इकाई 8 सांतत्य*

संरचना

8.0 उद्देश्य

यह इकाई पिछली इकाई का विस्तार है। पिछली इकाई में हमने सीमाओं का अध्ययन किया तथा उनके महत्व पर बल दिया था जबकि वर्तमान इकाई फलनों के सांतत्य से संबंधित है। इस इकाई को पढ़ने के पश्चात् आप निम्नलिखित अवधारणाओं से भली-भांति अवगत हो जाएंगे :

- किसी फलन का सांतत्य;
- किसी फलन की सीमा और उसके सांतत्य में संबंध;
- असांतत्यता की संकल्पना;
- असांतत्यता के विभिन्न प्रकार;
- मध्यवर्ती मान प्रमेय; तथा
- संतत और असंतत फलनों के विभिन्न अनुप्रयोग।

8.1 विषय-प्रवेश

संतत फलनों के महत्व को समझने के लिए हम थोड़ा रूक कर यह देखते हैं कि हम इस पाठ्यक्रम में कहाँ तक पहुँचे हैं और हमें आगे कहाँ तक जाना है। पहली इकाई में हमने समुच्चों के बारे में जाना कि समुच्चय वस्तुओं के सुपरिभाषित संग्रह होते हैं। ये वस्तुएं वास्तविक संख्याएं भी हो सकती हैं, उनके क्रमिक युग्म अथवा उनके n-टपल

*श्री अनूप चटर्जी

भी। अतः, एक प्रकार से समुच्चयों की संकल्पना से हमें अर्थशास्त्र में प्रयोग होने वाली राशियों और उनके मापों को वर्गीकृत कर सके। अगली इकाई में समुच्चयों के गुणन के नियमों की व्याख्या की गई और उन नियमों की भी जिनके द्वारा एक समुच्चय के अवयवों को किसी दूसरे समुच्चय के अवयवों से संबद्ध किया जा सकता है। इन नियमों को फलन कहते हैं। इकाई 3 तर्कशास्त्र पर केंद्रित थी तथा इस इकाई में हमारा लक्ष्य पाठकों का परिचय कथन, प्रमेय, उपपत्ति, अनिवार्य एवं पर्याप्त प्रतिबंधों, इत्यादि संकल्पनाओं से करवाना था। एक प्रकार से, इस अध्याय में हमने अपने तर्क को प्रबलता से रखना सीखा। इकाई 4 में विभिन्न विशिष्ट फलनों जैसे कि रैखिक, बहुपद, चरघातांकीय, लघुगणकीय, और घातांक तथा अतिपरवलय फलनों की चर्चा की गई। पाँचवी इकाई में इकाई 4 में प्रस्तुत की गई संकल्पनाओं का विस्तार किया गया। इसमें फलनों और समीकरणों का किसी समतल पर ज्यामितीय चित्रण, कार्तीय निर्देशांकों के माध्यम से किया गया। इकाई 6 में विशेष प्रकार के फलनों, अनुक्रमों, का अध्ययन किया गया। हमने यह जाना कि किसी अनुक्रम के पदों के योग द्वारा हमें किस प्रकार एक श्रेणी प्राप्त होती है। पिछली अर्थात् सातवीं इकाई में हमने सीमाओं की चर्चा की, और यह जाना कि किस प्रकार अनुक्रम और फलन किसी विशिष्ट मान की ओर अभिसारित होते हैं। इस इकाई में हम इसी चर्चा को आगे बढ़ाते हैं। यह इकाई फलनों के एक विशिष्ट गुण पर केंद्रित हैं और वह गुण है : सांत्यता। सहज रूप से समझें तो एक फलन संतत होता है यदि उसके आलेख को हम बिना फलन/पेन उठाएं आरेखित कर सकें। परंतु इतना साधारण सा प्रतीत होने वाला यह गुण इतना महत्वपूर्ण क्यों है? वास्तव में, बात यह है कि यदि कोई फलन संतत न हो, तो वह अवकलनीय नहीं होगा। अवकलनीयता के बारे में हम अगली दो इकाईयों में अध्ययन करेंगे और इकाई 11 में हम अवकलनीय फलनों के एक विशेष गुणों के बारे में पढ़ेंगे जिसे 'उत्तलता' कहते है। मान लीजिए हमारे पास एक चर y है जो एक चर x का फलन है अर्थात् y, x पर निर्भर करता है। मान अवकलन, x में अतिसूक्ष्म वृद्धिशील अथवा सीमात परिवर्तन के फलस्वरूप y में होने वाले परिवर्तन का विवेचन करता है। और कोई फलन अवकलनीय नहीं होगा यदि वह संतत न हो। इसीलिए सांतत्य का अध्ययन महत्वपूर्ण है। अवकलन के पश्चात् हम अभीष्टीकरण (optimization) की ओर बढ़ते हैं : x के किस मान के लिए निर्भर चर का मान अधिकतम अथवा न्यूनतम है। आपने 'व्यष्टि अर्थशास्त्र के नियम' पाठ्यक्रम के अंतर्गत में यह जाना होगा कि इस प्रकार के निर्णय अर्थशास्त्र के अध्ययन में अत्यंत महत्वपूर्ण होते हैं। इस प्रकार हम सांतत्य के महत्व को समझ सकते हैं।

इस इकाई का गठन इस प्रकार किया गया है : अगले अनुच्छेद में सांतत्य तथा उसके गुणों पर और संतत फलनों की विशेषताओं तथा उनके गुणधर्मों पर विस्तार से चर्चा की गई है। सामान्यतः, अर्थशास्त्र में हमें ऐसे फलनों से सामना नहीं करना पड़ता जो संतत न हों। परंतु हमें ज्ञात होना चाहिए कि ऐसे फलन अवकलनीय नहीं होते। इसके बाद वाले अनुच्छेद में असांतत्य की व्याख्या की गई है तथा इसके विभिन्न प्रकारों की चर्चा की गई है। इससे अगले अनुच्छेद में संतत फलनों के कुछ अनुप्रयोगों की चर्चा की गई है क्योंकि अर्थशास्त्र में प्रयुक्त होने वाले अधिकतर फलन, और वे फलन जिनकी चर्चा चौथी और पाँचवी इकाई में की गई हैं, संतत हैं। अंत में , इस इकाई में एक अत्यंत महत्वपूर्ण प्रमेय, जिसे मध्यवर्ती–मान प्रमेय कहते हैं, की चर्चा की गई है तथा मांग और आपूर्ति संतुलन तथा अतिरिक्त मांग फलनों में इस प्रमेय के अनुप्रयोगों की चर्चा की गई है।

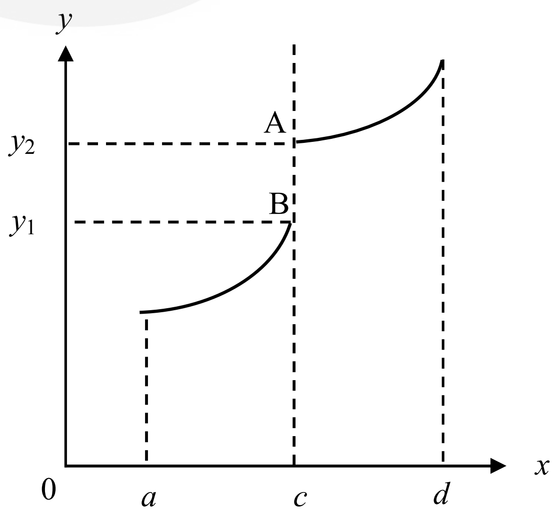
8.2 एक चर वाले फलन का सांतत्य [Continuity of a Function of One Variable]

एक ऐसा चर जो संख्या रेखा पर संतत रूप से (बिना व्यवधान के) परिवर्तित होने की क्षमता रखता है एक संतत चर कहलाता है। आईए हम एक फलन $y = f(x)$ पर विचार करें जहाँ x और y दो संतत चर हैं। इस फलन के संतत फलन होने के लिए यह आवश्यक है कि न केवल दोनों चर, x और y, व्यक्तिगत रूप से संतत व्यतिक्रम (continuous variation) की योग्यता रखते हों, अपितु x में संतत व्यतिक्रम के फलस्वरूप y में होने वाला परिवर्तन भी संतत हो। यह सुस्पष्ट है कि एक संतत फलन का वक्र भी संतत होगा अर्थात् इसमें कोई विच्छिति (gap) नहीं होगी।

8.2.1 एक फलन का एक बिंदु पर सांतत्य [Continuity of a Function at a Point]

सांतत्य ऐसे परिवर्तनों से संबद्ध है जो आकस्मिक न होकर अत्यंत धीमी गति से होते हैं।

इसका एक संतत फलन की संकलपना से सीधा संबंध है। एक फलन $y = f(x)$ संतत कहलाता है यदि स्वतंत्र चर (जिसे हमने यहाँ x लिया है) में छोटा सा परिवर्तन, निर्भर चर (जिसे हमने यहाँ y लिया है) में भी एक छोटा/लघु परिवर्तन उत्पन्न करता है। ज्यामितीय दृष्टि से एक फलन संतत होता है यदि उसका आलेख जुड़ा हुआ हो उसमें कोई विच्छेद अथवा आकस्मिक परिवर्तन न हो। दूसरे शब्दों में, फलन का आलेख बिना कलम को उठाएं बनाया जा सके। ऐसे वक्र भी जिनमें तीक्ष्ण मोड़ हों (अर्थात् जो यकायक अपना पथ बदलते हों) संतत होते हैं। परंतु वे वक्र नहीं जिनमें किसी बिंदु पर विच्छेद अथवा प्लुति (jump) हो। यदि किसी फलन में किसी बिंदु पर प्लुति (jump) हो, तो फलन उस बिंदु पर असंतत होता है। इसका अर्थ है कि जब हम उस बिंदु से होकर निकलते हैं तो फलन के मान में एक आकस्मिक परिवर्तन होता है। एक ऐसी स्थिति रेखाचित्र 8.1 में दर्शायी गई है जहाँ बिंदु $x=c$ पर एक प्लुति (jump) है।

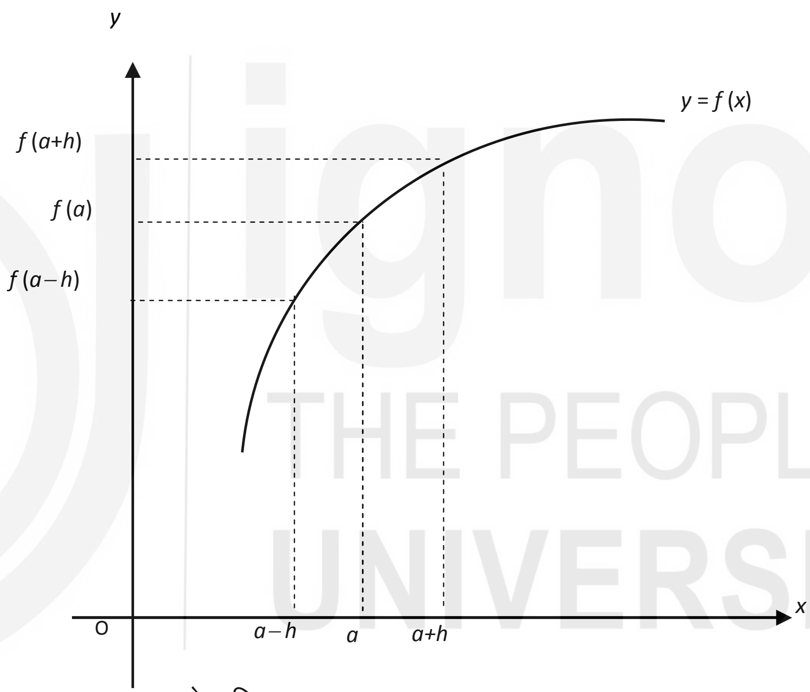


रेखाचित्र 8.1

ध्यान दें कि इस फलन में जब x एक ऐसा मान लेता है जो c से थोड़ा सा कम है, तो फलन का मान y_1 है और जैसे ही x का मान c से थोड़ा सा बड़ा होता है, फलन का मान यकायक उत्प्लवन करके y_2 तक पहुँच जाता है। यह इस तथ्य को दर्शाता है कि यह फलन $x = c$ पर असंतत है।

8.2.2 एक बिंदु पर सांतत्य का मापदंड [Criterion for Continuity at a Point]

हम एक फलन के सांतत्य को परिभाषित करने के लिए सीमा की संकल्पना का प्रयोग करेंगे। यदि एक फलन $y = f(x)$ की सीमा का अस्तित्व है जबकि x फलन के प्रांत के किसी बिंदु a की ओर अग्रसर हो और यदि यह सीमा $f(a)$ के बराबर हो अर्थात् $x = a$ पर फलन के मान के बराबर हो, तो फलन a पर संतत कहलाता है। हम सांतत्य के इस मापदंड की व्याख्या रेखाचित्र 8.2 की सहायता से करेंगे।



रेखाचित्र 8.2

एक फलन $y = f(x)$ लीजिए। मान लीजिए x का मान a से $a + h$ हो जाता है, जहाँ h एक लघु धनात्मक संख्या है। इसके संगत फलन के मान में परिवर्तन $f(a + h) - f(a)$ के बराबर होगा। फलन $y = f(x)$ बिंदु $x = a$ पर संतत होने के लिए यह आवश्यक है कि h के छोटे मानों के लिए $f(a + h) - f(a)$ का मान भी छोटा हो। अर्थात्

$$\lim_{h\to 0}\{f\,(a + h) - f(a)\} = 0$$

या $$\lim_{h\to 0} f\,(a + h) = f(a) \qquad (1)$$

समीकरण (1) से यह उपलक्षित होता है कि फलन की $x = a$ पर दाएं पक्ष की सीमा फलन के इस बिंदु पर मान के बराबर होनी चाहिए। इसी प्रकार हम, फलन के बाएं पक्ष से $x = a$ पर सांतत्य का प्रतिबंध भी हम प्राप्त कर सकते हैं। यह होगा

$$\lim_{h\to 0} f\,(a - h) = f(a) \qquad (2)$$

(1) और (2) से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि किसी फलन के संतत होने की तीन आवश्यकताएं है :

i) दिए हुए बिंदु पर फलन की सीमा का अस्तित्व

ii) दिए हुए बिंदु पर फलन के मान का अस्तित्व

iii) उस बिंदु पर फलन की सीमा तथा फलन के मान का समान होना

ध्यान दें कि यदि किसी फलन की किसी बिंदु पर बाएं और दाएं पक्ष की सीमाएं बराबर होती हैं तो उस बिंदु पर फलन की सीमा का अस्तित्व होता है।

अतः, हम और स्पष्ट रूप से कह सकते हैं कि एक फलन $f(x)$ के एक बिंदु a पर संतत होने के लिए निम्नलिखित कथन/प्रतिबंध सत्य होने चाहिए :

1) बिंदु a फलन के प्रांत में होना चाहिए, अर्थात् $f(a)$ परिभाषित होना चाहिए,

2) फलन की सीमा, जब x, a की ओर अग्रसर हो, का आस्तित्व होना चाहिए अर्थात् $\lim_{x\to a} f(x)$ का अस्तित्व होना चाहिए, और

3) सीमा का मान फलन के मान $f(a)$ के बराबर होना चाहिए अर्थात्

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

8.2.3 संवृत स्वरूप फलन [Closed-form Functions]

एक संवृत स्वरूप फलन एक ऐसा फलन होता है जो विभिन्न फलनों जैसे कि अचर फलन, घातांक फलन, चर घातांकीय फलन, मूलीय फलन, लघुगणकीय फलन इत्यादि को विभिन्न अंकगणितीय संक्रियाओं तथा फलनों के संयोजन द्वारा संयोजित करके एक गणितीय सूत्र के रूप में लिखकर प्राप्त किया गया हो। संवृत स्वरूप फलन के कुछ उदाहरण है:

$$3x^2 - x + 1; \quad \frac{(x^2-1)^{1/2}}{6x-2}; \quad e^{(x^2-1)^{1/2/x}}; \quad \left(\log_3\left(4x^2 - e^x\right)\right)^{2/3}$$

ऐसे फलन अत्यंत जटिल भी हो सकते है। दूसरी ओर, नीचे दिया हुआ फलन एक संवृत स्वरूप फलन नहीं है।

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x < -1 \\ x^2 + x & \text{if } -1 \le x \le 1 \\ 2 - x & \text{if } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

क्यों? क्योंकि $f(x)$ एक अकेले गणितीय व्यंजक के रूप में निर्दिष्ट नहीं है।

संवृत स्वरूप फलनों का सांतत्य

एक संवृत स्वरूप फलन सदैव अपने प्रांत के प्रत्येक बिंदु पर संतत होता है। अतः, एक संवृत स्वरूप फलन के प्रांत में स्थित किसी भी बिंदु पर फलन की सीमा, फलन में उस बिंदु के मान को रख कर (प्रतिस्थापित करके) ज्ञात की जा सकती है।

उदाहरण 1 : $f(x) = \frac{x^2-3x}{4x+3}$

एक संवृत स्वरूप फलन है और $x=2$ इसके प्रांत में स्थित है। अतः $\lim_{x\to 2} f(x)$ ज्ञात करने के लिए हम $f(x)$ में x के स्थान पर 2 रखते हैं :

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x}{4x+3} = f(2) = -\frac{2}{11}$$

आईए अब हम एक संवृत स्वरूप फलन $f(x)$ले जो $x=a$ पर परिभाषित नहीं है। इस बिंदु

$x=a$ पर $f(x)$ की सीमा ज्ञात करने के लिए हम निम्नलिखित में से कोई प्रक्रिया अपना सकते हैं :

a) सरलीकरण या किसी अन्य विधि का प्रयोग करें जिससे हम $f(x)$ को एक ऐसे फलन से प्रतिस्थापित करते है (बदलते हैं) जो कि $f(x)$ के समान हो तथा $x=a$ पर परिभाषित हो। ऐसा करने से नए फलन में $x=a$ रखने पर हमें फलन की सीमा प्राप्त हो जाएगी।

b) सीमा को आलेख की सहायता से या संख्यात्मक रूप से (संख्यानुसार) ज्ञात करने का प्रयास करें। इस प्रकार हमें सीमा का एक अनुमान मिल सकता है।

कभी-कभी हमें *a)* और *b)* दोनों विधियों का प्रयोग करने की आवश्यकता पड़ती है।

8.2.4 सरलीकरण द्वारा किसी सीमा का मान ज्ञात करना [Evaluating a Limit using Simplification]

आईए हम $\lim_{x\to -2} f(x)$ ज्ञात करें जहाँ $f(x) = \frac{3x^2+x-10}{x+2}$ है।

हम निम्नलिखित प्रश्नों पर विचार करते हैं :

1) क्या $f(x)$ एक संवृत स्वरूप फलन है?

   इसका उत्तर है, हाँ। क्योंकि $\frac{3x^2+x-10}{x+2}$ एक अकेला गणितीय सूत्र है।

2) क्या बिंदु $x=-2$ फलन $f(x)$ के प्रांत में है?

   इसका उत्तर है, नहीं। क्योंकि $f(-2) = \left(3(-2)^2 + (-2) - 10\right) \big/ \left((-2)+2\right)$ परिभाषित नहीं है।

   अतः हमें इस फलन का सरलीकरण करना होगा। ऐसा करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{3x^2+x-10}{x+2} = \frac{(x+2)(3x-5)}{(x+2)}$$

$$= 3x-5.$$

क्योंकि अब हमें एक संवृत स्वरूप फलन प्राप्त हो चुका है जो कि $x=-2$ पर परिभाषित है, हम इस बिंदु पर सीमा का मान x के स्थान पर –2 प्रतिस्थापित करके (रख कर) ज्ञात कर सकते हैं :

$$\lim_{x\to -2}\frac{3x^2+x-10}{x+2}=\lim_{x\to -2}3x-5=3(-2)-5=-11$$

उदाहरण 2 : आईए अब हम ज्ञात करें कि क्या $f(x)=3x-2$ बिंदु $x=3$ पर संतत है?

हल : प्रदत्त फलन है : $f(x)=3x-2$

चरण 1 : जब हम $x=3$ रखते हैं, तो हम पाते हैं कि $f(x)=3\times 3-2=7$ है। अतः, फलन $x=3$ पर परिभाषित है।

चरण 2. $f(x)=3x-2$ की सीमा का अस्तित्व है जबकि $x\to 3$ है ओर इसका मान 7 है।

चरण 3. साथ ही, $\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}(3x-2)=7=f(3)$.

अतः, यह फलन $x=3$ पर संतत है। वास्तव में, यह फलन अपने प्रांत के प्रत्येक बिंदु पर परिभाषित है। विद्यार्थी अन्य बिंदुओं पर इस फलन के संतत होने की पुष्टि स्वयं कर सकते हैं।

उदाहरण 3 : फलन $f(x)=x^3+3x-4$ के सांतत्य का परीक्षण बिंदु $x=1$ पर कीजिए।

चरण 1 : $x=1$ पर $f(x)$ का मान $f(1)=(1)^3+3(1)-4=1+3-4=0$ है। अतः, फलन $f(x)$, बिंदु $x=1$ पर परिभाषित है।

चरण 2 : $\underset{x\to 1}{Lt}\left(x^3+3x-4\right)=(1)^3+3(1)-4=0$ है। अर्थात् $x\to 1$ के लिए फलन की सीमा का अस्तित्व है।

चरण 3 : अतः, हम पाते हैं कि $f(1)=\underset{x\to 1}{Lt}\ f(x)=0$ है, अर्थात् फलन $f(x)=x^3+3x-4$, $x=1$ पर एक संतत फलन है।

उदाहरण 4 : निर्धारित कीजिए की निम्नलिखित फलन x के किन मानों के लिए संतत हैं :

a) $$f(x)=\frac{x^4+3x^2-1}{(x-1)(x+2)}$$

b) $$f(x)=\left(x^2+2\right)\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^4+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

हल : a) यहाँ $f(x)=\dfrac{x^4+3x^2-1}{(x-1)(x+2)}$ दिया है। यह एक परिमेय फलन है। अतः, यह सभी बिंदुओं के लिए संतत है सिवाय उनके जहाँ पर इस फलन का हर शून्य है। अर्थात् जब $(x-1)(x+2)=0$ है। इससे हमें दो स्थितियाँ प्राप्त होती हैं :

i) $x-1=0$ अर्थात् $x=1$ इस बिंदु पर $\lim_{x\to 1} f(x)\to\infty$ जो कि अपरिभाषित है।

ii) $x+2=0$ अर्थात् $x=-2$ हम देख सकते हैं कि $\lim_{x\to -2} f(x)\to\infty$ जो कि अपरिभाषित है।

क्यों कि $x=1$ और $x=-2$ के लिए फलन की सीमा अस्तित्व नहीं रखती, यह फलन $x=1$और $x=-2$ पर संतत नहीं हो सकता।

b) यहाँ $f(x)=(x^2+2)\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)^4+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ है। इस फलन में पद $\dfrac{1}{x}$, $x=0$ पर परिभाषित नहीं हैं क्योंकि $\lim_{x+\infty}\frac{1}{x}=\infty$ होती है। इसी प्रकार पद $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ केवल उन्हीं बिंदुओं के लिए परिभाषित है जिनके लिए $(x+1)>0$ हो अर्थात् $(x+1)>0$ हो। अतः, हम पाते हैं कि यह फलन केवल अंतराल $(-1,0)$ में तथा अंतराल $(0,\infty)$ में परिभाषित है, अन्य वास्तविक संख्याओं के लिए नहीं। इसलिए यह फलन केवल $(-1,0)$ तथा $(0,\infty)$ में आने वाले बिंदुओं पर ही संतत होगा।

8.2.5 एक फलन का एक अंतराल पर सांतत्य [Continuity of a Function over an Interval]

एक फलन $y=f(x)$ एक अंतराल (a,b) पर संतत कहलाता है यदि यह इस अंतराल के प्रत्येक बिंदु x पर संतत है। अर्थात् यदि यह

1) $x=a$ पर

2) $x=b$ पर

3) a और b के बीच के प्रत्येक बिंदु पर

संतत है।

उदाहरण 5 : सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$, $x=-2$ से लेकर $x=-1$ तक के सभी बिंदुओं पर संतत है अर्थात् अंतराल $[-2,-1]$ पर संतत हैं।

हल : यह सिद्ध करने के लिए कि दिया हुआ फलन अंतराल $[-2,-1]$ पर संतत है, हम सिद्ध करेंगे कि यह फलन :

1) $x=-2$ पर संतत है

2) $x=-1$ पर संतत है

3) $x=-2$ और $x=-1$ के बीच के प्रत्येक बिंदु, जैसे कि -1.5 इत्यादि, पर संतत है।

1) हम पहले $\lim_{x\to -2} f(x)$ ज्ञात करते हैं :

दाएं पक्ष की सीमा का आँकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(-2+h) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{-2+h-2}\right] = \frac{-1}{4}$$

बाएं पक्ष की सीमा का आँकलन करने पर हम पाते हैं कि

$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(-2-h) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{-2-h-2}\right] = \frac{-1}{4}$ क्योंकि

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^-} f(x) = \frac{-1}{4}$ हम पाते हैं कि

$\lim_{x\to -2} f(x) = \frac{-1}{4}$ है। अतः, फलन $f(x), x = -2$ पर संतत है।

2) इसी प्रकार हम देख सकते हैं कि दिया हुआ फलन $f(x), x = -1$ पर संतत हैं। पाठकों से अनुरोध है इस भाग को स्वयं करें।

3) अब हम $\lim_{x\to -\frac{3}{2}} f(x)$ ज्ञात करते हैं।

दाएं पक्ष की सीमा का आँकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$\lim_{x\to -\frac{3}{2}^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f\left(-\frac{3}{2}+h\right) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{-\frac{3}{2}+h-2}\right] = \frac{-2}{7}$$

बाएं पक्ष की सीमा का आँकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$\lim_{x\to -\frac{3}{2}^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f\left(-\frac{3}{2}-h\right) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{-\frac{3}{2}-h-2}\right] = \frac{-2}{7}$$

क्यों कि $\lim_{x\to -\frac{3}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to -\frac{3}{2}^-} f(x) = \frac{-2}{7}$

हम पाते हैं कि $\lim_{x\to -\frac{3}{2}} f(x) =$है। अतः, हम पाते हैं कि फलन $f(x), x = -\frac{3}{2}$ पर संतत है, जो कि -2 और -1 के बीच का एक बिंदु है। इसी प्रकार यह सिद्ध किया जा सकता है कि दिया हुआ फलन -2 और -1 के बीच के प्रत्येक बिंदु पर संतत है।

इस प्रकार हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि यह फलन अंतराल $[-2,-1]$ पर संतत है।

बोध प्रश्न 1

1) एक फलन $f(x) = x^2 + 3$ दिया है। इस फलन का सांतत्य $x = 1$ पर निर्धारित कीजिए।

....

....

....

....

....

....

2) एक बैंक 10000 रू. तक के ऋण के लिए 10 प्रतिशत प्रतिवर्ष ब्याज की दर से ब्याज लेता है। यदि ऋण 10000 रू. से अधिक हो तो बैंक ब्याज की दर 5 प्रतिशत बढ़ा देता है। बैंक के (कुल) ब्याज फलन के लिए एक व्यंजक ज्ञात कीजिए तथा इस फलन के सांतत्य का निर्धारण कीजिए।

....

....

....

....

....

....

....

3) निम्नलिखित सीमाएं ज्ञात कीजिए :

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}}{2x-3}$

ii) $\lim_{x\to -3} \dfrac{2x+3}{x+3}$

4) निम्नलिखित सीमा ज्ञात कीजिए :

$$\lim_{x\to -1} \frac{\left(x^3+1\right)\left(x-1\right)}{x^2+3x+2}$$

8.3 असंतत फलन [Discontinuous Functions]

यदि सीधे शब्दों में कहें तो कोई फलन जो संतत न हो असंतत फलन कहलाता है। हम जानते हैं कि किसी फलन के संतत होने के लिए निम्नलिखित शर्तें सत्य होनी चाहिए :

i) $f(a)$ परिभाषित हो

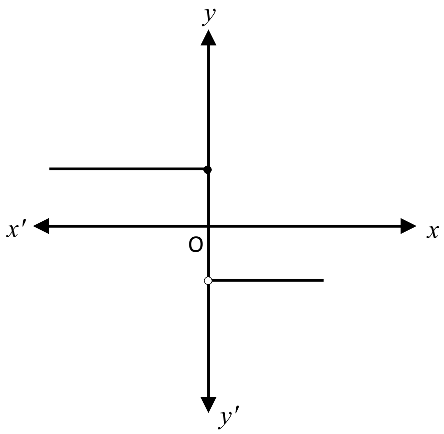
ii) $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)$ का अस्तित्व होना चाहिए अर्थात् $\lim\limits_{x\to a^-} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to a^+}$ तथा

iii) $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right) = f\left(a\right)$ है।

स्पष्टतयः, किसी फलन के लिए यदि इनमें से कोई भी कथन असत्य हो तो वह फलन असंतत होगा।

8.3.1 असांतत्य के प्रकार [Types of Discontinuity]

असांतत्य के विभिन्न प्रकार होते हैं। सर्वप्रथम किसी फलन के आलेख में किसी बिंदु पर विच्छिति अथव प्लुति (jump) हो सकती है। उदाहरण के लिए, फलन $f(x) = \begin{cases} +1, & x \le 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$ स्पष्ट रूप से असंतत है, क्योंकि इस में बिंदु $x=0$ पर एक विच्छिति/प्लुति (breah/jump) है। यदि हम $x=0$ की ओर बाएं और दाएं पक्ष से जाएं तो हमें अलग–अलग मान (सीमा) प्राप्त होती है (रेखाचित्र 8.3 देखें)

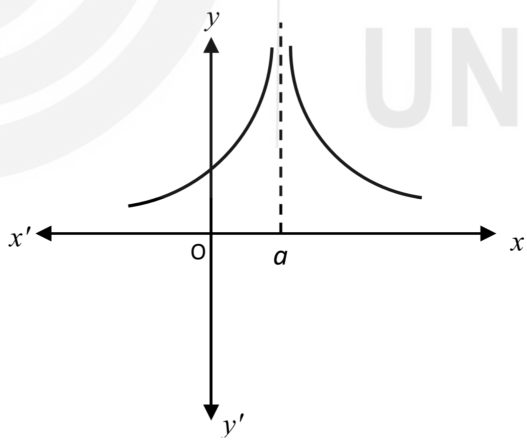


रेखाचित्र 8.3

अनंतस्पर्शी फलन एक और प्रकार के असंतत फलन हैं। आईए पहले हम यह जान लें किसी फलन की अनंतस्पर्शी रेखा क्या होती है। मान लीजिए $y=f(x)$, $x \in R$ एक फलन है। मान लीजिए कि जब x दाएं अथवा बाएं पक्ष से a की ओर अग्रसर होता है, तो y अपरिसीमित हो जाता है। इस स्थिति में हम कहते हैं कि रेखा $x=a$ फलन $y=f(x)$ की एक अनंतस्पर्शी रेखा है। यदि किसी फलन की कोई अनंतस्पर्शी रेखा हो तो उसे अनंतस्पर्शी फलन कहा जा सकता है। अनंतस्पर्शी फलन असंतत होते हैं। किसी फलन $f(x)$ के लिए रेखा $x=a$ एक ऊर्ध्वा अनंतस्पर्शी रेखा कहलाती है यदि नीचे दिए कथनों में से कोई भी एक सत्य हो (रेखाचित्र 8.4 देखें) :

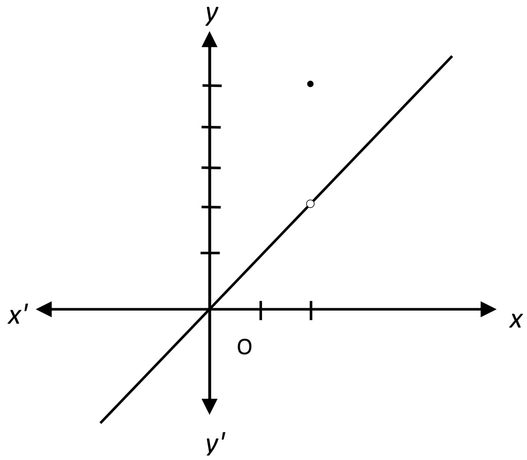
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$



रेखाचित्र 8.4

एक अन्य स्थिति जिसमें एक दिया हुआ फलन असंतत होता है वह होती है जिसमें फलन में एक छिद्र हो। फलन $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases}$ पर विचार कीजिए। यद्यपि यह फलन $x = 2$ पर परिभाषित है और $x = 2$ पर फलन के दाएं और बाएं पक्ष की सीमाएं बराबर हैं, तो भी इस फलन के लिए $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ सत्य नहीं है (रेखाचित्र 8. 5 देखें)



रेखाचित्र 8.5

रेखाचित्र में इस फलन का आलेख दिया जिसमें यह स्पष्ट रूप से देखा जा सकता है कि यह फलन $x = 2$ पर असंतत है इस फलन के आलेख में $x = 2$ पर एक छिद्र है।

सामान्यतः, हम असांतत्य के प्रकारों को दो वर्गों में बाँट सकते हैं :

a) अनिवारणीय असांतत्य फलन $f(x)$ का बिंदु $x=a$ पर असांतत्य अनिवारणीय होता है यदि $x \to a$ के लिए फलन की सीमा, का अस्तित्व न हो।

b) निवारणीय सांतत्य : बिंदु $x=a$ पर किसी फलन का असांतत्य निवारणीय कहलाता है यदि $\lim_{x\to a} f(x)$ का अस्तित्व हो अर्थात् $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ हो परंतु $\lim_{x\to a} f(x)$ का मान $f(a)$ के मान के बराबर न हो।

अर्थात् $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ हो ।

इस प्रकार के असांतत्य को दूर किया जा सकता है।

उदाहरण 6 : फलन $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ के सांतत्य का बिंदु $x = 1$ पर परीक्षण कीजिए।

हल : 1) $x = 1$ के लिए, $f(1) = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$ है जो कि अनिर्धारणीय (indeterminate) है। यह फलन $x = 1$ असंतत प्रतीत होता है। हम इस फलन की $x \to 1$ के लिए सीमा ज्ञात करते हैं। सरलीकरण करने पर हम पाते है कि

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = (x+1) \text{ है।}$$

अतः $\underset{x\to 1}{Lt} (x+1) = 1 + 1 = 2$ है अर्थात् $x \to 1$ के लिए, फलन $f(x)$ की सीमा का अस्तित्व है।

अतः हम पाते है कि इस फलन के लिए $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ है

परंतु फलन $x = 1$ पर परिभाषित नहीं है। अर्थात् यह फलन $x = 1$

पर असंतत है और असांतत्य का प्रकार निवारणीय है।

उदाहरण 7 : दिया हुआ इस फलन

यदि $x \leq 3$ है $f(x) = x + 2$

यदि $x > 3$ है $= x + 3$

को सांतत्य का $x = 3$ पर निर्धारण कीजिए।

हल : जब $x = 3$ है तो फलन का मान

$$f(3) = x + 2 = 3 + 2 = 5$$

बाएं पक्ष की सीमा ज्ञात करने के लिए हम फलन $f(x) = x + 2$ लेते हैं। इस प्रकार हमें यह सीमा 5 प्राप्त होती है।

अतः जब x,3 की ओर, 3 से कम मानों की ओर से अग्रसर होता है, तो $f(x)$ का मान 5 की ओर आता है।

$$\therefore \underset{x \to 3^-}{Lim} = 5$$

इसी प्रकार दाएं पक्ष की सीमा के लिए हम फलन $f(x) = x + 3$ लेते हैं और सीमा 6 प्राप्त करते हैं। अतः यदि x, 3 की ओर, 3 से बड़े मानों की ओर से अग्रसर होता है, तो $f(x)$ का मान 6 की ओर आता है।

$$\therefore \underset{x \to 3^+}{Lim} = 6$$

क्योंकि $\underset{x \to 3^-}{lim} f(x) \neq \underset{x \to 3^+}{lim} f(x)$ है

$\lim_{x \to 3} f(x)$ का अस्तित्व नहीं है।

अतः यह फलन $x = 3$ पर असंतत है और यह असांतत्यता अनिवारणीय प्रकार की है।

उदाहरण 8 : x के वह मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए फलन

$y = \dfrac{x + 2}{(x+1)(x+3)}$ असंतत है।

हल : यह एक परिमेय फलन है। अतः, यह सभी बिंदुओं पर संतत होगा सिवाय उन बिंदुओं के जहाँ $(x+1)(x+3) = 0$ है।

अब $(x+1)(x+3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x+1 = 0$ या $x+3 = 0$ होगा

$\Rightarrow \quad x = -1$ या $x = -3$ होगा

यदि $x = -1$ है तो $\underset{x \to -1}{Lt} f(x) = \infty$

यदि $x = -3$ है तो $\underset{x \to -3}{Lt} f(x) = -\infty$

अर्थात् $x = -1$ तथा $x = -3$ दोनों बिंदुओं पर सीमा का अस्तित्व नही है। (परिभाषित नहीं है)

अतः फलन $f(x)$ $x=-1$, और $x=-3$ पर असंतत है तथा असांतत्य का प्रकार अनिवारणीय है।

बोध प्रश्न 2

1) दिया हुआ फलन है

$$f(x) = 4 - x \qquad \text{for } x \neq 3$$
$$= 0 \qquad \text{for } x = 3$$

फलन का सांतत्य $x = 3$ पर ज्ञात कीजिए

....

....

....

2) फलन $y=|x|$ का $x = 0$ पर सांतत्य निर्धारित कीजिए।

....

....

....

3) असंतत फलन क्या होते हैं। असांतत्य के विभिन्न प्रकार क्या होते हैं।

....

....

....

4) अर्थशास्त्र से संबंधित कुछ संभाव्य फलन निर्मित कीजिए जो असंतत हों।

....

....

....

8.4 संतत तथा असंतत फलनों के अर्थशास्त्र में अनुप्रयोग [Economic Applications of Continuous and Discontinuous Functions]

इस अनुच्छेद में हम संतत और असंतत फलनों के कुछ अनुप्रयोगों की चर्चा करेंगे। अब जबकि हम संतत फलनों से भली भांति परिचित हो चुके हैं तो हम देख सकते हैं कि हमने इकाई 2 और इकाई 4 में (विशेषकर इकाई 4 में) जिन फलनों की चर्चा थी उनमें से अधिकांश फलन संतत थे। अतः यदि आप इकाई 4 को पुनः पढ़े तो आप संतत फलनों के अनुप्रयोंगों से स्वतः ही परिचित हो जाएंगे।

सांतत्य का अध्ययन सामान्यतः अवकलनीयता के संदर्भ में किया जाता है। अगली दो इकाइयों में अवकलनीयता के अध्ययन के साथ-साथ, हम संतत फलनों के बारे में भी और अधिक पढ़ेंगे। अतः, इस खंड को हम असंतत फलनों पर केंद्रित कर रहे हैं। अर्थशास्त्र में असंतत फलनों के अनेक उदाहरण स्वभाविक रूप से सामने आते हैं। यद्यपि सिद्धांतों के अध्ययन को सरल बनाने के लिए कई बार हम यह मान लेते है कि

अर्थशास्त्र में प्रयुक्त होने वाले फलन संतत हैं। परंतु फिर भी कई स्थितियों में, यदि फलन असंतत है तो उसे असंतत रूप में लेना ही अधिक उचित होता है क्योंकि यह संभव है कि फलन को संतत मान लेने से अर्थशास्त्रीय संबंधों का विकृत रूप सामने आए या सही रूप सामने न आए।

एक ऐसी स्थिति पर विचार कीजिए जिसमें एक आगत x द्वारा एक उत्पाद y प्राप्त होता है। अतः, उत्पादन फलन $y = f(x)$ प्रकार का होगा। यदि हम यह कहें कि $f(x)$ किसी बिंदु $x = a$ पर संतत है, तो इसका अर्थ होगा कि $f(x)$ वास्तविक संख्याओं के एक विवृत अंतराल पर, जिसमें बिंदु a भी सम्मिलित हो, परिभाषित है। इसका अर्थ है कि x अनंत रूप से विभाज्य है। परंतु उत्पादन में ऐसी स्थितियां हो सकती हैं आगत और उत्पाद असंतत हों। उदाहरण के लिए कारों के उत्पादन में प्रयोग किए जाने वाले नट-बोलटों की संख्या असंतत होती है। इस प्रकार के अन्य उदाहरण भी देखे जा सकते हैं। मान लीजिए कि एक फर्म बिक्री कर्मचारियों की भर्ती करती है। मान लीजिए कि फर्म इनका भुगतान नीचे दिए गए नियम के अनुसार करती है– किसी भी बिक्री कर्मचारी के वेतन के तीन हिस्से होंगे : *a*) 800 रू. की एक आधारभूत राशि, b) 10% कमीशन तथा c) यदि कर्मचारी 20000 रू से ऊपर की बिक्री करता है तो 500 रू का एकमुश्त बोनस यदि हम मान लें कि किसी बिक्री कर्मचारी का वेतन P से तथा उसके द्वारा की गई बिक्री S से निरूपित की जाती है, तो उसके द्वारा की गई बिक्री और उसके वेतन के मध्य संबंध को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

$$P = 800 + 0.1S, \text{ यदि } S < 20,000$$

$$P = 800 + 0.1S, \text{ यदि } S \geq 20,000$$

$$800 + 0.1S + 500, \text{ यदि } S \geq 20,000$$

यह फलन बिंदु 20000 पर असंतत है।

एक और उदाहरण के तौर पर आईए हम एक आय समर्थन (income support programme) कार्यक्रम पर विचार करें। कई देशों में सरकारें गरीब बेरोज़गार व्यक्तियों को आर्थिक सहायता के रूप में एक मुश्त मासिक भुगतान करती है। जैसे ही व्यक्ति की किसी अन्य स्रोत से आय प्रारंभ होती है यह सहायता राशि बंद कर दी जाती है। मान लीजिए हमारे सामने यह स्थिति है। एक स्त्री जो एकल-अभिभावक है सरकार से 2000 रू. प्रति माह की सहायता राशि पाती है, यदि उसके पास आय का कोई और साधन नहीं हो। परंतु यदि उसे कोई नौकरी मिल जाएं तो यह सहायता-राशि बंद कर दी जाती है। मान लीजिए वह नौकरी/काम मिलने पर 80रू प्रतिदिन कमा लेती है। अब यदि उसने महीने में d दिन काम किया तो उसकी कुल मासिक आय, y निम्नलिखित रूप से व्यक्त की जा सकती है :

$$y(d) = 2000 \text{ if } d = 0$$
$$y(d) = 80d \text{ if } d > 0$$

यह फलन बिंदु 0 पर असंतत है।

8.5 मध्यवर्ती-मान प्रमेय [Intermediate-Value Theorem]

इस अनुच्छेद में हम संतत फलनों से संबंधित एक अत्यंत महत्वपूर्ण प्रमेय, जिसे मध्यवर्ती-मान प्रमेय कहते हैं, के बारे में चर्चा करेंगे। इस प्रमेय के अर्थशास्त्र तथा अन्य

विषयों में भी अनेक अनुप्रयोग हैं। अर्थशास्त्र में हम इस प्रमेय का प्रयोग संतुलन जैसी महत्वपूर्ण संकल्पना के अध्ययन में करते हैं। आप 'व्यष्टि अर्थशास्त्र के नियम' के अध्ययन से जानते ही हैं कि 'संतुलन' अर्थशास्त्र की प्रमुख अवधारणाओं में से एक है। हम पहले इस प्रमेय से पाठकों का परिचय करवाते हैं और उसके पश्चात् देखेंगे कि यह किस प्रकार से संतुलन के अध्ययन में उपयोगी है।

प्रमेय का कथन

हम प्रमेय की एक सरल व्याख्या से प्रारंभ करते हैं। मान लीजिए फलन $y = f(x)$ अंतराल $[a, b]$ पर संतत है, जहाँ $b > a$ है। इससे हम पाते हैं कि फलन $f(x), f(a)$ और $f(b)$ के बीच का प्रत्येक मान लेगा, जहाँ $f(a)$ और $f(b)$ अंतराल $[a, b]$ के अंत्यबिंदुओं a और b पर फलन $f(x)$ के मान हैं। यह परिणाम मध्यवर्ती-मान प्रमेय कहलाता है क्योंकि $x = a$ तथा $x = b$ के मानों के बीच x के मान के लिए फलन $f(a)$ और $f(b)$ के मध्य का प्रत्येक मान लेता है। यदि फलन असंतत है तो इस प्रमेय का सत्य होना आवश्यक नहीं है। अब हम इस प्रमेय को औपचारिक रूप में प्रस्तुत करते हैं :

मान लीजिए $f(x)$, एक संवृत अंतराल $[a, b]$ पर परिभाषित एक संतत फलन है तथा $f(a) \neq f(b)$ है। ऐसी अवस्था में, $f(x)$ और $f(b)$ के मध्य किसी भी मान $\overline{y}$ के लिए, x का a और b के मध्य कम से कम एक ऐसा बिन्दु, $x = d$ (मान लीजिए) अवश्य होगा जिसके लिए $\overline{y} = f(d)$ हो।

संतुलन विश्लेषण में मध्यवर्ती मान प्रमेय का अनुप्रयोग

मध्यवर्ती-मान प्रमेय का उपयोग अर्थशास्त्र में किसी चर के विशिष्ट मान के अस्तित्व को दर्शाने के लिए बहुधा किया जाता है। आईए हम एक सरल मांग-आपूर्ति प्रतिमान पर विचार करें। मान लीजिए $q = D(p)$ एक मांग फलन है और $q = S(p)$ एक आपूर्ति फलन, जहाँ p वस्तु के प्रति इकाई कीमत को तथा q वस्तु की मात्रा को निरूपित करता है। ऐसे प्रतिमान में संतुलन कीमत, वह कीमत है जिस पर मांग और आपूर्ति की मात्रा समान हो। दूसरे शब्दों में, $p = p^* \geq 0$ संतुलन कीमत होगी यदि $D(p^*) = S(p^*)$ है। मांग या आपूर्ति फलन में से किसी में भी p^* का मान रख कर हम संतुलन मात्रा, q^* ,ज्ञात कर सकते हैं। आलेखीय रूप में, हम कर सकते हैं कि संतुलन उस बिंदु (p^*, q^*) पर होगा जहाँ मांग वक्र, आपूर्ति वक्र को काटता है तथा p^* तथा q^* दोनों धनात्मक होते हैं।

कभी-कभी, मांग फलन और आपूर्ति फलन दोनों पर अलग-अलग विचार करने के स्थान पर इन्हें मिलाकर एक नया फलन $z(p) = D(p) - S(p)$ प्राप्त किया जा सकता है जिसे अतिरिक्त-मांग फलन कहा जाता है। ध्यान दें कि यदि $z(p) > 0$ है तो $z(p)$ का मान $S(p)$ पर $D(p)$ के आधिक्य को निरूपित करता है। इसी प्रकार यदि $z(p) < 0$ है तो $z(p)$ का निरपेक्ष मान $D(p)$ पर $S(p)$ के अधिक्य को निरूपित करता है। अतः, अतिरिक्त मांग फलन के संदर्भ में हम कह सकते है। कि $z(p^*) = 0$ होगा यदि $D(p^*) = S(p^*)$ हो तथा $z(p) \leq 0$ होगा यदि $D(p^*) = S(p^*)$ हो। अर्थात्, संतुलन कीमत वह कीमत $p^* > 0$ है जिसके लिए $z(p^*) = 0$ हो

आईए हम उन प्रतिबंधों पर विचार करें जो संतुलन कीमत के अस्तित्व को सुनिश्चित करने के लिए पर्याप्त हैं। इन्हें प्राप्त करने के लिए हमें मध्यवर्ती मान प्रमेय का उपयोग करेंगे। मान लीजिए हम एक ऐसी वस्तु लेते हैं जिसके लिए 0 कीमत पर आपूर्ति भी 0

है। अब मान लीजिए कि मांग 0 से अधिक है। अतः, 0 कीमत पर हम प्राप्त करते हैं कि

$$z(0) = D(0) - S(0) > 0$$

अब मान लीजिए किसी बहुत अधिक कीमत, $\hat{p}$, पर कंपनियाँ इस वस्तु के उत्पादन को लाभकारी पाती हैं परंतु इस कीमत को ग्राहक बहुत अधिक पाते हैं। अतः, इस कीमत पर आपूर्ति, मांग से अधिक हो जाएगी। अर्थात् इस कीमत पर हम पाते है कि

$$z(\hat{p}) = D(\hat{p}) - S(\hat{p}) < 0.$$

अब ध्यान दें कि किस प्रकार हम यहाँ मध्यवर्ती–मान प्रमेयका उपयोग करते हैं। यदि मांग और आपूर्ति फलन, कीमतों के इस अंतराल $[0,\hat{p}]$ पर संतत हैं, तो $z(p)$ भी इस अंतराल $[0,\hat{p}]$ पर संतत होगा क्योंकि दो संतत फलनों के योग अथवा अंतर से प्राप्त फलन भी एक संतत फलन होता है। अब, मध्यवर्ती–मान प्रमेय के अनुसार $z(0)$ और $z(\hat{p})$ के बीच का कोई भी मान, 0 और $\hat{p}$ के बीच किसी न किसी मान p पर प्राप्त किया जा सकता है। यहाँ क्योंकि $z(0) > 0$ तथा $z(\hat{p}) < 0$ है, तो हमें 0 और $\hat{p}$ के मध्य p का एक ऐसा मान, $p = c$ अवश्य मिलेगा जिस के लिए $z(c) = 0$ होगा। परंतु परिभाषा के अनुसार यह कीमत एक संतुलन कीमत है। अर्थात् $p^* = c$ है। अतः, हमने एक संतुलन कीमत सुनिश्चित कर ली है।

ऊपर की गई चर्चा को हम इस प्रकार सारबद्ध कर सकते हैं : यदि मांग एवं पूर्ति फलन संत हैं, तो अतिरिक्त मांग फलन भी संतत होगा। साथ ही इस स्थिति में नीचे दिए दोनों प्रतिबंध भी सत्य होंगे।

a) कीमत 0 पर मांग 0 से अधिक हो, तथा

b) कोई ऐसी 0 से बड़ी कीमत हो जिस पर आपूर्ति, मांग से अधिक हो जाए, अर्थात् अतिरिक्त मांग फलन शून्य से छोटा हो जाएं।

तो, हमें एक ऐसी कीमत, जो कि 0 से अधिक हो, प्राप्त हो जाएगी जिस पर अतिरिक्त मांग शून्य हो, अर्थात् हमें एक संतुलन कीमत प्राप्त हो जाएगी। स्वभाविक रूप से, यह तभी सत्य होगा यदि अतिरिक्त मांग फलन संतत होगा।

बोध प्रश्न 3

1) मध्यवर्ती–मान प्रमेय की व्याख्या कीजिए।

....

....

....

2) नीचे दो बाज़ार मांग और आपूर्ति फलन दिए है :

$D(p) = 50 - 2p; \qquad S(p) = -10 + p$

इस बाज़ार के लिए संतुलन कीमत (p^*) तथा संतुलन मात्रा ज्ञात कीजिए और दर्शाइए कि ये मांग एवं आपूर्ति फलन एक धनात्मक संतुलन कीमत के अस्तित्व के लिए पर्याप्त प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हैं।

....

....

8.6 सार-संक्षेप

इस इकाई में हमने सीमाओं पर केंद्रित पिछली इकाई में की गई चर्चा को आगे बढ़ाया है। हमने देखा कि कोई फलन संतत होता है यदि उसके आलेख में कोई विच्छिति या फिर प्लुति न हो। औपचारिक रूप से, एक फलन $f(x)$ किसी बिंदु $x=a$ पर संतत कहलाता है यदि $x=a$ पर $f(x)$ की सीमा का अस्तित्व हो तथा इस सीमा का मान $f(a)$ के बराबर हो। किसी फलन की सीमा तथा उसका सांतत्य ज्ञात करने के लिए हम संख्यात्मक अथवा बीजगणितीय विधियों का प्रयोग कर सकते हैं।

इस इकाई में संतत फलनों की विशेषताओं तथा गुणधर्मों की विस्तार से चर्चा की गई। किसी फलन के अवकलनीय होने के लिए उसके संतत होने की अनिवार्यता पर प्रकाश डाला गया। अगली दो इकाईयों में हम अवकलनीय फलनों के बार में विस्तार से पढ़ेंगे। इस इकाई में हमने सांतत्य की संकल्पना को औपचारिक तथा अनौपचारिक दोनों प्रकार से समझा। इसके पश्चात् इकाई में असांतत्य की अवधारणा पर विचार किया गया और इसके विभिन्न प्रकारों पर प्रकाश डाला गया। अर्थशास्त्र में संतत और असंतत फलनों के कुछ अनुप्रयोगों की भी चर्चा की गई। यद्यपि अर्थशास्त्र में फलनों को संतत मान लिया जाता है ताकि सिद्धांतों को सरलता से समझा जा सके, तथापि हमने देखा कि हमें अर्थशास्त्र में अक्सर असंतत फलनों का प्रयोग भी करना पड़ता है। अंत में इस इकाई में हमने संतत फलनों से संबंधित एक महत्वपूर्ण प्रमेय, मध्यवर्ती–मान प्रमेय, की व्याख्या की और इसके अनुप्रयोग के रूप में संतुलन विश्लेषण पर चर्चा की।

8.7 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

बोध प्रश्न 1

1) $f(x)$ बिन्दु $x=1$ पर संतत है

2) अनुच्छेद 8.2 पढ़े और उत्तर लिखें

3) (i) $-\frac{1}{3}$; (ii) ∞

4) $$lim_{x\to -1}\frac{(x^3+1)(x-1)}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to -1}\frac{(x^3+1)(x-1)}{x^2+x+2x+2}$$
$$= \lim_{x\to -1}\frac{(x^3+1)(x-1)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2+1-x)(x-1)}{(x+2)(x+1)}$$
$$= \frac{[(-1)^2+1+1](-2)}{1} = -6$$

बोध प्रश्न 2

1) फलन $x=3$ पर असंतत है क्योंकि $\lim_{x\to 3} f(x) \neq f(3)$

2) फलन $x=0$ पर असंतत है

3) अनुच्छेद 8.3 देखें और उत्तर लिखें।

4) अनुच्छेद 8.3 देखें और उत्तर लिखें।

बोध प्रश्न 3

1) अनुच्छेद 8.5 पढ़ें और उत्तर लिखें।

2) $q^* = 10; p^* = 20$