्रावस्था रेखा का 45^0 रेखा के साथ प्रतिच्छेदन, अधिकतम मान बिंदु के बाई ओर होगा यदि $1 < A < 2$ है। इसका अर्थ है कि स्थिर स्थायी बिंदु $\bar{x} = \frac{A-1}{A}$ पर ढाल धनात्मक है। जबकि, यदि $2 < A < 3$ तो प्रतिच्छेदन स्थिर स्थायी बिंदु के दाहिनी ओर होगा।



रेखाचित्र 16.6

यह स्थानीय स्थिरता के प्रतिबंध को संतुष्ट करता है क्योंकि स्थिर स्थायी बिंदु पर प्रावस्था रेखा की ढाल ऋणात्मक होगी।

1 से कम निरपेक्ष मान वाली ऋणात्मक ढाल का अर्थ है कि x_t, $\bar{x}$ के एक प्रतिवेश के अंदर रहते हुए $\bar{x}$ की ओर किसी भी दिशा से अभिसरित होगा परंतु $\bar{x}$ की ओर जाने का पथ दोलनी होगा। रेखाचित्र 16.6 को देंखे। x_0 से प्रारंभ होकर जहाँ ढाल धनात्मक है, x_t पहली कुछ समय अवधियों एक दिष्ट रूप से बढ़ता है। लेकिन जब x_t, $\bar{x}$ के प्रतिवेश में पहुँचता है, ढाल ऋणात्मक हो जाता है तथा x_t की गति प्रतिवेश में दोलनी हो जाती है और अंततः स्थायी अवस्था की ओर अभिसरित होता है।

यदि $A \geq 3$ है, तो प्रावस्था रेखा का व्यवहार क्या होगा? सर्वप्रथम, $\bar{x} = \frac{A-1}{A}$ अब स्थिर स्थायी अवस्था नहीं रहेगी, बल्कि अस्थिर हो जाएगी। दूसरे, पर्वत के आकार की प्रावस्था रेखा का एक विशिष्ट गुण है जो कि एक एकदिष्ट प्रावस्था आरेख के लिए सत्य नहीं होगा– अर्थात्, x_t अंतहीन रूप से 0 या अनंतता की ओर नहीं जाता बल्कि एक सीमित परिसर में दोलन करेगा यद्यपि यह स्थायी अवस्था की ओर अभिसरित नहीं होगा। परंतु यह नियमित आवर्ती व्यवहार दर्शाएगा।

जब एक अरैखिक अंतर समीकरण का इस प्रकार का उल्टे U के आकार का प्रावस्था आरेख प्राप्त होता है, फलन के व्यवहार में एक प्रभावसीमा उत्पन्न होती है। अर्थात् A के मान में छोटे से परिवर्तन से भी x के व्यवहार में और इसके प्रक्षेप-पथ में नाटकीय परिवर्तन होते हैं। उदाहरण के लिए, ऊपर दिए गए उदाहरण में, यदि A का मान 2 और 3 के बीच में हो, तो x प्रत्यावर्ती मान लेता है परंतु अभिसरण की ओर जाता है। जैसे ही A का मान 3 या उससे अधिक होता है, प्रक्षेप पथ अत्याधिक जटिल हो जाता है। 3 और 4 के बीच कुछ मानों के लिए, x_t आवर्ती प्रत्यावर्तन में स्थिर होता है। इसे सीमा चक्र भी कहते हैं। मूलतः इसका अर्थ है कि x केवल एक विशिष्ट परिसर में मान लेता है और इसी परिसर के अंदर मानों का प्रत्यावर्तन (अदल-बदल) करता है। यह दर्शाया जा सकता है कि जब A का मान 3.2 है, यदि गतिक तंत्र लंबे समय तक

चलता है, तो यह एक ऐसे प्रतिरूप में स्थिर होगा जिसे आवर्त 2 का चक्र कहते हैं, यह मानों 0.519 और 0.799 के बीच प्रत्यावर्तित होता रहता है। यह एक सीमित चक्र में प्रत्यावर्तन का एक उदाहरण है। सीमित चक्र दोलन को जन्म देते हैं परंतु यह केवल उच्च-कोटि के अंतर समीकरणों में होता है। प्रत्यावर्तन सीमा चक्र का मूल-तत्व है। यह एक स्थिर सीमा चक्र का एक उदाहरण है।

फिर भी, ऐसी स्थितियाँ भी हो सकती है जब सीमा चक्र अस्थायी हो। इन चक्रों के मूलभूत गुणधर्म वही होते हैं जो कि एक अस्थिर संतुलन के होते हैं। इनकी मूल विशिष्टता यह है कि यदि हम सीमा चक्र में एक मान से प्रारंभ करें, तो हम सदा उसी चक्रीय पथ में रहेंगे, न अभिसरण होगा, न अपसरण, यदि हम चक्र के बाहर किसी भी ओर एक मान से प्रारंभ करें तो हम चक्र से दूर अपसरण करेंगे।

यदि हम A का मान सुस्थिर रूप से बढ़ाएं, विभिन्न परिणाम निकल कर आते हैं। यदि $A = 3.4$ हो, तो वह अंतराल जिसमें x का मान स्थित होगा बड़ा होगा परंतु फिर भी यह दो मानों के बीच रहेगा। यदि $A = 3.5$ हो, तंत्र एक आवर्त 4 के चक्र में रहता है, जो कि $x = 0.382$ से $x = 0.327$ फिर $x = 0.501$ तक और फिर $x = 0.875$ तक जाएगा। परंतु यदि A का मान थोड़ा अधिक जैसे कि $A = 3.84$ हो, तंत्र वापिस आवर्त 3 के चक्र में आ जाता है।

A के मानों के बारे में एक रोचक तथ्य यह है कि इसके प्रत्यार्पण की आवर्ति सदैव एकसार नही होती। यहीं अव्यवस्था की स्थिति पैदा होती है। यदि हम $A = 3.85$ लें तो हम पाएंगे कि तंत्र एक ऊँचे/ऊपरी संतुलन बिंदु के आस-पास एकांतरित होता है, परंतु कभी अपने आपको दोहराता नहीं। यह ऐसा कोई प्रतिरूप नहीं दर्शाता जो बार-बार अपने को दोहराता हो। यह अनावर्ती हो जाता है। दूसरे शब्दों में, तंत्र अव्यवस्थित हो जाता है।

अव्यवस्था का अध्ययन अर्थशास्त्र में किस प्रकार उपयोगी है? सर्वप्रथम, अव्यवस्था और एक यादृच्छिक प्रक्रम में अंतर करना अत्यंत कठिन है। और यह यादृच्छिक प्रक्रम क्या है? अगले सेमेस्टर में आप सांख्यिकी के पाठ्यक्रम में अनश्चितता और प्रायिक्ता के बारे में अध्ययन करेंगे। कुछ पाठक पहले से ही प्रायकिता से परिचित होंगे। यादृच्छिक प्रक्रम प्रायिकता से संबद्ध है। एक यादृच्छिक चर एक ऐसा चर होता है जिसका मान संयोग पर निर्भर होता है। अयादृच्छिक प्रक्रम या ऐसे प्रक्रम जो प्रायिकता पर आधारित नहीं होते, निर्धारणात्मक प्रक्रम कहलाते हैं। गत्यात्मक प्रक्रम, जिन्हें हमने रैखिक एवं अरैखिक अंतर समीकरणों के माध्यम से पढ़ा है, निर्धारणात्मक प्रक्रम हैं। अनावर्ति का महत्व यह है कि अव्यवस्था ऐसी स्थिति को चित्रित करती है जिसमें एक निर्धारणात्मक प्रक्रम एक यादृच्छिक प्रक्रम के प्ररिरूप की नकल करता है। इसलिए एक यादृच्छिक प्रक्रम और अव्यवस्था में अंतर करना अत्यंत कठिन होता है। एक यादृच्छिक प्रक्रम और अनावर्तक प्रक्रम में मुख्य भेद यही है कि यादृच्छिक प्रक्रम का पूर्वानुमान नहीं लगाया जा सकता। जबकि एक अनावर्तक तंत्र में, यदि प्राचल दिए हों, तो आगे आने वाले मानों का अनुमान सरलता से लगाया जा सकता है।

बोध प्रश्न 3

1) सोलो संवृद्धि प्रतिमान के मूलभूत अंतर समीकरण की व्याख्या कीजिए।

....

2) क) एक अव्यवस्थित तंत्र के प्रावस्था आरेख का मूलभूत आकार क्या होता है?

....

....

....

....

....

ख) एक सीमा चक्र से आप क्या समझते हैं?

....

....

....

....

....

....

3) अर्थशास्त्र में अनावर्ती/अव्यवस्था किस प्रकार महत्वपूर्ण है? एक अव्यवस्थित प्रक्रम, एक यादृच्छिक प्रक्रम से किस प्रकार भिन्न है?

....

....

....

....

....

16.5 सार-संक्षेप

इकाई 15 रैखिक अंतर समीकरणों पर केन्द्रित थी। पिछली इकाई की तरह, इकाई 16 में भी हमने असतत् गत्यात्मक प्रक्रमों की चर्चा की, अर्थात्, वे प्रक्रम जिनमें एक चर का मान, उसी चर के पूर्व मानों पर निर्भर करता है चर अपने मान असतत् चरणों में परिवर्तित करते है, न कि संतत। यह इकाई व्यापक अंतर समीकरणों पर आधारित थी, रैखिक अंतर समीकरण भी जिनके एक विशिष्ट प्रकार थे। अतः, इस इकाई के शीर्षक में प्रयुक्त पद 'अरैखिक' को व्यापक अंतर समीकरण के रूप में लिया जाना चाहिए न कि ऐसे अंतर समीकरणों के रूप में जो अनिवार्यतः रैखिक न हों। इस इकाई का प्रारंभ अंतर समीकरणों की व्यापक प्रकृति की व्याख्या से हुआ। हमने देखा कि रैखिक अंतर समीकरण एक विशिष्ट प्रकार के अंतर समीकरण हैं। इस इकाई को हमने केवल प्रथम-कोटि अंतर समीकरणों, अर्थात, ऐसे अंतर समीकरणों तक सीमित रखा जिसमें चर का समय अवधि t में मान केवल चर के $t-1$ समय अवधि के मान पर निर्भर करता है, $t-2$, $t-3$ इत्यादि समय अवधियों के मानों पर नहीं। अतः, चर का मान केवल चर के ठीक पीछे वाले मान पर निर्भर करता है। चर के और पुराने मानों पर नहीं। हमने देखा कि हम समीकरण में बिना समीकरण के प्रथम-कोटि गुण को बदले समय अवधि को

बदल सकते हैं। अर्थात्, हम अवधि $t + 1$ में चर का मान, केवल चर के समय अवधि t के मान के पद में ज्ञात कर सकते हैं।

अगले अनुच्छेद में पाठकों का परिचय प्रावस्था आरेख (या प्रावस्था रेखा) से करवाया गया जिनसे हमें प्रथम-कोटि, अरैखिक स्वायत अंतर समीकरणों को चित्रित करने में तथा उसके संभावित हल के बारे में चर्चा करने में सहायता मिली। प्रावस्था आरेख में चर के वर्तमान मान को क्षैतिज अक्ष पर अंकित किया जाता है तथा आगे आने वाले मान को ऊर्ध्वाधर अक्ष पर/या चर के पूर्व मान को क्षैतिज अक्ष पर तथा वर्तमान मान को ऊर्ध्वाधर अक्ष पर। हमने पाया कि जबकि प्रथम-कोटि अरैखिक अंतर समीकरण को निरूपित करने वाला वक्र 45^0 रेखा को एक से अधिक बिंदुओं पर काट सकते है। जबकि है प्रथम-कोटि रैखिक अंतर समीकरणों में यह संभव नहीं है। यदि ऐसे अंतर समीकरण को निरूपित करने वाला वक्र बढ़ते हुई ढाल वाला हो तो संतुलन बिंदु (स्थायी बिंदु) अभिसारी या अपसारी हो सकता है। कम होती हुई ढाल वाला वक्र दोलन उत्पन्न करता है। क्योंकि इस इकाई में हम केवल प्रथम-कोटि अंतर समीकरणों तक ही सीमित थे, हम मुख्यतः आरेखीय हल प्राप्त करने की विधियों पर ही निर्भर रहे। अतः, प्रावस्था आरेख विश्लेषण एक महत्वपूर्ण उपकरण के रूप में सामने आया।

इससे अगले अनुच्छेद में हमने अरैखिक अंतर समीकरणों को रैखिक समीकरणों में परिवर्तित करने की विधियों पर विचार किया। इसके लिए, हमने फलन $f(x)$ के किसी उचित बिंदु पर टेलर श्रेणी प्रसार का उपयोग किया। इससे अगले अनुच्छेद में हमने अरैखिक अंतर समीकरणों के दो अनुप्रयोगों पर चर्चा की सोलो संवृद्धि प्रतिमान और आवर्ती चक्रों तथा आवर्ती अव्यवस्था (अनावर्तिता) पर। सोलो संवृद्धि प्रतिमान में हमने प्रति-व्यक्ति उत्पाद को प्रति व्यक्ति पूँजी के फलन के रूप में देखा तथा इस फलन का समय के संदर्भ में (इस फलन की गत्यात्मकता) अध्ययन किया। इस स्थिति के लिए एक प्रावस्था आरेख उपलब्ध करवाया गया जिस में एक समय अवधि में पूँजी-श्रमिक अनुपात को ऊर्ध्वर अक्ष पर दर्शाया गया तथा उत्पाद-श्रमिक अनुपात को क्षैतिज अक्ष पर। हमने एक अरैखिक अंतर समीकरण की सहायता से वर्तमान अवधि की पूँजी प्रति व्यक्ति और पिछली अवधि के पूँजी प्रति व्यक्ति से संबद्ध गत्यात्मकता को दर्शाया।

अंत में, इस इकाई में उन गत्यात्मक प्रक्रमों की चर्चा की गई जिनमें अरैखिक फलनों के प्रावस्था आरेख उल्टे U के आकार के हों। ऐसे प्रावस्था आरेखों के महत्वपूर्ण गुणधर्मो की चर्चा इस आधार पर की गई कि फलन का अधिकतम बिंदु 45^0 रेखा के बाईं ओर स्थित है या दाईं ओर। इस प्रकार के द्विघात अंतर समीकरण की सहायता से, हमने सीमा चक्रों और अनावर्ती चक्रों का अध्ययन किया।

अनावर्ती चक्र वाली स्थिति को अव्यवस्था कहते हैं। अंत में हमने देखा कि वास्तव में अव्यवस्थित व्यवहार, यादृच्छिक प्रक्रमों के व्यवहार की नकल करता है।

16.6 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

बोध प्रश्न 1

1) एक अरैखिक अंतर समीकरण एक ऐसा समीकरण है एक चर के एक समय अवधि में मान को उसी चर के पिछली समय अवधियों के मानों से संबद्ध करता है। समीकरण को निरूपित करने वाले फलन का आकार किसी आकार विशेष

तक सीमित नहीं है। एक रैखिक अंतर समीकरण एक अरैखिक अंतर समीकरण की एक विशिष्ट स्थिति है।

2) एक प्रावस्था आरेख, एक चर के मानों को ऊर्ध्वाधर अक्षपर तथा उसी चर के पिछली समय अवधि के मानों को क्षैतिक अक्ष पर अंकित करता है। यह प्रथम-कोटि अंतर समीकरणों को दर्शाता है। इसमें एक 45^0 रेखा होती और फलन का इस 45^0 रेखा से प्रतिच्छेदन हमें संतुलन बिंदुओं की पहचान करने में मदद करता है।

3) क) एक रैखिक अंतर समीकरण में एक संतुलन बिंदु होता है, एक अरैखिक समीकरण के एक से अधिक संतुलन बिंदु होते है।

ख) एक स्थिर संतुलन बिंदु को एक अभिसारी तथा एक अस्थिर संतुलन बिंदु को अपसारी कहते हैं।

बोध प्रश्न 2

1) हम एक अरैखिक अंतर समीकरण को रैखिक समीकरण में इसलिए परिवर्तित करते हैं कि हम समीकरण की स्थिरता की जाँच कर सकें।

2) हम एक अरैखिक अंतर समीकरण को उसके संतुलन बिंदु के सामीप्य में रैखिक बनाने के लिए प्रथम-कोटि टेलर श्रेणी प्रसार का प्रयोग कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 3

1) सोलो प्रतिमान का आधारभूत अरैखिक अंतर समीकरण पूँजी-श्रम अनुपात को पिछली समय अवधि में इसके मान से संबद्ध करता है। इसी फलन का प्रावस्था आरेख बनाया जाता है।

2) क) एक अव्यवस्थित गत्यात्मक तंत्र (के आरेख) का आकार मूलतः एक पर्वत के आकार का होता है जबकि सभी द्विघात फलनों का व्यवहार अव्यवस्थित नहीं होता।

ख) एक सीमा चक्र, एक ऐसे समय अंतराल में, जिसमें फलन अपने सीमित मान लेता है, एक आवर्ती नियमित चक्रीय व्यवहार दर्शाता है।

3) अर्थशास्त्र में अव्यवस्था या अनावर्तिता महत्वपूर्ण है क्योंकि यह दर्शाती है कि किस प्रकार एक निर्धारणात्मक समीकरण एक अनियमित अनावर्ती चक्रीय व्यवहार को जन्म देता है। एक यादृच्छिक प्रक्रम में आगे आने वाले मानों का अनुमान नहीं लगाया जा सकता (यही एक यादृच्छिक चर की प्रकृति है) जबकि एक अव्यवस्थित गत्यात्मक प्रक्रम में आगे आने वाले मानों का अनुमान लगाया जा सकता है।