इकाई 9 प्रथम-कोटि अवकलज*

संरचना

9.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप कर पाएंगे :

- अवकलज एवं अवकल की संकल्पनाओं का वर्णन;
- किसी वक्र की स्पर्श रेखा के परिसीमन मान के रूप में अवकलज की परिभाषा;
- अवकलनीयता की शर्तें और इन शर्तों के संततता से संबंध; तथा
- अवकलन के कुछ महत्वपूर्ण नियमों का वर्णन।

9.1 विषय-प्रवेश

हमने इकाई 7 में सीमाओं तथा इकाई 8 में संततता के बारे में पढ़ा है। हमने देखा कि किन स्थितियों में किसी अनुक्रम की तथा किसी फलन की सीमा का अस्तित्व होता है। सीमा की संकल्पना के आधार पर, हमनें संततता पर चर्चा की। इस इकाई में हमने उल्लेख किया कि किसी फलन के अवकलज के अस्तित्व के लिए संततता महत्वपूर्ण है। वास्तव में संततता किसी फलन के अवकलज के अस्तित्व के लिए अनिवार्य है। यह इकाई फलनों के अवकलज ज्ञात करने से संबद्ध है। किसी फलन का अवकलज ज्ञात करने की प्रक्रिया को अवकलन कहते हैं। हम देखेंगे, कि अवकलज, अर्थशास्त्रीय घटनाओं को समझने के लिए एक अत्यन्त महत्वपूर्ण, बल्कि केंद्रीय, अवधारणा है। आईए हम अब अवकलजों का अध्ययन प्रारंभ करें। यहाँ हम यह उल्लेख कर सकते हैं कि यह इकाई केवल प्रथम-कोटि अवकलजों से संबद्ध है। अगली इकाई में हम अवकलजों के अवकलज और उनके भी अवकलजों अर्थात् उच्च-कोटि अवकलजों का अध्ययन करेंगे।

इस इकाई के अगले अनुच्छेद में हम अवकलजों की ज्यामितीय व्याख्या करेंगे। हम देखेंगे कि अवकलज किसी वक्र की जीवा के सीमांत मान के रूप में देखा जा सकता है क्योंकि सीमांत स्थिति में जीवा उस वक्र की एक स्पर्श रेखा बन जाती है। अगले अनुच्छेद में, हम अवकलज की औपचारिक भाषा देंगे और अवकल की महत्वपूर्ण संकल्पना की भी चर्चा करेंगे। इससे अगले अनुच्छेद में, हम अवकलनीयता की शर्तों पर बात करेंगे, अर्थात् किसी अवकलज के अस्तित्व के लिए कौन सी शर्तें आवश्यक हैं।

*श्री सौगतो सेन

उसके पश्चात्, इस इकाई में कुछ विशिष्ट फलनों के अवकलज ज्ञात करने के नियमों पर चर्चा की जाएगी। अंत में, इस इकाई में अर्थशास्त्र में प्रथम-कोटि अवकलजों के उपयोग के कुछ उदाहरण प्रस्तुत किए जाएंगे।

9.2 अवकलज [DERIVATIVES]

हम सीमा और संततता की संकल्पनाओं से पहले से ही परिचित हैं। ये संकल्पनाएं अवकलन गणित की प्रमुख विषयवस्तु, अर्थात्, एक फलन के अवकलज, की पृष्ठभूमि बनाती हैं। इस अनुच्छेद में हम अवकलजों का अध्ययन करेंगे।

अंतर अनुपात

एक फलन $y = f(x)$ पर विचार कीजिए। मान लीजिए कि जब स्वतंत्र चर x अपना मान x_1 से बदलकर x_2 करता है, निर्भर चर y अपना मान $y_1 = f(x_1)$ से बदल कर $y_2 = f(x_2)$ कर लेता है। x के मान में परिवर्तन, अंतर $x_2 - x_1$ से प्राप्त किया जा सकता है। गणित में किसी भी परिवर्तन को ग्रीक भाषा के बड़े अक्षर Δ (जिसे डेल्टा कहते हैं) से व्यक्त किया जाता है। अतः, x में होने वाले परिवर्तन को $\Delta x = x_2 - x_1$ के रूप में लिखा जा सकता है। इसी प्रकार y में होने वाले परिवर्तन को $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$ के रूप में लिखा जा सकता है। जब x, Δx से परिवर्तित होता है, तो हम पाते हैं कि y, Δy से परिवर्तित होता है।

इसलिए, x में हुए प्रति इकाई परिवर्तन के सापेक्ष y में हुए परिवर्तन को इस अनुपात $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ से व्यक्त किया जाता है। क्योंकि यह भागफल दो अंतरों का अनुपात है, इसे अंतर अनुपात कहा जाता है। यह स्पष्ट है कि यह अंतर अनुपात, अंतराल (x_1, x_2) पर y में हुए औसत परिवर्तन का माप है। आईए हम एक फलन $y = f(x)$ पर विचार करें जहाँ y एक निर्भर चर तथा x एक स्वतंत्र चर है। मान लीजिए x में एक अति सूक्ष्म (infinitesimal)

परिवर्तन Δx है तथा y में (x में होने वाले इस परिवर्तन Δx के सापेक्ष) होने वाला आति सूक्ष्म परिवर्तन Δy है इस प्रकार की स्थितियाँ व्यापक रूप तथा अर्थशास्त्र संबंधी समस्याओं में अक्सर पाई जाती है। इसके लिए, फलन का संतत होना आवश्यक है। कोई फलन केवल तभी अवकलनीय होता है (अर्थात् उसके अवकलज का अस्तित्व होता है तथा उसे प्राप्त किया जा सकता है) जब वह संतत हो। और कोई फलन संतत होता है जब उसमें कोई विच्छेद (*break*) नहीं होता अर्थात् इसे बिना पेन/पेंसिल उठाए कागज़ पर बनाया जा सकता है।

यदि फलन $y = f(x)$ की संततता दी हुई है तो हम स्वतंत्र चर (x) में होने वाले परिवर्तन के सापेक्ष, निर्भर चर (y) में होने वाले परिवर्तन को ज्ञात करने का प्रयत्न करते हैं। दूसरे शब्दों में, हम दिए हुए फलन $y = f(x)$ से एक और फलन ज्ञात करना चाहते हैं, एक ऐसा फलन जो

x और y में होने वाले परिवर्तनों के बीच संबंध को व्यक्त करें। इस नए फलन को दिए हुए फलन का अवकलज कहते हैं और इसे अनेक चिह्नों, जैसे कि $y_1, y', \frac{dy}{dx}$ या $f'(x)$ से व्यक्त किया जाता है।

किसी अवकलज $\frac{dy}{dx}$ (अर्थात् अवकल गुणांक) को ज्ञात करने की प्रक्रिया को फलन का अवकलन कहते हैं। गणित की वह शाखा जो फलनों और उनके अवकलजों (अथवा उनकी अवकलनीयता) से संबंधित अध्ययन करती है, अवकलन गणित कहलाती है। ध्यान रहे एक फलन के अवकलज का अस्तित्व केवल तभी होता है जब वह फलन अवकलनीय हो। और यह तभी संभव होगा यदि फलन अपने प्रांत पर संतत हो।

एक फलन $f(x)$ का, चर x के सापेक्ष अवकल गुणांक, x में परिवर्तन के फलस्वरूप $f(x)$ में हुए परिवर्तन की तात्कालिक दर के बराबर होता है।

आईए हम फलन $y = f(x)$ ...(1) लें।

मान लीजिए x में एक सूक्ष्म परिवर्तन Δx, है, जिसके फलस्वरूप y में Δy परिवर्तन होता है, अर्थात्,

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (2) में से समीकरण (1) को घटाने पर हम प्राप्त करते है।

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

दोनों पक्षों को Δx से भाग करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

अनुपात $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, जो कि अंतर अनुपात कहलाता है, $\frac{dy}{dx}$ की ओर जाता है, जब $\Delta x \to 0$ की ओर जाए। $\frac{dy}{dx}$ को y का x के सापेक्ष अवकलज या अवकलन गुणांक कहते हैं।

प्रतीकात्मक रूप में, $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

इसको इस प्रकार पढ़ते हैं, $\frac{dy}{dx}$, जो कि $y = f(x)$ का अवकल गुणांक कहलाता है, अंतर अनुपात $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ या $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ का सीमांत मान है।

प्रथम सिद्धांत द्वारा अवकलज

अवकलन के प्रथम सिद्धांत को स्पष्ट करने के लिए, आईए हम एक सरल सा फलन लें

$$y = x^2 \qquad \ldots(1)$$

मान लीजिए x में Δx वृद्धि होती है और इसके फलस्वरूप y में Δy परिवर्तन होता है।

अतः, फलन $y = f(x)$ से प्राप्त होत है।

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (4) में से (3) घटाने पर हम पाते हैं कि

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2$$

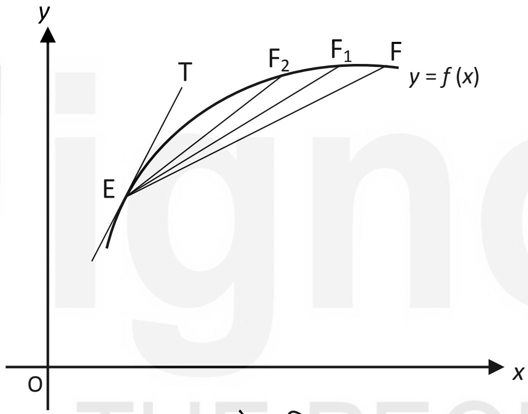
या $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\left(x+\Delta x\right)^2-x^2}{\Delta x}$$ (दोनों पक्षों को Δx से विभाजित करने पर)

$$=\frac{\cancel{x^2}+\Delta x^2+2x\cdot\Delta x-\cancel{x^2}}{\Delta x}=\frac{\Delta x^2}{\Delta x}+\frac{2x\cdot\Delta x}{\Delta x}$$

या $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x+2x$$

9.3 स्पर्श रेखा अवकलज के रूप में [TANGENT LINE AS DERIVATIVE]

यद्यपि अवकलज मूलतः कलन की एक संकल्पना है, इसका एक रोचक ज्यामितीय निर्वचन है। आईए रेखाचित्र 9.1 पर विचार करें और अवकलज के इस ज्यामितीय प्रतिरूप को समझें।



रेखाचित्र 9.1

मान लीजिए, E और F, एक फलन $y=f(x)$ द्वारा वर्णित वक्र पर दो बिंदु हैं। मान लीजिए E के निर्देशांक (x_1, y_1) तथा F के निर्देशांक $(x_1+\Delta x, y_1+\Delta y)$ हैं। हम यह भी मान लेते हैं कि E एक स्थिर बिंदु है तथा F एक गतिमान बिंदु जो कि वक्र के साथ-साथ बिंदु E की ओर अग्रसर है। यदि हम बिंदुओं E और F को एक सरल रेखा द्वारा मिला दे तो रेखा $E\,F$ एक जीवा कहलाती है। जैसे-जैसे बिंदु F, बिंदु E की ओर जाता है, जीवा $E\,F$ की स्थिति निरंतर बदलती है। उदाहरण के लिए, F_1 पर, इसकी स्थिति EF_1 हो जाती है और F_2 पर EF_2 हो जाती है। हम इस रेखाचित्र में देख सकते हैं कि जैसे-जैसे बिंदु F, बिंदु E की ओर जाता है, जीवा E के सापेक्ष पर वामावर्त घूमती है। इस घूमने की प्रक्रिया में, यह जीवा निरंतर छोटी होती जाती है तथा जीवा और वक्र की चाप के मध्य का क्षेत्रफल निरंतर कम होता जाता है। वास्तव में, जब बिंदु F, बिंदु E तक पहुँचता है, जीवा EF, वक्र के बिंदु E पर एक स्पर्श रेखा (मान लीजिए ET) बन जाती है। अतः, स्पर्श रेखा ET की व्याख्या जीवा EF की सीमांत स्थिति के रूप मे की जा सकती है जबकि E बिंदु F की ओर जाता हो। परंतु, यह सीमांत स्थिति का अस्तित्व केवल तभी होगा जब वह वक्र बिंदु E पर संतत हो।

आईए अब हम इसकी जाँच करें कि जैसे-जैसे बिंदु F, बिंदु E की ओर जाता है तो जीवा EF की ढाल (या प्रवणता) किस प्रकार प्रभावित होती है। हम जानते हैं कि दो बिंदुओं के बीच किसी रेखा की ढाल, y के मान में परिवर्तन और x के मान में परिवर्तन के अनुपात से प्राप्त होती है। अतः, यदि गतिमान बिंदु की मूल स्थिति F है, तो जीवा EF की ढाल E और F के दिए हुए निर्देशांकों से प्राप्त की जा सकती है। इसका मान

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ प्राप्त होता है। रेखाचित्र से यह स्पष्ट है कि जैसे-जैसे बिंदु F बिंदु E की ओर बढ़ता है तो Δx और Δy के मानों में परिवर्तन होता है जिसके फलस्वरूप जीवा EF की विभिन्न स्थितियों मे लिए इसकी ढाल $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ भी परिवर्तित होती रहती है। अंततः, जब बिंदु F, बिंदु E तक पहुँचता है और $\Delta x \to 0$ की ओर जाता है, यह ढाल एक सीमा की ओर पहुँचती है जो कि $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ द्वारा प्राप्त होती है और जैसा कि हमने पहले भी चर्चा की है, यह सीमा $\frac{dy}{dx}$ कहलाती है। ध्यान दे कि जब F, E की ओर जाता है तो Δx का मान निरंतर कम होता जाता है अर्थात् Δx , 0 की ओर जाता है जिसे हम $\Delta x \to 0$ से व्यक्त करते हैं।

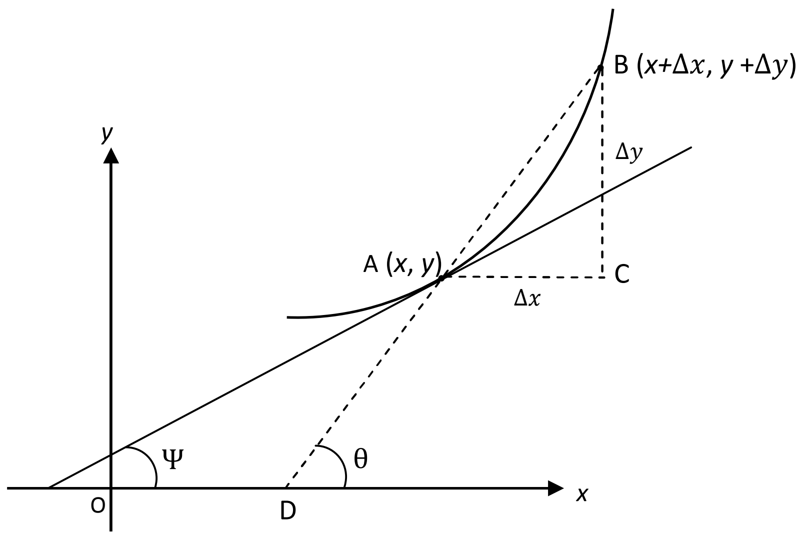
ऊपर की गई चर्चा को हम संक्षेप में इस प्रकार रख सकते हैं। जैसे-जैसे बिंदु F, बिंदु E की ओर जाता है, दो राशियाँ/मात्राएं (quantities) एक साथ अपनी-अपनी सीमाओं की ओर जाती हैं : जीवा EF एक सीमांत स्थिति की ओर जाती है जो कि वक्र के बिंदु E पर एक स्पर्श रेखा है और जीवा EF की ढाल $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ भी अपनी सीमा की ओर जाती है जो कि $\frac{dy}{dx}$ के बराबर है। इसलिए, हम कह सकते हैं कि सीमा पर स्पर्श रेखा की ढाल $\frac{dy}{dx}$ है। हमें यह पहले से ही ज्ञात है कि $\frac{dy}{dx}$, x के किसी फलन y का अवकलज है। अतः, फलन $y = f(x)$ का $x = x_1$ पर अवकलज का निर्वचन दिए हुए फलन $y = f(x)$ के वक्र के $x = x_1$ के संगत बिंदु पर स्पर्श रेखा की ढाल के रूप में किया जा सकता है। परंतु, अवकलज तथा स्पर्श रेखा दोनों के अस्तित्व के लिए यह आवश्यक है कि फलन और वक्र दोनों ही x के दिए हुए मान पर संतत हो।

रेखाचित्र 9.2 में एक फलन $y = f(x)$ का वक्र दर्शाया गया है। इस वक्र पर, एक दूसरे के समीप, $A(x, y)$ और $B[(x+\Delta x),(y+\Delta y)]$ दो बिंदु लिए गए हैं। AB को मिलाकर आगे बढ़ाया गया है जिससे यह रेखा, x–अक्ष को बिंदु D पर काटती है तथा x-अक्ष के साथ कोण θ बनाती है।

A और B को मिलाती हुई इस रेखा AB की ढाल

$$\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ अर्थात् लंब/आधार है।}$$

अब, मान लीजिए Δx , 0 की ओर जाता है अर्थात् $(\Delta x \to 0)$ है। इससे बिंदु B बिंदु A की ओर जाएगा (अर्थात् B $\to$ A होगा) और धीरे–धीरे रेखा AB , वक्र के बिंदु $A(x, y)$ पर एक स्पर्श रेखा बन जाएगी जो कि विस्तार करने पर x–अक्ष के साथ एक नया कोण, ψ , बनाएगी। इस स्पर्श रेखा की ढाल $\tan\psi$ है जो कि $\tan\theta$ का सीमांत मान है जब $\Delta x (= AC) \to 0$ हो।



रेखाचित्र 9.2

सांकेतिक रूप में इसे इस प्रकार लिखा जा सकता है,

$$\tan \Psi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

इसे इस प्रकार पढ़ा जाता है।

किसी फलन $y = f(x)$ का अवकल गुणांक या अवकलज, अंतर अनुपात $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ का सीमांत मान होता है जबकि Δx शून्य की ओर जाता है।

फलन $y = f(x)$ के किसी भी बिंदु A पर, $\frac{dy}{dx}$ उस बिंदु पर स्पर्श रेखा की ढाल ($\tan\psi$) के बराबर होता है। और यदि किसी बिंदु $x = a$ पर अंतर अनुपात $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ की सीमा का अस्तित्व हो तो हम कह सकते हैं कि

- $f(x)$ फलन $x = a$ पर फलन $y = f(x)$ की सीमा है।
- फलन $y = f(x)$, $x = a$ पर संतत है।
- फलन $y = f(x)$, $x = a$ पर अवकलनीय है

हम इस इकाई में संततता के बारे में और विस्तार से पढ़ेंगे।

संततता और अवकलनीयता

हमने ऊपर देखा कि किसी फलन के स्वतंत्र चर के किसी मान पर अवकलज के अस्तित्व के लिए स्वतंत्र चर के उस मान पर फलन का संतत होना आवश्यक है। ज्यामितीय रूप में, इसका अर्थ है कि दिए हुए फलन के वक्र पर संगत बिंदु पर स्पर्श रेखा के अस्तित्व के लिए वक्र उस बिंदु पर संतत होना चाहिए। संततता अवकलनीयता के लिए एक अनिवार्य शर्त है परंतु पर्याप्त नहीं। एक ऐसा फलन जो संतत भी हो और अवकलनीय भी, एक मसृण (smooth) फलन कहलाता है।

बोध प्रश्न 1

1) किसी फलन की जीवा और फलन की स्पर्श रेखा में क्या अंतर है?

....

....

....

....

....

2) किसी फलन $y = f(x)$ के लिए अवकलज की संकल्पना किस प्रकार फलन के वक्र की स्पर्श रेखा के रूप में समझी जा सकती है, व्याख्या कीजिए।

....

....

....

....

....

9.4 अवकलन के नियम [RULES OF DIFFERENTIATION]

अवकलज की संकल्पना को समझने के पश्चात् अब हम अवकलज ज्ञात करना सीखेंगे। कुछ नियमों का पालन करके अवकलज ज्ञात करने की प्रक्रिया को काफी हद तक सरल बनाया जा सकता है। आईए, अब हम इन नियमों का उल्लेख करें। इस नियमों की उपपत्ति हमारे पाठ्यक्रम के विषय क्षेत्र से बाहर है।

बीजगणितीय फलन

सर्वप्रथम, हम अपना ध्यान बीजगणितीय फलनों पर केन्द्रित करते हैं। मान लीजिए हमें चर x के दो फलन $f(x)$ और $g(x)$ दिए हैं। हम मान कर चलते हैं कि दोनों फलन अवकलनीय हैं।

नियम 1 : एक अचर का अवकलज

एक अचर का अवकलज शून्य होता है। माना $f(x) = C$ है, जहाँ C एक अचर है। इस स्थिति में

$$\frac{d}{dx}(C) = 0 \text{ होता है।}$$

नियम 2 : घातांक फलन का अवकलज

मान लीजिए $f(x) = x$ है, जहाँ n कोई भी वास्तविक संख्या है। तब, $\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}$ होगा।

नियम 3 : एक योग या अंतर का अवकलज

दो फलनों के योग (अंतर) का अवकलज, दोनों फलनों के अवकलजों के योग (अंतर) के बराबर होता है।

अर्थात्

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x) = f'(x) \pm g(x)$$

नियम 4 : एक गुणनफल का अवकलज – गुणनफल नियम

दो फलनों के गुणनफल का अवकलज, पहले फलन और दूसरे फलन के अवकलज के गुणनफलन तथा दूसरे फलन और पहले फलन के अवकलज के गुणनफल के योग के बराबर होता है।

यदि $y = u.v$ है जहाँ $u = f(x)$ तथा $v = g(x)$ है, तो

$$\frac{dy}{dx} = u.\frac{dv}{dx} + v.\frac{du}{dx} = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

टिप्पणी : यदि फलन में दो से अधिक फलनों का गुणनफल है, तो हम किन्हीं भी दो फलनों के गुणनफलों को पहला फलन तथा शेष बचे फलन (फलनों के गुणनफल) को दूसरा फलन मान लेते हैं और उन पर गुणनफल नियम लगाते है।

$$\frac{dy}{dx} = \left[f(x)\cdot g(x)\right]\cdot L'(x) + L(x)\cdot\frac{d}{dx}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$$

जहाँ $\frac{d}{dx}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = f(x)\cdot g'(x) + g(x)\cdot f'(x)$ है।

नियम 5 : भागफल नियम

दो फलनों के भागफल का अवकलज, अंश के अवकलज ओर हर के गुणनफल मे से हर के अवकलज और अंश के गुणनफल को घटाने पर प्राप्त हुए परिणाम को हर के वर्ग से विभाजित करने पर प्राप्त होता है।

माना $y = \frac{u}{v}$, है जहाँ $u = f(x)$ तथा $v = g(x)$ है, तो

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\cdot\frac{du}{dx} - u\cdot\frac{dv}{dx}}{v^2} = \frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

नियम 6 : फलन के फलन का अवकलज – श्रृंखला नियम

अभी तक हमने एक फलन का अवकलज ऐसे स्वतंत्र चर के सापेक्ष ज्ञात करना सीखा है जो फलन को प्रत्यक्ष रूप से प्रभावित करता है। अब हम एक फलन का अवकलन ऐसे स्वतंत्र चर के सापेक्ष ज्ञात करने पर विचार करेंगे जो फलन को प्रत्यक्ष रूप से नहीं अपितु अप्रत्यक्ष रूप से प्रभावित करता है। मान लीजिए y, u का फलन है और u, x का फलन है, तो x, y को अप्रत्यक्ष रूप में u के माध्यम से प्रभावित करता है। इस स्थिति में y का x के सापेक्ष अवकलज, y के u के सापेक्ष अवकलज और u के x के सापेक्ष अवकलज के गुणनफल के बराबर होता है। अर्थात्

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

नियम 7 : एक प्रतिलोम फलन का अवकलज

मान लीजिए $y = f(x)$ है। यदि हम इस फलन की सहायता से x को y के फलन के रूप में व्यक्त करें, तो यह फलन y का प्रतिलोम फलन कहलाता है। सांकेतिक रूप में हम इसे $x = f^{-1}(y)$ के रूप में लिखते हैं। एक फलन के प्रतिलोम फलन का अवकलज, मूल फलन के अवकलज के व्युत्क्रम के बराबर होता है बशर्ते दोनों फलनों का अस्तित्व हो। अर्थात्,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

नियम 8 : लघुगणकीय फलनों के अवकलज

आधार e वाले लघुगणकीय फलन के अवकलज का सूत्र ज्ञात करना अधिक सुविधाजनक है। इसलिए पहले हम इसी को लेते हैं। इस लघुगणक को हम संकेत $\log_e x$ से व्यक्त करते हैं (हमें यहाँ ध्यान देना चाहिए आधार e के लघुगणक फलन के लिए एक अन्य संकेत $\ln x$ का भी प्रयोग किया जाता है, जहाँ ln प्राकृतिक लघुगणक के लिए प्रयुक्त होता है)।

माना $y = \log_e x$ है। तो, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}.\frac{d}{dx}(x) = \frac{1}{x}$ होता है।

ऊपर दिए परिणामों के आधार पर हम प्राप्त करते हैं।

$$\frac{d}{dx}(\log_e x^n) = \frac{1}{x^n}\cdot\frac{d}{dx}(x^n)$$

$$= \frac{1}{x^n}\cdot nx^{n-1} = \frac{n}{x}$$

आईए, अब हम e के अतिरिक्त अन्य आधार वाले लघुगणक फलनों का अवकलज ज्ञात करें।

माना $y = \log_a x$ है जहाँ $a > 0$ है। $\log_a x$ का अर्थ आधार a पर, x का लघुगणक है।

इस स्थिति में

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\log_e a} \text{ है।}$$

नियम 9 : चरघातांकीय फलनों के अवकलज

प्रारंभ करने के लिए, आईए हम आधार e वाले चरघातांकीय फलन पर विचार करें। माना $y = e^x$ है।

इस स्थिति में,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x) = e^x \text{ है।}$$

ऊपर प्राप्त परिणामों के आधार पर हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = e^{ax}\cdot\frac{d}{dx}(ax) = e^{ax}\cdot a = ae^{ax}$$

अब हम ऐसे चरघातांकीय फलनों के अवकलज पर विचार करेंगे जिनका आधार e न होकर कोई अन्य धनात्मक संख्या है। माना $y = a^x$ है जहाँ $a > 0$ हैं तो,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log_e a$$ होगा।

आईए अब हम इन नियमों पर आधारित कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : यदि $y = x^5$, है, तो $\frac{dy}{dx} = 5x^{5-1} = 5x^4$ होगा। (नियम 1)

उदाहरण 2 : यदि $y = 10x$ है, तो $\frac{dy}{dx} = 10\frac{d}{dx}(x) = 10 \times 1 = 10$ होगा। (नियम 2)

उदाहरण 3 : यदि $y = 100x^3$ है, तो

$\frac{dy}{dx} = 100\frac{d}{dx}(x^3) = 100 \times 3x^{3-1} = 300x^2$ होगा। (नियम 3)

उदाहरण 4 : यदि $y = 100$ है, तो $\frac{dy}{dx} = 0$ होगा। (नियम 4)

उदाहरण 5 : यदि $y = ax^5 + bx^4 - cx^2$ है, तो

$$\frac{dy}{dx} = a.\frac{d}{dx}(x^5) + b.\frac{d}{dx}(x^4) - c.\frac{d}{dx}(x^2)$$ (नियम 3)

$$= a.5x^{5-1} + b.4.x^{4-1} - c.2.x^{2-1}$$

$$= 5ax^4 + 4bx^3 - 2cx$$ होगा।

उदाहरण 6 : यदि $y = 3x^6 + 2x^5 - 7x^3 + 3x^2 + 10$ है, तो

$$\frac{dy}{dx} = 3\cdot\frac{d}{dx}(x^6) + 2\cdot\frac{d}{dx}(x^5) - 7\cdot\frac{d}{dx}(x^3) + 3\cdot\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(10)$$ (नियम 3)

$$= 3\times 6\times x^{6-1} + 2\times 5\times x^{5-1} - 7\times 3\times x^{3-1} + 3\times 2\times x^{2-1} + 0$$

$$= 18x^5 + 10x^4 - 21x^2 + 6x$$ होगा।

उदाहरण 7 : यदि $y = x^2 \log x$ है, तो

$$\frac{dy}{dx} = x^2.\frac{d}{dx}(\log x) + \log x.\frac{d}{dx}(x^2) = x^2.\frac{1}{x} + \log x \times 2x$$ (नियम 4)

$$= x + 2x\log x$$

$$= x(1 + 2\log x)$$ होगा।

उदाहरण 8 : यदि $y = x^3 e^{2x}$ है, तो गुणनफलन नियम से हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{dy}{dx} = x^3 \cdot \frac{d}{dx}(e^{2x}) + e^{2x}\cdot\frac{d}{dx}(x^3)$$ (नियम 4)

$$= x^3\cdot 2\cdot e^{2x} + e^{2x}\cdot 3\cdot x^{3-1} = 2x^3e^{2x} + 3x^2e^{2x}$$

$$= x^2e^{2x}(2x+3)$$

उदाहरण 9 : यदि $y = e^x \cdot \log x$ है, तो गुणनफलन नियम से हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{dy}{dx} = e^x\cdot\frac{d}{dx}(\log x) + \log x\cdot\frac{d}{dx}(e^x)$$ (नियम 4)

$$= e^x \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot e^x = e^x\left(\frac{1}{x} + \log x\right)$$

उदाहरण 10 : यदि $y = \frac{\log x}{x^2}$ है, तो भागफल नियम से हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 \cdot \frac{d}{dx}(\log x) - \log x \cdot \frac{d}{dx}(x^2)}{(x^2)^2} \qquad \text{(नियम 5)}$$

$$= \frac{x^2 \cdot \frac{1}{x} - \log x \cdot 2 \cdot x}{x^4} = \frac{x - 2\log x(x)}{x^4}$$

$$= \frac{x[1-2\log x]}{x^4} = \frac{1-2\log x}{x^3}$$

उदाहरण 11 : यदि $y = \frac{20}{3x^4}$ है, तो भागफल नियम से हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^4 \times \frac{d}{dx}(20) - 20 \times \frac{d}{dx}(3x^4)}{(3x^4)^2} = \frac{0 - 20 \times 12x^3}{9x^8} \qquad \text{(नियम 5)}$$

$$= \frac{-240x^3}{9x^8} = \frac{-80}{3x^5}$$

उदाहरण 12 : $y = \sqrt{1-x^2}$ का x के सापेक्ष, श्रृंखला नियम का प्रयोग करते हुए, अवकलज ज्ञात कीजिए। हमें $y = (1-x^2)^{1/2}$ दिया है।

$1 - x^2 = u$ रखें जिससे $y = u^{\frac{1}{2}}$ हो जाए।

और $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2u^{\frac{1}{2}}}$ प्राप्त होता है।

क्योंकि $u = 1 - x^2$ है, अतः, $\frac{du}{dx} = -2x$ है।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{1}{2u^{\frac{1}{2}}} \times -2x = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

उदाहरण 13 : श्रृंखला नियम के प्रयोग द्वारा $(3x^3 - 5x^2 + x - 1)^5$ का $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें।

माना $u = 3x^3 - 5x^2 + x - 1$ है। इससे हम पाते हैं कि $y = u^5$ है तथा $\frac{du}{dx} = 9x^2 - 10x + 1$ है।

साथ ही,

$$\frac{dy}{du} = 5u^4 = 5(3x^3 - 5x^2 + x - 1)^4$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} = (9x^2 - 10x + 1) \times 5(3x^3 - 5x^2 + x - 1)^4$$

$$= 5(3x^3 - 5x^2 + x - 1)(9x^2 - 10x + 1)$$

उदाहरण 14 : यदि $y=a^{x\ln x}$ है, तो सूत्र $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ का प्रयोग करते हुए $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें।

$u=x\ln x$ रखें। अतः $\frac{du}{dx}=x.\frac{1}{x}+\ \ln x=1+\ln x$ होगा।

साथ ही, $y=a^u$ है और $\frac{dy}{du}=a^u\ln a$ है। अतः, हम पाते हैं कि

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\ =(a^{x\ln x}\ln a)(1+\ln x)$ होगा।

अस्पष्ट अथवा निहित फलनों के अवकलज

एक अस्पष्ट अथवा निहित फलन एक ऐसा फलन है जो दो चरों x और y में परस्पर निर्भरता को व्यक्त करता है। x के प्रत्येक मान के लिए y का एक पूर्वनिर्धारित अथवा निश्चित मान होता है तथा इसका विलोम कथन भी सत्य होता है। एक चर कामान दूसरे चर के मान से ज्ञात किया जा सकता है। ऐसे फलन का एक उदाहरण है :

$$f(x,y):2x^2+3xy+10y^2+5=0$$

आईए अब हम इसका x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात करें।

$$4x+3x\cdot\frac{dy}{dx}+y\times3+20y\cdot\frac{dy}{dx}+0=0$$

$\Rightarrow\quad 4x+3x\frac{dy}{dx}+20y\cdot\frac{dy}{dx}+3y=0\qquad$ ($\frac{dy}{dx}$ वाले पदों को एक साथ लिखने पर)

$$\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}(3x+20y)+(4x+3y)=0$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}(3x+20y)=-(4x+3y)$$

या $\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{(4x+3y)}{(3x+20y)}$

आईए हम एक और फलन $xy+(x+y+6)^4=0$ का x के सापेक्ष अवकलन ज्ञात करें। ध्यान रहे यहाँ हम y को x का फलन मान रहे हैं। अब, x के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें प्राप्त होता है।

$$x.\frac{dy}{dx}+y.1+4(x+y+6)^3\times\frac{d}{dx}(x+y+6)=0$$

$$x\frac{dy}{dx}+y+4(x+y+6)^3\times\left(1+\frac{dy}{dx}+0\right)=0$$

$$\frac{dy}{dx}[x+4(x+y+6)^3]=-[y+4(x+y+6)^3]$$

$$\frac{dy}{dx}=-\left[\frac{y+4(x+y+6)^3}{x+4(x+y+6)^3}\right]$$

दो चरों x और y के बीच $x = f(t)$ और $y = f(t)$ के रूप में व्यक्त संबंध को प्राचलिक रूप में व्यक्त संबंध कहते हैं। यहाँ चरों x और y के बीच स्पष्ट संबंध नहीं होता अपितु वे एक अन्य चर, जैसे कि यहाँ t, के माध्यम से संबंधित होते हैं। तीसरे चर t को प्राचल (parametric) कहते हैं। ऐसी स्थिति में $\frac{dy}{dx}$ इस प्रकार व्यक्त किया जाता है

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

उदाहरण : यदि $x = 8t^2 + t + 7$ तथा $y = t^2 + 10t + 2$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $x = 8t^2 + t + 7$ तथा $y = t^2 + 10t + 2$ है अतः

$$\frac{dx}{dt} = 16t + 1, \qquad \frac{dy}{dt} = 2t + 10$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t+10}{16t+1}$$

बोध प्रश्न 2

1) $y = 3x^{m+1} + 6x^m$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

2) $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

....

....

3) यदि $y=\sqrt{(1+x^2)}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $y\dfrac{dy}{dx}-x=0$ है।

....

....

....

....

....

4) $y=4x^2+2$ से $\dfrac{dx}{dy}$ ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

5) $y=\log\sqrt{2+x^2}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

6) $y=e^{2x}\log(2x+1)$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

7) $y=2m^2+6m+1$ का अवकलज m^2+5 के सापेक्ष ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

9.5 अर्थशास्त्र में प्रथम कोटि अवकलजों के उपयोग [USE OF FIRST ORDER DERIVATIVES IN ECONOMICS]

अर्थशास्त्र में एक कुल मात्रा फलन के परिवर्तन की दर $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ उसके सीमांत फलन को निरूपित करती है। अर्थात्

सीमांत फलन $= \frac{d}{dx}$ (कुल फलन)

उदाहरण के लिए,

1) सीमांत उपयोगिता (MU) $= \frac{d}{dx}$ [कुल उपयोगिता (TU)]
2) सीमांत लागत (MC) $= \frac{d}{dx}$ [कुल लागत (TC)]
3) सीमांत आगम (MR)$= \frac{d}{dx}$ [कुल आगम (TR)]
4) सीमांत उत्पाद (MP)$= \frac{d}{dx}$ [कुल उत्पाद (TP)]

अवकलज एवं सीमांत विश्लेषण

अर्थशास्त्र तथा अन्य संबंधित विषयों में, हमारी रूचि अक्सर दो राशियों x और y के बीच फलनिक संबंध में होती है। उदाहरण के लिए, हमारी दिलचस्पी लागत और उत्पादन के बीच संबंध जानने में हो सकती है। सामान्यतः इस प्रकार के संबंधों के अध्ययन में दो प्रकार की संकल्पनाओं का उपयोग किया जाता है : औसत की संकल्पना तथा सीमांत की संकल्पना। औसत की संकल्पना कुल राशियों x और y पर केन्द्रित होती है। अतः, यदि हमें उत्पादन की कुल लागत तथा कुल उत्पाद दिया हो, तो हम उत्पादन की औसत लागत का निर्धारण कर सकते हैं जो एक प्रकार से हमें कुल उत्पाद के लिए प्रति इकाई लागत का अनुमान देती है। दूसरी ओर सीमांत की संकल्पना का संबंध सीमा पर y और x के मानों में परिवर्तन से है। अतः, हम अक्सर सीमांत लागत को उत्पाद की एक अतिरिक्त इकाई की वृद्धि के सापेक्ष, कुल लागत में होने वाले परिवर्तन के रूप में परिभाषित करते है। यदि कुल लागत में परिवर्तन को ΔC से व्यक्त किया जाएं तथा उत्पाद में परिवर्तन के Δq से व्यक्त किया जाएं, तो सीमांत लागत $\frac{\Delta C}{\Delta q}$ से मापी जाएगी। यद्यपि, सीमांत लागत का ठीक–ठीक माप उत्पादन में वृद्धि को (जितना कम हो सके) कम करके प्राप्त किया जा सकता है। ऐसी स्थिति में, सीमांत लागत का मान $\frac{\Delta C}{\Delta q}$ की सीमा के बराबर होगा जबकि $\Delta q \to 0$ हो। यदि हम अनुच्छेद 9.2 में की गई चर्चा को स्परण करें तो पाएंगे कि सीमांत लागत वास्तव में परिवर्तन की तात्कालिक दर है और एक अवकलज के रूप में व्यक्त की जा सकती है। यदि कुल लागत फलन $C = f(q)$ भृषण है, तो सीमांत माँग उत्पाद के सापेक्ष कुल लागत के अवकलज के रूप में परिभाषित की जाती है तथा इसे $\frac{dC}{dq}$ से व्यक्त किया जाता है। अर्थशास्त्र तथा व्यवसायिक अध्ययन में बहुधा प्रयोग होने वाली कुछ और सीमांत संकल्पनाएं नीचे दी गई हैं :

सीमांत उपयोगिता : यदि कुल उपयोगिता (U) उपयोग की गई वस्तु का मात्रा (q) का एक फलन है, तो सीमांत उपयोगिता $\frac{dU}{dq}$ द्वारा प्राप्त होगी।

सीमांत उत्पाद : यदि उत्पादन फलन कुल उत्पाद (Q) उत्पादन के किसी कारक (x) के फलन के रूप में निरूपित है, तो उत्पादन के उस कारक के लिए सीमांत उत्पाद $\frac{dQ}{dx}$ से प्राप्त होता है।

सीमांत आगम : यदि कुल आगम (R), बिक्री की गई उत्पाद की मात्रा (q) का फलन है, तो सीमांत आगम $\frac{dR}{dq}$ द्वारा प्राप्त होगा।

उदाहरण : यदि माँग का नियम $p = \frac{10}{q} - 5$ है, जहाँ p कीमत और q माँग की मात्रा है, तो सिद्ध कीजिए कि जैसे–जैसे उत्पादन q बढ़ता है कुल संप्राप्ति कम होती है यदि सीमांत आगम एक ऋणात्मक अचर हो।

हल : मान लीजिए कि कुल आगम R है। तो

$$R = pq = \left(\frac{10}{q} - 5\right)q = \left(\frac{10-5q}{q}\right)q = 10 - 5q \text{ होगा।}$$

हम यह स्पष्टतः देख सकते हैं कि जैसे–जैसे q बढ़ता है, 10 − 5q कम होता जाता है। अतः, जैसे–जैसे उत्पादन q बढ़ता है, कुल आगम R कम होता जाता है।

साथ ही, सीमांत आगम

$\text{MR} = \frac{dR}{dq} = \frac{d}{dq}(10 - 5q) = -5$ है। अतः, सीमांत आगम (MR) एक ऋणात्मक अचर है।

उदाहरण : एक वस्तु के उत्पादन की लागत फलन $C = 100 + 3q + \frac{1}{25}q^2$ द्वारा निरूपित है, जहाँ C कुल लागत तथा q उत्पाद की मात्रा है। उत्पादन का वह स्तर ज्ञात कीजिए जिस पर औसर लागत और सीमांत लागत बराबर हो जाएं।

हल : सीमांत लागत, $MC = \frac{dC}{dq} = \frac{d}{dq}\left(100 + 3q + \frac{1}{25}q^2\right) = 3 + \frac{2}{25}q$ है।

औसत लागत, $AC = \frac{C}{q} = \frac{100}{q} + 3 + \frac{q}{25}$ है। q का वह मान प्राप्त करने के लिए जिसके लिए $AC = MC$ होगा, हम लिखते हैं :

$$\frac{100}{q} + 3 + \frac{q}{25} = 3 + \frac{2q}{25}$$

या $\frac{100}{q} = \frac{q}{25}$

या $q^2 = 2500$

या $q = 50$ (q के ऋणात्मक मानों पर हम विचार नहीं करते)

फलन की लोच

मान लीजिए हमें एक फलन $y = f(x)$ दिया है और हम, x में एक ज्ञात परिवर्तन के सापेक्ष y की संवेदनशीलता के माप में रूचि रखते हैं। x के सापेक्ष y की लोच जिसे हम सामान्यतः η (ग्रीक अक्षर ईटा) से निरूपित करते हैं सरलता से ज्ञात की जा सकती है। किसी फलन की लोच निर्भर चर में अनुपातिक परिवर्तन के स्वतंत्र चर में अनुपातिक परिवर्तन के अनुपात के रूप में परिभाषित की जाती है।

ध्यान रहे कि कभी-कभी वाक्याँश 'अनुपातिक परिवर्तन' के स्थान पर 'प्रतिशत परिवर्तन' का भी प्रयोग किया जाता है। मान लीजिए कि स्वतंत्र चर के मूल मान x में Δx के बराबर परिवर्तन होता है और इसके परिणाम स्वरूप, निर्भर चर के मूल मान में Δy के बराबर परिवर्तन हो जाता है। इस प्रकार स्वतंत्र अचर में अनुपातिक परिवर्तन $\frac{\Delta x}{x}$ तथा निर्भर चर में अनुपातिक परिवर्तन $\frac{\Delta y}{y}$ है। अतः फलन की लोच

$$\eta_{yx} = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y} \times \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

होगी। लोच का यह माप बिंदु लोच कहलाती है क्योंकि यह फलन के वक्र पर एक दिए हुए बिंदु पर लोच का माप प्रदान करती है। यह स्पष्ट है कि लोच का ठीक-ठीक माप, हम x में होने वाले परिवर्तन को जितना संभव हो उतना छोटा करके प्राप्त कर सकते हैं। इस स्थिति में बिंदु लोच का मान हो जाता है।

$$\eta_{yx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{x}{y} \times \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \times \frac{dy}{dx}$$

अतः, एक फलन $y = f(x)$ की बिंदु लोच को x और y के प्रारंभिक मानों के अनुपात और y के x के सापेक्ष अवकलज के गुणनफल के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। सांकेतिक रूप में इस निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$\eta_{yx} = \frac{x}{y} \times \frac{dy}{dx}$$

हम अर्थशास्त्र और व्यवसायिक अध्ययन में लोच की संकल्पना का प्रयोग अक्सर करते हैं। आईए हम अर्थशास्त्र में पाएं जाने वाले कुछ फलनों की लोच ज्ञात करें।

1) **माँग की कीमत लोच**

माँग की कीमत लोच, कीमत में परिवर्तन के सापेक्ष माँग की मात्रा की संवेदनशीलता का माप है। सामान्यतः माँग की लोच का अर्थ माँग की कीमत लोच ही होता है। इसे माँग की मात्रा में अनुपातिक परिवर्तन और कीमत में

अनुपातिक परिवर्तन के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है। मान लीजिए, $q = f(p)$ एक दिया हुआ माँग फलन है, जहाँ q माँग की मात्रा तथा p, कीमत को निरूपित करता है। इस स्थिति में माँग की कीमत लोच $\eta_{qp} = -\frac{p}{q} \times \frac{dq}{dp}$ से व्यक्त की जाती है। चूँकि माँग की मात्रा और कीमत में प्रतिलोम संबंध होता है, $\frac{dq}{dp}$ ऋणात्मक होगा। इसलिए लोच के माप को धनात्मक बनाने के लिए, हम इसके सूत्र में ऋण चिह्न लगाते हैं।

औसत आगम, सीमांत आगम और माँग की कीमत लोच में संबंध

आईए हम एक माँग फलन $q = f(p)$ पर विचार करें। मान लीजिए R ($= pq$) कुल आगम, AR औसत आगम, MR सीमांत आगम तथा η_{qp} माँग की कीमत लोच है तो हम पाते हैं कि

$$MR = \frac{dR}{dq} = \frac{d}{dq}(pq) = p + q\frac{dp}{dq}$$

इस समीकरण के दाएं पक्ष को p से गुणा तथा विभाजित करने पर हम पाते हैं कि

$$MR = p\left(\frac{p}{p} + \frac{q}{p}\frac{dp}{dq}\right) = p\left(1 + \frac{q}{p}\frac{dp}{dq}\right) = p\left(1 + \frac{1}{\frac{p}{q}\frac{dq}{dp}}\right)$$

अब हम जानते हैं कि $\eta_{qp} = -\frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$ तथा $AR = \frac{R}{q} = \frac{pq}{q} = p$ है। इन व्यंजकों को ऊपर दिए MR के सूत्र में प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं कि

$$MR = AR\left(1 - \frac{1}{\eta_{qp}}\right)$$

$$or\ \frac{MR}{AR} = 1 - \frac{1}{\eta_{qp}}$$

$$or\ \frac{1}{\eta_{qp}} = 1 - \frac{MR}{AR} = \frac{AR - MR}{AR}$$

$$\therefore \eta_{qp} = \frac{AR}{AR - MR}$$

2) **आपूर्ति की कीमत लोच**

आपूर्ति की कीमत लोच, कीमत में परिवर्तन के सापेक्ष आपूर्ति की गई मात्रा में परिवर्तन की संवेदनशीलता का माप है। इसे केवल आपूर्ति की लोच भी कहा जाता है। इसे एक वस्तु की आपूर्ति की मात्रा में अनुपातिक परिवर्तन और कीमत में अनुपातिक परिवर्तन के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है। मान लीजिए, $q = f(p)$ एक दिया हुआ आपूर्ति फलन है, जहाँ q पूर्ति की मात्रा तथा p वस्तु की कीमत है। इस स्थिति में, आपूर्ति की कीमत लोच

$$\eta_{qp} = \frac{p}{q} \times \frac{dq}{dp}$$

के द्वारा व्यक्त होती है।

3) **माँग की आय लोच**

माँग की आय लोच, आय में परिवर्तन के सापेक्ष माँग की संवेदनशीलता का माप है। इसे किसी वस्तु की माँग में अनुपातिक परिवर्तन और उपभोक्ता की आय में अनुपातिक परिवर्तन और उपभोक्ता की आय में अनुपातिक परिवर्तन के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है। मान लीजिए, q, माँग की मात्रा तथा y, आय है। तो, माँग की आय लोच होगी :

$$\eta_{qy} = \frac{y}{q} \times \frac{dq}{dy}$$

यहाँ हमने माँग के अन्य निर्धारक तत्वों को नजर अंदाज कर दिया है।

4) **लागत की लोच**

लागत की लोच उत्पाद में परिवर्तन के सापेक्ष कुल लागत की संवेदनशीलता का माप है। इसे उत्पाद की कुल लागत में अनुपातिक परिवर्तन और उत्पाद के अनुपातिक परिवर्तन के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है। मान लीजिए कि कुल लागत फलन $C = f(q)$ है जहाँ C कुल लागत तथा q उत्पाद की मात्रा है। इस स्थिति में लागत की लोच का माप नीचे दिए सूत्र से व्यक्त होगा :

$$\eta_{cq} = \frac{q}{C} \times \frac{dC}{dq}$$

उदाहरण : यदि माँग का नियम $q = \frac{20}{p+1}$ और $p = 3$ है, तो माँग की कीमत लोच ज्ञात कीजिए।

हल : माँग की कीमत लोच, सूत्र $\eta_{qp} = -\frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$ द्वारा प्राप्त होती है। अब हमें, $q = \frac{20}{p+1}$ दिया है। अतः, हम पाते हैं कि

$$\frac{dq}{dp} = \frac{d}{dp}\left(\frac{20}{p+1}\right) = \frac{(p+1)\frac{d}{dp}(20) - 20\frac{d}{dp}(p+1)}{(p+1)^2} = \frac{-20}{(p+1)^2}$$

$$\therefore \eta_{qp} = -\frac{p}{q} \times \frac{-20}{(p+1)^2} = \frac{20p}{q(p+1)^2}$$

है। इस व्यंजक में $q = \frac{20}{p+1}$ रखने पर हम प्राप्त करते है :

$$\eta_{qp} = \frac{20p}{q(p+1)^2} = \frac{(p+1)20p}{20(p+1)^2} = \frac{p}{p+1}$$

जब $p = 3$ है, तो $\eta_{qp} = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4} = 0.75$ होगा।

अतः, $p = 3$ पर माँग की कीमत लोच 0.75 है।

उदाहरण : एक थोक विक्रेता 500 किग्रा. आलू की आआपूर्ति 10रू. प्रति किलो की कीमत पर करता है। यदि कीमत में 10 प्रतिशत की वृद्धि होती है, तो वह 510 किग्रा. की आआपूर्ति करता है। मान लीजिए कि उत्पादक का आपूर्ति फलन रैखिक है उत्पादक की प्रारंभिक कीमत के स्तर पर आपूर्ति की लोच ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए आपूर्ति की मात्रा q तथा वस्तु की कीमत p है। क्योंकि आपूर्ति फलन रैखिक है, इसका समीकरण $q = a + bp$ के प्रकार का होगा जहाँ a और b अचर हैं। यह समीकरण a और b के प्रत्येक मान के लिए एक सरल रेखा को व्यक्त करता है। हमें दिया है कि जब वस्तु की कीमत में 10 प्रतिशत की वृद्धि होती है, तो नई कीमत 11रू. प्रति किग्रा. हो जाती है।

जब कीमत 10रू. प्रति किग्रा. है तो आपूर्ति की मात्रा 500 किग्रा. है। इन मानों को आपूर्ति फलन $q = a + bp$ में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$500 = a + 10b$$

जब कीमत 11रू. प्रति किग्रा. है, तो आपूर्ति की मात्रा 510 किग्रा. है। इन मानों को आपूर्ति फलन में रखने पर हम पाते हैं कि

$$510 = a + 11b$$

है। इन समीकरणों को a और b के लिए हल करने पर हम पाते हैं कि $a = 400$ तथा $b = 10$ है।

अतः, आपूर्ति फलन

$$q = 400 + 10p$$

बन जाता है। हमें ज्ञात है कि आपूर्ति की लोच सूत्र $\eta_{qp} = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$ द्वारा प्राप्त होती है। उक्त पूर्ति फलन से हम पाते हैं कि

$$\frac{dq}{dp} = \frac{d}{dp}(400 + 10p) = 10$$

है। प्रारंभिक कीमत $p = 10$ पर $q = 500$ है। इन मानों को ऊपर प्राप्त आपूर्ति की लोच के व्यंजक में रखकर हम प्राप्त करते हैं :

$$\eta_{qp} = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp} = \frac{10}{500} \times 10 = \frac{1}{5} = 0.2$$

अतः, 10रू. प्रति किग्रा. प्रारंभिक कीमत पर आपूर्ति की लोच 0.2 है।

उदाहरण : एक वस्तु की माँग, x, में इसके कीमत p में परिवर्तन के सापेक्ष नियम $p = \beta - \alpha x$ (जहाँ $\alpha, \beta > 0$ हैं) द्वारा परिवर्तित होती है। माँग की लोच ज्ञात कीजिए।

हल : क्योंकि माँग (x) कीमत (p) पर निर्भर है, इसलिए $x = f(p)$ है। $p = \beta - \alpha x$ से हम प्राप्त करते हैं

$$x = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{p}{\alpha}. \quad \Rightarrow x = \frac{1}{\alpha}(\beta - p)$$

$$\therefore \qquad \frac{dx}{dp} = 0 - \frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha}$$

परिभाषा के अनुसार, माँग की लोच $\eta_{xp} = -\left(\frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x}\right)$ है।

$$\eta_{xp} = -\left(-\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{p}{\frac{1}{\alpha}(\beta - p)}\right) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha p}{\beta - p} = \frac{p}{\beta - p}$$

उदाहरण : एक वस्तु का आपूर्ति फलन $x = a\sqrt{p-b}$ है, जहाँ p वस्तु की प्रति इकाई कीमत, x माँग की मात्रा तथा a, b धनात्मक अचर हैं। आपूर्ति की लोच ज्ञात कीजिए। वस्तु की कीमत तथा आपूर्ति की लोच में हमें किस प्रकार का संबंध प्राप्त होता है?

हल : i) दिए हुए आपूर्ति फलन से हम प्राप्त करते हैं :

$$x = a\sqrt{p-b} = a(p-b)^{1/2}$$

$$\frac{dx}{dp} = a \cdot \frac{1}{2}(p-b)^{-\frac{1}{2}} \times 1 = \frac{a}{2(p-b)^{1/2}}$$

$$\eta_{xp} = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x} = \frac{a}{2(p-b)^{1/2}} \times \frac{p}{a(p-b)^{1/2}} = \frac{\cancel{a}p}{2\cancel{a}(p-b)} = \frac{p}{2(p-b)}$$

ii) p और η_{xp} में एक स्पष्ट संबंध प्राप्त करने के लिए हम $\frac{p}{2(p-b)}$ को इस प्रकार लिखते हैं

$$\frac{(p-b)+b}{2(p-b)} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{b}{p-b}\right]$$

अब, जब p (जो कि हर में उपस्थित है) बढ़ता है तो $(p-b)$ का मान भी बढ़ता है, अतः $\frac{b}{p-b}$ का मान कम होता है और पूरे व्यंजक $\frac{1}{2}\left[1 + \frac{b}{p-b}\right]$ जो कि η_{xp} को निरूपित करता है, का मान कम हो जाता है। अतः, कीमत के स्तर में वृद्धि से आपूर्ति की लोच कम होती है।

उदाहरण : सोफासेट्स की माँग (x) नियम $x = 100 + 1.5M$ से प्राप्त होती है जहाँ M उपभोक्ता की आय है। $M = 10,000$ के लिए माँग की कीमत लोच ज्ञात कीजिए।

हल : हम आय- माँग फलन $x = 100 + 1.5M$ दिया है।

$$\therefore \frac{dx}{dM} = 0 + 1.5 = 1.5$$

अतः, माँग की आय लोच होगी

$$e_M = \frac{dx}{dM} \times \frac{M}{x} = 1.5 \times \frac{M}{100 + 1.5M}$$

$$= \frac{1.5M}{100 + 1.5M}$$

$M = 10,000$ के लिए

$$e_M = \frac{1.5(10,000)}{100 + 1.5(10,000)} = \frac{15000}{15100} = \frac{15}{151} = 0.0993 \text{ है।}$$

उदाहरण : रैखिक माँग नियम फलन $p = 100 - .5x$ के लिए संबंध $e = \dfrac{AR}{AR - MR}$ की जाँच कीजिए।

हल : दिया हुआ माँग फलन $p = 100 - .5x$ है।

औसत आगम, $AR = p = 100 - .5x$ है,

कुल आगम $TR = px = 100x - .5x^2$ है, तथा

सीमांत आगम $MR = \frac{d}{dx}(100x - .5x^2) = 100 - x$ है।

अतः, $e = \frac{AR}{AR - MR} = \frac{100 - .5x}{100 - .5x - 100 + x} = \frac{100 - .5x}{0.5x}$ …(5) है

अब हम लोच, सूत्र $e = -\dfrac{dx}{dp} \cdot \dfrac{p}{x}$ द्वारा ज्ञात करते हैं।

दिए हुए फलन से हम पाते हैं कि $\frac{dx}{dp} = \frac{1}{\frac{dx}{dp}} = \frac{-1}{.5}$

$$\Rightarrow \quad e = \frac{1}{0.5} \times \frac{100 - .5x}{x} = \frac{100 - .5x}{0.5x} \qquad \text{…(6)}$$

समीकरण (5) और (6) से हम पाते हैं कि संबंध $e = \frac{AR}{AR - MR}$ दिए हुए माँग फलन के लिए सत्य है।

उदाहरण : माँग फलन $p = ax^{\beta}\ (a > 0)$ के लिए निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दें :

i) सीमांत आगम (MR) क्या है?

ii) माँग की लोच ज्ञात कीजिए।

iii) किन स्थितियों में, किसी माँग फलन की लोच 1 होगी?

हल : हमें दिया है कि $AR: p = ax^{\beta}$ $(a > 0)$ है।

i) कुल आगम, $TR = px = ax^{\beta+1}$ तथा $MR = \frac{d}{dx}(TR) = a(\beta+1)x^{\beta}$

$$= (\beta+1)ax^{\beta} = (\beta+1)p \text{ है।}$$

ii) माँग की लोच सूत्र $e = -\frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x}$ से प्राप्त होती है।

यहाँ $p = ax^{\beta}$ है। अतः, $\frac{dp}{dx} = a\beta x^{\beta-1}$ होगा।

$$= -\frac{1}{a\beta x^{\beta-1}} \cdot \frac{p}{x} = -\frac{1}{a\beta x^{\beta-1}} \cdot \frac{ax^{\beta}}{x} = -\frac{1}{\beta}$$

$$\Rightarrow e = -\frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x}$$

अर्थात् माँग की लोच, $e = -\frac{1}{\beta}$ है।

iii) यदि $e = 1$ है, तो $-\frac{1}{\beta} = 1$ होगा।

अर्थात् $\beta = -1$ होगा।

बोध प्रश्न 3

1) एक एकाधिकारी उद्योगपति के लिए माँग फलन $p = 15 - \frac{1}{5}q$ है, जहाँ p कीमत तथा q माँग की मात्रा है। सीमांत आगम ज्ञात कीजिए।

क्या इस स्थिति में औसत आगम, सीमांत आगम तथा लोच के मध्य का संबंध सत्य होगा? किस कीमत पर सीमांत आगम शून्य के बराबर होगी।

....

....

....

....

2) एक उत्पादक के लिए लागत फलन $C = 100q - \frac{10}{3}q^2 + \frac{q^3}{9}$ दिया है, जहाँ C, उत्पादन की लागत तथा q, उत्पादन का स्तर है। उत्पादन का वह स्तर ज्ञात कीजिए जिसके लिए सीमांत लागत, औसत लागत के बराबर हो।

....

....

....

3) एक उत्पादक का उत्पादन x, श्रम बल की मात्रा L से संबंध $X = 91\ L + 16\ L^2 - L^3$ से वर्णित है।

i) सीमांत उत्पाद फलन तथा औसत उत्पाद फलन ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

ii) श्रम का सीमांत उत्पाद MP_L तथा औसत सीमांत उत्पाद AP_L ज्ञात कीजिए यदि यह दिया हो कि उत्पादक 200 श्रमिकों को नियुक्त करने का निर्णय लेता है।

....

....

....

....

....

iii) यदि उत्पादक चाहता हो कि MP_L = 1200 इकाई हो, तो उसे कितने श्रमिक नियुक्त करने चाहिए?

....

....

....

....

iv) यदि मज़दूरी की दर 50रू. प्रति श्रमिक हो, तो सीमांत लागत को श्रम के फलन के रूप मे ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

9.6 सार-संक्षेप

किसी फलन का अवकलज, अवकलन गणित की केंद्रीय संकल्पना है। यह मूलतः एक सीमा है और इसका मूल्यांकन फलन की संततता पर आधारित होता है। यह इकाई अवकलजों पर चर्चा से प्रारंभ हुई। एक फलन के अवकलज को परिभाषित करने के लिए सीमा की संकल्पना को अंतर भागफल पर लगाया गया। किसी फलन $y = f(x)$ का अंतर भागफल $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ द्वारा प्राप्त किया जाता है। यह x के आस–पास किसी अंतराल

में, x के प्रति इकाई परिवर्तन के सापेक्ष, y में होने वाले औसत परिवर्तन का माप होता है। जब हम अंतर भागफल की सीमा निकालते हैं जबकि $\Delta x \to 0$ हो (Δx, 0 की ओर जाता हो), तो हमें x के सापेक्ष y का अवकलज प्राप्त होता है और इसे हम $\frac{dy}{dx}$ से व्यक्त करते हैं। यह x में होने वाले अति सूक्ष्म परिवर्तन के सापेक्ष y के परिवर्तन की दर को दर्शाता है। एक प्रकार से यह x के किसी मान के लिए y में होने वाला अति सूक्ष्म या सीमांत परिवर्तन है। ज्यामितीय रूप में, x के किसी मान के लिए, फलन $y = f(x)$ का अवकलज, दिए हुए फलन के वक्र के संगत बिंदु पर स्पर्श रेखा की ढाल के रूप में देखा जा सकता है। किसी फलन के किसी दिए हुए बिंदु पर अवकलज के अस्तित्व के लिए, उस बिंदु पर फलन की संततता, एक अनिवार्य शर्त है। परंतु यह एक पर्याप्त शर्त नहीं है। अर्थशास्त्र तथा अन्य संबंधित विषयों में प्रयोग होने वाली 'सीमांत' संकल्पना अवकलज का एक महत्वपूर्ण प्रतिरूप है।

अवकलज गणित में हम मूलतः एक दिए हुए फलन से एक नया फलन प्राप्त करते हैं। इस प्रकार प्राप्त फलन को दिए हुए फलन का अवकलज कहते हैं तथा उसको अनेक प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है। अतः, प्रतिकात्मक रूप में, यदि $y = f(x)$ एक प्रदत्त फलन है, तो उसका अवकलज या अवकलन गुणांक $y_1, y', \frac{dy}{dx}$ अथवा $f'(x)$ इत्यादि प्रतीकों से व्यक्त किया जा सकता है। किसी फलन का अवकलज ज्ञात करने की इस प्रक्रिया को अवकलन कहते हैं। इसके पश्चात् इस इकाई में अवकलज ज्ञात करने के विभिन्न मानक नियमों की चर्चा की गई जिनमें फलनों के योग या अंतर का अवकलन, गुणनफल का नियम, भागफल का नियम, श्रेणी नियम इत्यादि सम्मिलित हैं।

अंत में हमने देखा कि किस प्रकार अवकलन का प्रयोग अर्थशास्त्र में सीमांत फलन जैसे कि सीमांत आगम, सीमांत लागत इत्यादि को ज्ञात करने में तथा लोच की संकल्पना को समझने में किया जा सकता है। इसके अतिरिक्त, इस इकाई में, प्रथम–कोटि अवकलजों के अर्थशास्त्र में होने वाले अन्य अनुप्रयोगों की चर्चा भी की गई।

9.7 बोध-प्रश्नों के उत्तर / संकेत

बोध प्रश्न 1

1) भाग 9.3 पढ़ें और उत्तर लिखें।

2) भाग 9.3 पढ़ें और उत्तर लिखें।

बोध प्रश्न 2

1) $3(m+1)\, x^m + 6m\, x^{m-1}$

2) $\frac{-2}{(x+1)^3}$

3) भाग 9.4 पढ़ें और उत्तर लिखें।

4) $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{8x}$

5) $\frac{x}{2+x^2}$

6) $2e^{2x}\left[\frac{1}{(2x+1)} + \log(2x+1)\right]$

7) $\frac{2m+3}{m}$

बोध प्रश्न 3

1) भाग 9.5 पढ़ें और उत्तर लिखें।

2) भाग 9.5 पढ़ें और उत्तर लिखें।

3) i) $MP_L = 91 + 32\,L - 3\,L^2 ; AP_L = 91 + 16\,L - L^2$

ii) अधिकतम के लिए रखें : $\frac{d(AP_L)}{dL} = 0 \Rightarrow 16 - 2L = 0 \Longrightarrow L = 8$

iii) अधिकतम के लिए रखें : $\frac{d(MP_L)}{dL} = 0 \Rightarrow 32 - 6L = 0 \Longrightarrow L = 6$ अब द्वितीय अवकलज का आँकलन करें यहां $\frac{d^2(MP_L)}{dL^2} = -6 < 0$ । एक ऋणात्मक मान 'अधिकतम' का संकेत करता है।

ह्रासमान सीमांत प्रति प्राप्ति का क्रम के अधिकतम स्तर की प्राप्ति के बाद प्रारंभ होता है– अर्थात् जब हम 6 से अधिक व्यक्तियों को काम पर रखते हैं।

4) सीमांत लागत = मजदूर / $MP_L = \frac{50}{91 + 32\,L - 3\,L^2}$