इकाई 6 अनुक्रम तथा श्रेणियाँ*

संरचना

6.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात् आप निम्नलिखित संकल्पनाओं से अवगत हो जाएंगे:

- एक अनुक्रम की परिभाषा;
- अनुक्रम और श्रेणी में संबंध;
- समांतर तथा गुणोत्तर अनुक्रम;
- किसी अनुक्रम के अभिसरण की संकल्पना;
- किसी अनुक्रम की सीमा की आधारभूत संकल्पना; और
- अनुक्रमों और श्रेणियों के अर्थशास्त्र में अनुप्रयोग।

6.1 विषय-प्रवेश

स्मरण करें कि इकाई 2 में हमने फलन की अवधारणा के बारे में पढ़ा था। हम जानते है कि प्रत्येक फलन का एक प्रांत तथा एक सहप्रांत होता है आईए अब हम एक ऐसे फलन पर विचार करें जिसका प्रांत प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय हो। इस प्रकार का

*श्री सौगतो सेन

फलन अपने प्रांत के प्रत्येक अवयव (अर्थात् प्रत्येक प्राकृतिक संख्या से) को अपने सहप्रांत के एक अवयव से संबद्ध करवाएगा। ऐसे फलन को हम एक अनुक्रम कहते हैं। अनुक्रम का सामान्य अर्थ है पहले यह, फिर यह, उसके पश्चात् यह इत्यादि। किसी वर्ष के महीने अनुक्रम कहलाते हैं। इसी प्रकार सप्ताह के दिन भी एक अनक्रम बनाते है। अतः किसी अनुक्रम के अवयवों सदस्यों को हम पहला सदस्य, दूसरा सदस्य, तीसरा सदस्य, ... के रूप में क्रमबद्ध कर सकते हैं।

आप सोच रहे होंगे कि इस प्रकार के फलनों का अर्थात् अनुक्रमों का ऐसा क्या विशेष महत्व है कि एक पूरी इकाई उन पर केंद्रित हो। पाठकों को यह जानकर आश्चर्य होगा कि इस साधारण सी दिखने वाली संकल्पना से हमें गणित की अनेक महत्त्वपूर्ण अवधारणाओं को विकसित करने में मदद मिलती है जिनके अर्थशास्त्र में महत्त्वपूर्ण अनुप्रयोग है। इस इकाई में अनुक्रमों के साथ-साथ श्रेणी जैसी महत्त्वपूर्ण संकल्पना की चर्चा भी की गई है। हम कुछ विशिष्ट प्रकार की श्रेणियों के बारे में भी जानकारी प्राप्त करेंगे। अनुक्रमों एवं श्रेणियों के गुणधर्मों की चर्चा भी इस इकाई में की गई है। कोई अनुक्रम कब और कैसे अभिसृत होता है, इसकी जानकारी भी हम प्राप्त करेंगे। इसके अतिरिक्त सीमा की महत्त्वपूर्ण संकल्पना के बारे में भी इस इकाई में संकेत किया गया है। क्योंकि सीमा की संकल्पना अत्यंत महत्त्वपूर्ण है, अगली पूरी इकाई इसी पर केंद्रित की गई है। सीमा अवकलन गणित का आधार है जिसका अर्थशास्त्रीय विश्लेषण में बहुत बड़ा योगदान है।

इस इकाई का गठन इस प्रकार किया गया है : अगले अनुच्छेद में अनुक्रम की संकल्पना की व्याख्या विस्तारपूर्वक की गई है। इसमें अनुक्रमों के अर्थशास्त्र में संभव अनुप्रयोगों के बारे में भी संकेत किया गया है। हमने अनुक्रम को एक फलन के रूप में प्रस्तुत किया है तथा इसकी सहज तथा औपचारिक दोनों परिभाषाएं दी हैं। इससे अगले अनुच्छेद में एक श्रेणी की संकल्पना की चर्चा की गई है। उसके पश्चात् इस इकाई में श्रेढ़ियों की चर्चा की गई है जो विशेष प्रकार की श्रेणियाँ है जिनमें विभिन्न पद सतत् रूप से बढ़ते अथवा कम होते है। इस अनुच्छेद में हम दो महत्त्वपूर्ण श्रेढ़ियों : समांतर श्रेढ़ी तथा गुणोत्तर श्रेढ़ी, के बारे में जानकारी प्राप्त करेंगे। तत्पश्चात् इस इकाई में किसी अनुक्रम के अभिसरण तथा अपसरण की संकल्पना की विस्तृत चर्चा की गई है। अभिसारी अनुक्रम की अवधारणा के साथ ही, इस इकाई में सीमा की संकल्पना की चर्चा भी प्रारंभ की गई है। अंत में, इस इकाई में अर्थशास्त्र के क्षेत्र में अनुक्रम और श्रेणियों के अनुप्रयोगों की चर्चा की गई है।

6.2 अनुक्रम [Sequences]

हम प्रायः इस प्रकार के वाक्यांश सुनते हैं : ये चीजे घटनाएं एक अनुक्रम में पाई जाएंगी/ घटित होंगी या 'पत्तों का एक अनुक्रम'। अनुक्रम का अर्थ क्या है? एक अनुक्रम और कुछ नहीं केवल संख्याओं का एक उत्तरवर्तन/अनुक्रम है। उदाहरण के लिए 2,4,6,8,......................... एक सम संख्याओं का अनुक्रम है। इसी प्रकार 1,4,9,16,........ .... प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का अनुक्रम है।

एक अनुक्रम की औपचारिक परिभाषा इस प्रकार है : 'एक अनुक्रम एक ऐसे फलन को कहते हैं जिसका प्रांत प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय हों। आईए इस कथन का अर्थ समझने का प्रयास करें। इसका सीधा-सीधा अर्थ यह है कि यदि हम किसी अनुक्रम के

उत्तरोत्तर पदों को क्रमबद्ध रूप में देखें/लिखें तो हम उन्हें पहला पद, दूसरा पद, तीसरा पद के रूप में इंगित कर सकते हैं। अर्थात् हम पहले पद से पूर्णांक +1, दूसरे पद से पूर्णांक +2, तीसरे पद से पूर्णांक +3 संबद्ध करते हुई इसी क्रम में आगे बढ़ सकते हैं। उदाहरण के लिए, सम संख्याओं के अनुक्रम 2,4,6,8,.................. में हमें पहले पद 2 से संख्या +1 संबद्ध करते हैं, दूसरे पद 4 से संख्या +2 तथा इसी क्रम में प्रत्येक पद से एक प्राकृतिक संख्या संबद्ध करते हुए बढ़ते हैं। इसी प्रकार, धनात्मक पूर्णांकों के घनों के अनुक्रम में हमें पहले पद 1 से पूर्णांक +1 संबद्ध करते हैं, दूसरे पद 8 से पूर्णांक +2, तीसरे पद 27 से पूर्णांक +3 इत्यादि।

गणित की भाषा में एक अनुक्रम को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता हैः

यदि प्रत्येक प्राकृतिक संख्या $n \in$N, जहाँ N प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय को निरूपित करता है, के लिए एक वास्तविक संख्या a_n नियत की जाए, तो $\{a_n\} = a_1, a_2, ..., a_n, ...$ एक अनुक्रम कहलाता है। अनुक्रम के सदस्य $a_1, a_2, a_3, ...$ इत्यादि अनुक्रम के पद कहलाते है। a_n को अनुक्रम a_1, a_2, $a_{n,....}$ का n वाँ पद कहते हैं।

अनुक्रम अर्थशास्त्रीय विश्लेषण में उपयोगी सिद्ध होते हैं, विशेषकर उन स्थितियों में जहाँ घटनाएं समय के साथ क्रमिक रूप में घटित होती हैं। ऐसी चरों की राशियाँ या परिमाण जो विभिन्न समय अंतरालों पर निर्भर हों, अनुक्रमों की सहायता से सरलतापूर्वक व्यक्त की जा सकती हैं। उदाहरण के लिए, भारत में 10 साल के समय अंतराल में गेहूँ के वार्षिक उत्पादन के आंकड़े एक (10 पदों वाले) अनुक्रम से व्यक्त किए जा सकते हैं या मान लीजिए, हमें वर्ष 2000 से 2008 का अंतराल दिया है। मान लीजिए हमें इन 9 वर्षों के लिए भारत का सकल राष्ट्रीय उत्पाद (GNP) ज्ञात है। इसे एक अनुक्रम के 9 पदों से व्यक्त किया जा सकता है। यदि हम पहले वर्ष को 1 से व्यक्त करें तो अंतिम वर्ष को 9 से व्यक्त किया जाएगा। मान लीजिए हम सूचकांक वर्ष को t से तथा सकल राष्ट्रीय उत्पाद (GNP)को Y से व्यक्त करते हैं। मान लीजिए वर्ष t के सकल राष्ट्रीय उत्पाद (GNP) Y_t से किया जाता है। अतः, वर्ष 2000 के GNP को Y_1 से तथा वर्ष 2008 के GNP को Y_9 से व्यक्त किया जाएगा। इसे व्यापक रूप में समझने के लिए, मान लीजिए हमें एक चर x दिया है। मान लीजिए पहली सीमा-अवधि में (या पहले समय बिंदु पर) इसका मान x है। मान लीजिए समय को सूचकांक t से व्यक्त किया जाए और कुल T समय-अवधियाँ (समय बिंदु) दिए हों, तो हमें $x_1, x_2, \ldots x_t, \ldots, x_T$. अनुक्रम प्राप्त होगा। एक अनुक्रम जिसका पहला और अंतिम पद दिया हो, सांकेतिक रूप में $\{x_t\}_1^T$ से व्यक्त किया जा सकता है। यहाँ धनुकोष्ठक के बाहर लिखे 1 और T यह दर्शाते हैं कि अनुक्रम का पहला पद 1 तथा अंतिम पद T है। अक्षर t को सामान्यतः समय (वर्ष) के सूचकांक के रूप में प्रयोग किया जाता है। कभी–कभी हम आवश्यकतानुसार प्रथम समय-अवधि को 0 (शून्य) भी लेते हैं। इस स्थिति में अनुक्रम को $\{x_t\}_0^T$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। यदि हम ऐसी किसी गत्यात्मक प्रक्रिया को निरूपित करना चाहें जो अनिश्चित काल जाती है, तो इसे $\{x_t\}_0^\infty$ के रूप में व्यक्त किया जाता है।

हमने इकाई 2 में देखा कि फलनों को क्रमित युग्मों के रूप में भी लिखा जा सकता है। आईए हम प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय N से वास्तविक संख्याओं के समुच्चय, R

तक एक फलन f पर विचार करें। इसे हम $f: N \to R$ के रूप में लिखते है। फलन f के मानों। प्रतिबिंबों का समूह, R का एक उपसमुच्चय है तथा यह क्रमित है। यदि हम R के इस क्रमित उपसमुच्चय को $S = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ के रूप में लिखे, तो S, R में एक अनुक्रम कहलाता है। हम यहाँ संख्याओं का एक ऐसा समुच्चय बन रहे हैं जो एक क्रम का पालन करता है। अर्थात् एक वास्तविक अनुक्रम, वास्तविक संख्याओं का एक जो प्राकृतिक संख्याओं के क्रमबद्ध होता है। अनुक्रम $\{2^n\}_{n\geq 1}$ पर विचार कीजिए। $n = 1, 2, ...$ रखने पर हमें अनुक्रम 2, 4, 8, 16,… प्राप्त होता है। यहाँ प्राप्त क्रम इस प्रकार है:

हम देख सकते है कि $2 \leq 4 \leq 8 \leq 16 \leq 32...$ इस अनुक्रम के प्रत्येक पद में संख्याएं निरंतर बढ़ रही हैं। इसी प्रकार ऐसे अनुक्रम भी हो सकते हैं जिनमे संख्याएं निरंतर कम होती जाएं जैसे कि $1 \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{3} \geq \frac{1}{4} \geq ...$, व्यापक रूप में हम देख सकते हैं कि कोई प्रदत्त अनुक्रम

i) निरंतर एक समान रूप से अथवा बढ़ती हुई दर पर बढ़ता या घटता रह सकता है जैसे कि

$S = \{0, -1, -3, -8, -15...\}$

या, $S = \{1, 5, 10, 17, 26, ...\}$

ii) निरंतर एक समान रूप से अथवा घटती हुई दर पर बढ़ता या घटता रह सकता है जैसे कि

$S = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}...\}$

या $S = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}...\}$

ऐसा हो सकता है कि उसके पद क्रमशः (बारी–बारी से)। प्रत्यावर्ती पद

iii) बढ़ते हुए अंतर के साथ घट या बढ़ रहे हो कि

$S = \{-1, 5, -7, 17, -31...\}$

iv) ऐसा हो सकता है कि उसके प्रत्यावर्ती पद समान हों जैसे कि

$S = \{-1, 1, -1, 1, -1...\}$

v) ऐसा हो सकता है कि उसके प्रत्यावर्ती पद घटते हुए अंतर के साथ घट–बढ़ रहे हों जैसे कि

$S = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}...\}$

अतः यह आवश्यकता नहीं है कि प्रत्येक अनुक्रम एकदिष्ट रूप से बढ़ते हुए या घटते हुए क्रम में होगा।

अब हम अनुक्रम से संबंधित कुछ मूलभूत परिभाषाओं की चर्चा करेंगे। सर्वप्रथम, एक अनुक्रम परिबद्ध अथवा अपरिबद्ध (परिसीमित अथवा अपरिसीमित) हो सकता है। एक अनुक्रम $\{a_n\}_{n \in N}$ परिबद्ध कहलाता है यदि एक ऐसी सीमित संख्या $K > 0$ विद्यमान हो कि किसी प्राकृतिक संख्या N के लिए निम्नलिखत कथन सत्य हो :

$a_n < K$ प्रत्येक $n > N$ के लिए (1)

ignou THE PEOPLE'S UNIVERSITY

और

$$a_n > -K \text{ प्रत्येक } n > N \text{ के लिए } (2)$$

यदि किसी अनुक्रम के लिए कथन (1) सत्य हो तो वह अनुक्रम उपरि–परिबद्ध कहलाता है।

यदि किसी अनुक्रम के लिए कथन (2) सत्य हो तो वह अनुक्रम अद्यः परिबद्ध कहलाता है।

कोई अनुक्रम परिबद्ध तभी कहलाता है जब वह ऊपर तथा नीचे दोनों ओर से परिबद्ध हो अर्थात् वह उपरि-परिबद्ध भी हो और अद्यःपरिबद्ध भी हो। दूसरे शब्दों में प्रत्येक परिबद्ध अनुक्रम का एक उपरि-परिबंध तथा अद्यःपरिबंध अवश्य होता है। हम आगे परिबंध का प्रयोग अनुक्रमों के अभिसरण की संकल्पना के अध्ययन में करेंगे।

6.3 श्रेणियाँ [Series]

एक श्रेणी की संकल्पना को समझने के लिए हमें अनुक्रम के साथ योग का संयोजन करने की आवश्यकता पड़ती है। योग मात्र दी हुए संख्याओं के मानों की जोड़ने की प्रक्रिया है। किसी चर के विभिन्न मानों के योग को व्यक्त करने के लिए ग्रीक वर्ण/अक्षर/चिह्न 'Σ' (सिग्मा) का प्रयोग सार्वत्रिक रूप से किया जाता है। स्मरण रहे कि हमारी रूचि किसी चर, मान लीजिए x के विभिन्न मानों जैसे कि x_1, x_2, x_3, ... इत्यादि का योग करने में है न कि विभिन्न चरों के योग में जैसे कि $x\,y,z$ इत्यादि। उदाहरण के लिए, यदि किसी फर्म का किसी वस्तु का कुल उत्पादन अनेक यंत्रों/कारखानों के उत्पादनों के योग द्वारा प्राप्त किया जा सकता है।

योग को समझने के लिए, आईए एक उदाहरण लें। मान लीजिए x वार्षिक आय को निरूपित करता है तथा पादांकित चिह्न $x_1, x_2, \ldots x_T$ क्रमशः वर्ष 1, 2,..., T, में आय को निरूपित करते हैं। इस स्थिति में सभी T वर्षों की कुल संयोजित आय को

$$\sum_{t=1}^{T} x_t = x_1 + x_2 + \ldots + x_T \,.$$

से व्यक्त किया जाएगा।

योग 'Σ' के कुछ आधारभूत नियम इस प्रकार हैं

1) $\sum_{t=1}^{T} k = kT$,जहाँ k एक अचर है। किसी अचर k का T बार योग, k और T के गुणनफल के बराबर होता है।

2) $\sum_{t=1}^{T} kx_t = k\sum_{t=1}^{T} x_t$ एक चर और एक अचर के गुणनफल का योगफल, चर के (विभिन्न मानों के) योगफल तथा अचर के गुणनफल के बराबर होता है।

3) $\sum_{t=1}^{T} (x_t + y_t) = \sum_{t=1}^{T} x_t + \sum_{t=1}^{T} y_t$.दो चरों के योग के मानों का योगफल उन चरों के मानों के योगफलों के योगफल के बराबर होता है। असतत् गत्यात्मक प्रक्रियाओं तथा असतत् गत्यात्मक इष्टतमीकरण (optimisation) को व्यक्त करने में योग की अवधारणा अत्यंत उपयोगी सिद्ध होती है।

एक श्रेणी किसी दिए हुए अनुक्रम के पहले n पदों से प्राप्त होती हैं। अतः, यदि $\{a_t\} = a_1, a_2, a_3, \ldots$ एक अनुक्रम है, तो $S_n = \sum_{t=1}^{n} a_t$ एक श्रेणी कहलाती है। अब हम दो विशेष प्रकार की श्रेणियों का वर्णन करेंगे परंतु उससे पूर्व हम उनके संगत दो विशेष प्रकार के अनुक्रमों की चर्चा करेंगे। अनुक्रमों के ये प्रकार है : समांतर अनुक्रम तथा गुणोत्तर अनुक्रम। समांतर अनुक्रम एक ऐसा अनुक्रम होता है जिसके प्रत्येक दो क्रमिक पदों का अंतर समान होता है, अर्थात् प्रत्येक $n \in \mathrm{N}$ के लिए $a_{n+1} - a_n = d$, जहाँ d एक अचर है और a_n अनुक्रम के nवें पद की व्यक्त करता है।

6.4 श्रेढ़ियाँ [PROGRESSIONS]

एक श्रेढ़ी एक ऐसे श्रेणी अनुक्रम को कहते हैं जिसके पद एकदिष्ट रूप से बढ़ते हुए अथवा घटते हुए क्रम में हों। क्योंकि एक श्रेणी और कुछ नहीं बल्कि एक अनुक्रम के पदों का योग होती है, इसलिए श्रेढ़ी शब्द का प्रयोग अनुक्रम के लिए भी किया जाता है।

6.4.1 समांतर श्रेढ़ी [Arithmetic Progression]

एक समांतर श्रेढ़ी (जिसे संक्षेप में A.P.लिखा जाता है) सँख्याओं का एक ऐसा अनुक्रम है जिसमें प्रथम पद से प्रारंभ करके, आगे के सभी पद, पिछले पद में एक नियत संख्या को जोड़ कर प्राप्त किए जा सकते हैं। इस नियत संख्या को श्रेढ़ी का सार्वअंतर कहते हैं। उदाहरण के लिए अनुक्रम 4, 7, 10, 13,... एक ऐसी समांतर श्रेढ़ी है जिसमें सार्वअंतर 3 है। ध्यान दें कि यदि किसी समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद तथा सार्व अंतर ज्ञात हो तो वह श्रेढ़ी पूर्ण रूप से ज्ञात की जा सकती है। वास्तव में,

यदि

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$$

एक समांतर श्रेढ़ी है जिसका प्रथम पद a तथा सार्वअंतर d के बरार दिया हो, तो परिभाषा के अनुसार

$$\begin{aligned}
a_1 &= a \\
a_2 &= a_1 + d = a + d \\
a_3 &= a_2 + d = (a+d) + d = a + 2d \\
a_4 &= a_3 + d = (a+2d) + d = a + 3d \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
a_n &= a_{n-1} + d = a + (n-2)\,d + d = a + (n-1)d
\end{aligned}$$

अतः, हम देख सकते हैं कि प्रथम पद a तथा सार्वअंतर d वाली किसी समांतर श्रेढ़ी का nवाँ पद सूत्र

$$a_n = a + (n-1)d$$

से प्राप्त किया जा सकता है।

इसी प्रकार, यदि इस श्रेढ़ी के प्रथम n पदो के योग को हम S_n से निरूपित करें, तो

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + ... + [a + (n-1)d] \qquad ...(1)$$

होगा।

(1) को उल्टे क्रम में लिखने पर हम प्राप्त करते हैं।

$$S_n = [a + (n-1)d] + [a + (n-2)d] + ... + a \qquad ...(2)$$

(1) और (2) को जोड़ने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$2S_n = [2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d] + ... + [2a + (n-1)d]$$

$$= n\,[2a + (n-1)\,d]$$

$$\therefore \qquad S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)\,d]$$

Or

$$= \frac{n}{2}[a + a + (n-1)\,d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[a + a_n]$$

अतः उसके पहले n पदों का योग सूत्र

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)\,d] = \frac{n}{2}[a + a_n].$$

द्वारा प्राप्त होता है।

समांतर श्रेढ़ियों के महत्त्वपूर्ण सूत्र

यदि किसी समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a सार्व अंतर d है, तो

a) श्रेढ़ी का nवाँ पद होगा :

$$a_n = a + (n-1)d$$

b) श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योग होगा

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)\,d]$$

उदाहरण के लिए, मान लीजिए हम 5 साल के लिए 100रू का निवेश साधारण ब्याज पर 15% प्रति वर्ष की दर पर करते हैं। तो प्रत्येक वर्ष के अंत पर प्राप्त होने वाली राशि होगी

115, 130, 145, 160, 175

इसी प्रकार एक समांतर श्रेढ़ी बनती है।

उदाहरण 1 : एक समांतर श्रेढ़ी का तीसरा पद तथा ग्यारहवाँ पद क्रमशः 21 और 85 है। श्रेढ़ी के पहले पाँच पद लिखिए

हल : सूत्र $a_n = a + (n-1)d$, का प्रयोग करने पर हम प्राप्त करते है :

$a_3 = a + 2d = 21$ और $a_{11} = a + 10d = 85$

पहले समीकरण को दूसरे समीकरण में से घटाने पर हमें प्राप्त होता

$$8d = 64 \text{ or } d = 8$$

d के इस मान को पहले समीकरण में रखने पर हम पाते हैं कि $a + 16 = 21$ अर्थात् $a = 5$ है।

अतः दी हुई समांतर श्रेढ़ी के पहले पाँच पद

5, 13, 21, 29, 37, ... हैं।

उदाहरण 2 : X ने 24000 रु उधार लिए तथा उसे 2000 रू प्रति माह की 12 किश्तों में तथा शेष मूलधन पर 1.5% ब्याज दर से चुकाने का निर्णय लिया।

X द्वारा दी जाने वाली 10वीं किश्त की राशि क्या होगी?

हल : पहली किश्त = Rs. 2000 + (0.015) (Rs 24000) = Rs. 2360

दूसरी किश्त = Rs. 2000 + (0.015) (Rs 22000) = Rs. 2330

तीसरी किश्त = Rs. 2000 + (0.015) (Rs 20000) = Rs. 2300

हम पाते हैं कि किश्तों में दी जाने वाली राशि एक समांतर श्रेढ़ी बनाती है जिसतें प्रथम पद a = 2360रू तथा सार्वअंतर (d) = 30रू. है।

अतः,

10वीं किश्त = श्रेढ़ी का 10वाँ पद $= a + (10-1)\, d$

$$= \text{Rs } 2360 + 9(-\text{Rs } 30) = \text{Rs } 2090.$$

उदाहरण 3 : एक बिजली का सामान बनाने वाली कंपनी XYZ के पहले साल की बिक्री 2,00,000 रू थी। यदि उसके पश्चात् प्रतिवर्ष कंपनी की बिक्री में 30000 रू की वृद्धि हुई तो कंपनी की 5वें वर्ष की बिक्री ज्ञात कीजिए। साथ ही, पहले पाँच वर्षें में कंपनी की कुल बिक्री भी ज्ञात कीजिए।

हल : कंपनी XYZ की वार्षिक बिक्री एक समांतर श्रेढ़ी बनाती है जिसका प्रथम पद a = 2,00,000 तथा सार्व अंतर d = 30,000 है। अतः, पाँचवें वर्ष में होने वाली बिक्री सूत्र $a_n = a + (n-1)d$ में

$n = 5$ रखकर प्राप्त की जा सकती है। अतः

$a_5 = 2,00,000 + (5-1)30,000 = \text{Rs } 3,20,000.$

इसी प्रकार की प्रथम पाँच वर्षों में होने वाली बिक्री सूत्र $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ में

$n = 5$ रखकर प्राप्त की जा सकती है। अतः

$$S_5 = \frac{5}{2}[2(2,00,000) + (5-1)30,000]$$

$$= \text{Rs } 13,00,000.$$

उदाहरण 4 : माना लीजिए X, 32,500 का एक ऋण पहले महीने में 200रू देकर तथा उसके पश्चात् प्रत्येक माह 150रू बढ़ाकर चुकाता है। उसे इस ऋण को चुकाने में कितना समय लगेगा?

हल : क्योंकि X अपनी मासिक किश्त 150रू की नियत राशि से बढ़ाता है, अतः यहाँ d = 150 होगा। साथ ही पहली किश्त a = 200 रू. दी हुई है। इस प्रकार हमें एक समांतर श्रेढ़ी प्राप्त होती है। यदि वह पूरी राशि

मासिक किश्तों में चुकाता है तो हम पाते हैं कि

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)\,d]$$

या $$32500 = \frac{n}{2}[2(200) + (n-1)150]$$

या $$65000 = n(250 + 150n)$$

या $$15n^2 + 25n - 6500 = 0$$

$\therefore$ $$n = \frac{-25 \pm \sqrt{(25)^2 - 4\times 15\times(-6500)}}{2\times 15}$$

$$= \frac{-25 \pm 625}{30} = 20 \text{ or } -21.66$$

क्योंकि n एक धनात्मक पूर्णांक है इसलिए n = −21.66 नही हो सकता। अतः, X को पूरी राशि चुकाने में 20 महीने लगेंगे।

6.4.2 गुणोत्तर श्रेढ़ी [Geometric Progression]

अब हम गुणोत्तर श्रेढ़ियों के बारे में बात करेंगे गुणोत्तर श्रेढ़ियाँ संयोजन तथा बट्टे (compounding and discounting) की संकल्पनाओं को समझने में हमारी सहायता करती हैं। इन संकल्पनाओं के बारे मे हम अगले अनुच्छेद में पढ़ेंगे। एक गुणोत्तर श्रेढ़ी (जिस हम संक्षेप में G.P.लिखते हैं) संख्याओं का एक ऐसा अनुक्रम है जिसके प्रत्येक दो क्रमिक पदों में एक समान अनुपात होता है जिसे हम G.P.का सार्वअनुपात कहते हैं। दूसरे शब्दों में, एक G.P. के प्रथम पद के पश्चात् प्रत्येक पद पिछले पद को एक अचर r से गुणा करके प्राप्त किया जा सकता है। यदि हम किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद और सार्व अनुपात ज्ञात हो, तो इस गुणोत्तर श्रेढ़ी को पूर्ण रूप से निर्धारित किया जा सकता है। अतः, यदि किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद a तथा सार्व अंतर r है तो श्रेढ़ी के विभिन्न पद इस प्रकार होंगे :

$$a_1 = a$$
$$a_2 = a_1 r = ar$$
$$a_3 = a_2 r = ar(r) = ar^2$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$a_n = a_{n-1} r = ar^{n-2}(r) = ar^{n-1}$$

अतः, एक ऐसा अनुक्रम, जिसमें प्रत्येक दो क्रमिक पदों का अनुपात समान (तथा शून्येत्तर) हो, एक गुणोत्तर अनुक्रम कहलाता है अर्थात् प्रत्येक $n \in N$ के लिए,

$\frac{an+1}{an} = r, r \neq 0$ n पदों $a, ar, ar^2, ar^3, ..., ar^{n-1}$ के ऐसे अनुक्रम में, प्रत्येक पद पिछले पद को अचर r से गुणा करके प्राप्त किया जा सकता है। इस गुणोत्तर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योग, S_n इस प्रकार लिखा जा सकता है,

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-2} + ar^{n-1} \qquad ...(3)$$

इस योग को हम एक r सार्व अनुपात वाली गुणोत्तर श्रेढ़ी कहते हैं। इस योग का सूत्र ज्ञात करने के लिए हम ऊपर दिए गए समीकरण (3) को r से गुणा करते हैं।

इस प्रकार हमें प्राप्त होता हैं

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1} + ar^n \qquad ...(4)$$

समीकरण (4) को समीकरण (3) में से घटाने पर हम पाते हैं

$$S_n - rS_n = a - ar^n \qquad ...(5)$$

क्योंकि शेष सभी पद रद्द हो जाते हैं। यदि $r = 1$ हो, तो समीकरण (3) से हम पाते हैं कि $S_n = an$ होगा।

यदि $r \neq 1$ हो, तो समीकरण (4) से हम पाते हैं कि

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r} \qquad (5)$$

अतः, हम एक परिमित गुणोत्तर श्रेढ़ी के योग का सूत्र इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} = a\frac{1 - r^n}{1 - r} \qquad ...(6)$$

यदि $r = 1$ हो, तो समीकरण (3) से हम पाते हैं कि

$$S_n = a + a + a + ... + a = na$$

परंतु यदि गुणोत्तर श्रेणी अपरिमित हो अर्थात् यदि n अनंत की ओर जाए $(n \to \infty)$ तो क्या होगा? इस स्थिति में समीकरण (5) का पद r^n, 0 की ओर जाएगा यदि $-1 < r < 1$ हो अर्थात् यदि $|r| < 1$ हो। अतः, इस स्थिति में प्रथम n पदों का योग S_n, $\frac{a}{1-r}$ की ओर जाएगा। लेकिन यदि $r > 1$ या $r \leq -1$ है तो r^n किसी सीमा की ओर नहीं जाएगा।

गुणोत्तर श्रेढ़ियों के महत्त्वपूर्ण सूत्र

यदि किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद a तथा सार्वअनुपात r है, तो

a) उसका nवाँ पद होगा :

$$a_n = ar^{n-1}$$

b) उसके प्रथम n पदों का योग (S_n) होगा :

यदि $r \neq 1$ है, $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$;

यदि $r = 1$ है, तो na

उदाहरण 5 : एक गुणोत्तर श्रेढ़ी का तीसरा पद 16 तथा सातवां पद 1 है। श्रेढ़ी का 10वां पद ज्ञात कीजिए।

हल : सूत्र $a_n = ar^{n-1}$, का प्रयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$a_3 = ar^2 = 16 \qquad \ldots(6)$$

और
$$a_7 = ar^6 = 1 \qquad \ldots(7)$$

समीकरण (7) को समीकरण (6) से भाग करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{ar^6}{ar^2} = \frac{1}{16}$$

इस प्रकार हम प्राप्त करते हैं कि $r^4 = 1/16$ या $r = 1/2$ है।

अनुपात r के इस मान को $a_3 \equiv a\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 16$ में रखने पर हमें प्राप्त होता है या $a =$ 64

अंततः, $a = 64$, $r = 1/2$, और $n = 10$ से हम पाते है कि

$$a_{10} = 64\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{8}$$

उदाहरण 6 : एक भूमि विकास कंपनी XYZ की प्रारंभ होने के पहले माह की बिक्री 10 लाख रूपये है। यदि उसके पश्चात् प्रत्येक माह में बिक्री 10% की दर से बढ़ती है तो कंपनी की पाँचवें मास की बिक्री तथा पहले पाँच महीनों में हुई कुल बिक्री ज्ञात कीजिए।

हल : कंपनी की मासिक बिक्री एक ऐसी गुणोत्तर श्रेढ़ी के अनुरूप है जिसका प्रथम पद $a = 1{,}000{,}000$ तथा सार्व अनुपात $r = 1.1$ है। पाँचवें मास की बिक्री सूत्र $a_n = ar^{n-1}$ में $n = 5$ रखकर प्राप्त की जा सकती हैं। अतः,

$$a_5 = 1{,}000{,}000(1.1)^4 = 1{,}464{,}100$$

कंपनी की प्रथम 5 महीने में होने वाली कुल बिक्री सूत्र $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ में $n = 5$ रखकर प्राप्त की जा सकती है। अतः,

$$S_5 = \frac{1{,}000{,}000[1-(1.1)^5]}{1-1.1} = \text{Rs } 6{,}105{,}100$$

उदाहरण 7 : X ने 1000रू एक बैंक में जमा करवाएं बैक जमा राशि पर 10% प्रति वर्ष की दर से चक्रवृद्धि ब्याज देता है जो कि तिमाही संयोजित होता है। 5 साल पश्चात् X की कुल जमा राशि कितनी हो जाएगी?

हल : X का मूलधन P = 1000 रू है। 10% वार्षिक ब्याज दर, 2.5% तिमाही ब्याज दर के समान है। अतः? प्रथम तिमाही के पश्चात् धनराशि होगी

$a_1 = 1000 + (1000)(0.025) = 1000(1.025)$

दूसरी तिमाही के अंत में राशि होगी :

a_2 = [प्रथम तिमाही के अंत में राशि] + [प्रथम तिमाही के अंत में राशि] (0.025)

$= a_1 + a_1(0.025) = a_1(1.025)$

$= 1000\,(1.025)(1.025) = 1000(1.025)^2$

तीसरी तिमाही के अंत में राशि होगी

a_3 = [दूसरी तिमाही के अंत में राशि] [ ] (0.025)

$= a_2 + a_2(0.025) = a_2(1.025)$

$= 1000\,(1.025)^2\,(1.025)$

$= 1000(1.025)^3$

इस प्रकार हम देखते हैं कि हमें निम्नलिखित गुणोत्तर श्रेढ़ी प्राप्त होती है :

$$1000(1.025),\ 1000(1.025)^2,\ 1000(1.025)^3,\ \ldots$$

जिसमें प्रथम पद $a = 1000(1.025)$ तथा सार्व अनुपात $r = 1.025$ है।

हम 5 वर्ष अर्थात् 20वीं तिमाही के अंत में राशि ज्ञात करना चाहते हैं। यह राशि हमारी श्रेढ़ी के 20वें पद के बराबर होगी। अतः,

$$a_{20} = ar^{20-1} = [1000(1.025)](1.025)^{19}$$

$$= 1000(1.025)^{20} \cong \text{Rs } 1638.62$$

बोध प्रश्न 1

1) प्रथम पद 15 तथा सार्वअंतर 3 वाली समांतर श्रेढ़ी का 15वां पद ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

....

2) एक फर्म प्रथम वर्ष में 1500 टेलीविजनों का उत्पादन करती है। 15वें वर्ष के अंत तक कंपनी ने कुल 8300 टेलीविज़नों का उत्पादन किया।

   i) ज्ञात कीजिए कि कंपनी के उत्पादन में प्रतिवर्ष कितने टेलीविज़नों की वृद्धि हुई?

   ii) प्रतिवर्ष वृद्धि के इस आंकलन के आधार पर, 10वें वर्ष में कितने टेलीविज़नों का उत्पादन हुआ होगा?

....

....

....

....

....

....

3) फर्नीचर बनाने वाली कंपनी XYZ की प्रारंभ होने के प्रथम मास में होने वाली बिक्री 1,50,000रू की थी। यदि प्रति माह बिक्री में 16000 रू. की वृद्धि दो, तो कंपनी की 7वें महीने में अनुमानित बिक्री तथा पहले सात महीनों में होने वाली कुल बिक्री ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

....

4) G.P. 4, 8, 16, 32, 64, … का 11वां पद तथा पहले 20 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

....

5) नीचे दी गई गुणोत्तर श्रेढ़ी (G.P.) का सार्व अनुपात ज्ञात कीजिए :

49, 7, 1, 1/7, 1/49, …

साथ ही, G. P. के पहले 10 पदों का योग भी ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

6) एक देश की वर्ष 1950 में जनसंख्या 50 करोड़ थी। यदि जनसंख्या 2% की वार्षिक चक्रवृद्धि दर से बढ़ती है तो वर्ष 2000 में उस देश की अनुमानित जनसंख्या ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

....

6.5 अनुक्रमों का अभिसरण [Convergence of sequences]

6.5.1 अनुक्रमों का अभिसरण एवं अपसरण [Concept of convergence and Divergence of a sequence]

हम अनुक्रमों को उनके विशिष्ट गुणों के आधार पर विभिन्न वर्गों में बाँट सकते हैं :

i) ∞ या $-\infty$ की ओर अग्रसर अनुक्रम

ii) किसी सीमित संख्या (धनात्मक, ऋणात्मक अथवा शून्य) की ओर अग्रसर अनुक्रम

iii) किसी भी मान की ओर अग्रसर न होने वाले अनुक्रम

अतः जब भी हम किसी अनुक्रम $\{a_n\}$ पर विचार करते हैं तो हमें मूल रूप से यह जानने की आवश्यकता पड़ती है कि उसके अनुवर्ती पद, n का मान बढ़ने पर, एक दूसरे के समीप-दर-समीप आते हैं अथवा नहीं। हम जानते हैं कि एक अनुक्रम एक ऐसा फलन होता है जो प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय N को किसी समुच्चय X के अवयवों पर ले जाता है। यह समुच्चय X वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R हो सकता है या फिर इसका कोई उपसमुच्चय। अतः जब n बढ़ता है अर्थात् अनुक्रम के अनुवर्ती पदो के लिए हमें यह देखने की आवश्यकता पड़ती है कि (1) क्या प्रत्येक क्रमिक पद पिछले पद से बड़ा है (अर्थात् क्या अनुक्रम के पदों का मान एकदिष्ट रूप से बढ़ रहा है या प्रत्येक क्रमिक पद पिछले पद से छोटा है (अर्थात् क्या अनुक्रम पदों का मान एकदिष्ट रूप से घट रहा है) या कि इन दोनों में से कोई भी सिथिति नहीं है, (1) और (2) कि क्या अनुक्रम लगातार किसी निश्चित मान के समीप और समीप हो रहा है अथवा नहीं। यदि यह अनुक्रम एक निश्चित मान की ओर अग्रसर है तो हम कहते हैं कि यह अनुक्रम उस मान पर अभिसरित होता है।

अनुक्रम के अभिसरण की संकल्पना हमें अनुक्रम की सीमा की ओर ले जाती है। वास्तव में, किसी अनुक्रम के अभिसरण की संकल्पना को औपचारिक रूप से समझने के लिए हमें अनुक्रम की सीमा की संकल्पना को समझने की आवश्यकता होगी।

6.5.2 सीमाओं का प्राथमिक परिचय [An Elementary Introduction to Limits]

आईए हम किसी अनुक्रम की सीमा की संकल्पना को समझने का प्रयास करें।

मान लीजिए $\{x_n\}_{n\geq 1}$ संख्याओं का एक अनुक्रम है। यदि ये संख्याएं (अनुक्रम के पद) निरंतर किसी संख्या L के समीप और समीपतर होते जाएं तो हम कहते हैं कि $\{x_n\}$ एक अभिसारी अनुक्रम है इसकी सीमा L के बराबर है। इस तथ्य को हम इस प्रकार लिख सकते है :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L$$

या $$\underset{n\to\infty}{Lt}\, x_n = L$$

या $$x_n \to L$$

यहाँ $n\to\infty$ इस तथ्य को व्यक्त करता है कि n का मान निरंतर बढ़ता जा रहा है। निश्चित रूप से कभी भी ∞ नहीं होता। अपितु यह ∞ की ओर अग्रसर होता है। यदि कोई अनुक्रम अभिसारी नहीं होता, तो उसे अपसारी अनुक्रम कहते हैं।

अभी हमने यह देखा कि एक प्रदत्त दिया हुआ अनुक्रम अभिसारी होता है यदि कोई ऐसी संख्या L उपलब्ध हो कि n का मान बढ़ने पर संख्याएं (अनुक्रम के पद) x_n संख्या L के समीप और समीपतर होते जाएं। अर्थात्

i) हम चाहते हैं कि $x_n \approx L$ हो जाएं

ii) इसके लिए हमें चाहिए होगा कि शून्य से बड़ी, किसी भी छोटी से छोटी संख्या ε के लिए

$|x_n - L| < \varepsilon$, हो।

iii) कथन (ii) के सत्य होने के लिए, हमें एक संख्या $N\geq 1$ ऐसी प्राप्त होनी चाहिए कि प्रत्येक $n\geq N$ के लिए $|x_n - L|\leq \varepsilon$ हो।

बोध प्रश्न 2

1) किसी अनुक्रम के अभिसरण के लिए क्या आवश्यक है?

....

....

....

....

....

2) किसी अनुक्रम की सीमा से आप क्या समझते हैं?

....

....

....

....

....

6.6 अर्थशास्त्र में अनुक्रमों और श्रेणियों के अनुप्रयोग [Economic Applications of Sequences and Series]

6.6.1 साधारण एवं चक्रवृद्धि ब्याज [Simple and Compound Interest]

साधारण ब्याज : यदि किसी मूलधन पर किसी समय अवधि का ब्याज परिकलित करते हुए, मूलधन में पिछली समय अवधि का ब्याज न जोड़ा जाए तो इस प्रकार प्राप्त ब्याज को साधारण ब्याज कहते हैं।

यदि राशि P का निवेश 100% साधारण ब्याज दर किया जाएं तो n वर्षों के पश्चात् उपार्जित कुल राशि नीचे दिए गए सूत्र के अनुसार ज्ञात किया जा सकती है :

कुल उपार्जित राशि सूत्र (साधारण ब्याज)

$$A_n = P(1 + i.n)$$

सामान्यतः, आधुनिक व्यापार तथा व्यावसायिक स्थितियों में साधारण ब्याज का कोई विशेष महत्व नहीं है क्योंकि अधिकतर व्यवहारिक स्थितियों में सामान्यतः चक्रवृद्धि ब्याज का ही प्रयोग किया जाता है।

चक्रवृद्धि ब्याज : यदि किसी समय अवधि के ब्याज का परिकलन करते हुए पिछली समय अवधियों में प्राप्त ब्याज को भी मूलधन में जोड़ दिया जाएं तो इस प्रकार प्राप्त ब्याज को चक्रवृद्धि ब्याज कहते हैं।

उदाहरण के लिए, मान लीजिए 1000रू का निवेश 10% चक्रवृद्धि ब्याज की वार्षिक दर से किया गया। नीचे दी गई तालिका में प्रत्येक वर्ष के अंत में ब्याज तथा कुल राशि की स्थिति का विवरण दिया गया है :

वर्ष	राशि जिस पर ब्याज परिकलित किया जाना है	उपार्जित ब्याज	कुल उपार्जित राशि
1	Rs 1000	10% of Rs 1000 = Rs 100	Rs 1100
2	Rs 1100	10% of Rs 1100 = Rs 110	Rs 1210
3	Rs 1210	10% of Rs 1210 = Rs 121	Rs 1331
…	…	…	…
…	…	…	…
…	…	…	…

कुल उपार्जित राशि सूत्र (चक्रवृद्धि ब्याज)

$$A_n = P(1 + i)^n$$

जहाँ A_n = वर्षों के पश्चात् उपार्जित राशि

P = मूलधन

i = (अनुपातिक) वार्षिक ब्याज दर

n = वर्षों की संख्या

उदाहरण 8 : एक फर्म प्रत्येक वर्ष के प्रारंभ में एक ऐसी राशि का निवेश करने की योजना बनाती है जिससे पाँच वर्ष की समयावधि के पश्चात् 1,00,000 रू. की कुल राशि प्राप्त हो सके। यदि चक्रवृद्धि ब्याज की वार्षिक दर 14% हो तथा ब्याज प्रतिवर्ष संयोजित होता हो, तो प्रतिवर्ष निवेश की जाने वाली राशि ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए पाँच वर्ष तक, प्रत्येक वर्ष के प्रारंभ में B रूपयों का निवेश किया गया।

B रू का प्रथम निवेश पाँच वर्ष की अवधि समाप्त होने पर $B(1.14)^5$ हो जाता है, दूसरा निवेश इस समयावधि से अंत में $(1.14)^4$ हो जाता है, ... इत्यादि।

परंतु इन विभिन्न उपार्जित राशियों का योग 100000रू के बराबर होना चाहिए। अर्थात्

$$1,00,000 = B(1.14)^5 + B(1.14)^4 + \ldots + B(1.14)$$

$$= B[1.14 + (1.14)^2 + \ldots + (1.14)^5]$$

$$= B\left[\frac{1.14\{(1.14)^5 - 1\}}{1.14 - 1}\right] = B(7.5355)$$

$$1,00,000 = B(7.5355)$$

$$B = \frac{100,000}{7.5355} = \text{Rs. } 13270.52$$

उदाहरण 9: एक कार 80000रू. में खरीदी गई। यदि पहले तीन वर्षों के लिए मूल्यह्रास 5% प्रति वर्ष की दर से तथा अगले तीन वर्ष के लिए यह 10% प्रति वर्ष की दर से परिकलित किया जाता है, तो 6 वर्ष के पश्चात् कार का आर्थिक मान ज्ञात कीजिए।

i) पहले वर्ष में होने वाला मूल्यह्रास $= 80,000 \times \frac{5}{100}$

अतः, एक वर्ष के अंत में कार का घटा हुआ मूल्य

$$= 80,000 - \left(80,000 \times \frac{5}{100}\right)$$

$$= 80,000\left(1 - \frac{5}{100}\right)$$

ii) दूसरे वर्ष में होने वाला मूल्यह्रास

= (प्रथम वर्ष के अंत में ह्रासित मूल्य)×(दूसरे वर्ष में अवमूल्यन की दर)

$$= 80,000\left(1 - \frac{5}{100}\right)\left(\frac{5}{100}\right)$$

अतः, दूसरे वर्ष के अंत में कार का ह्रासित मूल्य

= (पहले वर्ष के अंत में ह्रासित मूल्य)

– (दूसरे वर्ष में मूल्यह्रास)

$$= 80,000\left(1 - \frac{5}{100}\right) - 80,000\left(1 - \frac{5}{100}\right)\left(\frac{5}{100}\right)$$

$$= 80,000\left(1 - \frac{5}{100}\right)\left(1 - \frac{5}{100}\right)$$

$$= 80{,}000\left(1 - \frac{5}{100}\right)^2$$

इसी प्रकार, तीसरे वर्ष के अंत में कार का ह्रासित मान

$$= 80{,}000\left(1 - \frac{5}{100}\right)^3$$

iii) चौथे वर्ष का मूल्यह्रास $= 80{,}000\left(1 - \frac{5}{100}\right)^3\left(\frac{10}{100}\right)$

अतः, चौथे वर्ष के अंत में कार का ह्रासित मान

= (तीसर वर्ष के अंत में ह्रासित मूल्य) – (चौथे वर्ष में मूल्यह्रास)

$$= 80{,}000\left(1 - \frac{5}{100}\right)^3 - 80{,}000\left(1 - \frac{5}{100}\right)^3\left(\frac{10}{100}\right)$$

इसी प्रकार परिकलन करते हुए हम पाते हैं कि, 6वर्ष के अंत में कार का ह्रासित मूल्य हो जाता है :

$$= 80{,}000\left(1 - \frac{5}{100}\right)^3\left(1-\frac{10}{100}\right)^3$$

$$\cong \text{Rs } 50224$$

6.6.2 संयोजन एवं बट्टा [Compounding and Discounting]

हम सामान्यतः, भविष्य की बजाय वर्तमान में उपभोग करने को वरीयता देते हैं। मनोवैज्ञानिक रूप से हमारे लिए आज एक रूपये की कीमत कल के एक रूपये की कीमत से अधिक है। मुद्रास्फीति के दौर में वास्तविकता भी यही है। निवेशक वर्तमान में उपभोग न करके निवेश केवल तभी करेंगे यदि भविष्य में उनकी निवेशित राशि के बढ़ने की संभावनाएं अधिक हो। क्योंकि हम धन का निवेश करके, ब्याज अर्जित करना प्रारंभ कर सकते हैं इसलिए आज के एक रूपये की कीमत कल के एक रूपये से अधिक है। निवेशक अपने धन का निवेश करते हैं और भविष्य में धन लाभ प्राप्त करते हैं। इसे 'नकदी प्रवाह' cash flow कहते हैं। यदि हमें धन प्राप्त होता है तो उसे नकदी अंतर्वाह कहते हैं और इसे धनात्मक नकदी प्रवाह समझा जाता है। यदि धन हमें देना पड़े तो उसे बहिर्वाह कहा जाता है और यह नकदी प्रवाह ऋणात्मक होता है। इस अनुच्छेद में हम संयोजन एवं बट्टे के बारे में चर्चा करेंगे परंतु इससे पहले कि हम संयोजन (compounding) की बात करें, हम एक बार पुनः साधारण ब्याज पर विचार करते है। यद्यपि साधारण ब्याज पर पीछे बात कर चुके हैं तो भी साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज के अंतर को और अधिक स्पष्ट करने के लिए यह आवश्यक है।

माना P मूलधन को या किसी व्यक्ति द्वारा बैंक से ऋण के रूप में ली गई राशि या निवेश की गई राशि को निरूपित करता है। माना ब्याज दर r है जिसे प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया गया है तथा t वह अवधि है जिसमें ऋण चुकाया जाना है या निवेश परिपक्व होता है। यदि राशि P का निवेश, $r\%$ प्रति वर्ष साधारण ब्याज दर से t वर्षों के लिए किया जाता है तो प्राप्त होने वाला ब्याज I_n होगा :

$$I_t = \text{p} \times \text{r} \times \text{t}$$

अतः, t वर्ष के अंत में प्राप्त होने वाली कुल राशि A मूलधन P तथा ब्याज I_n के योग के बराबर होगी :

$$A = P + I_t = P + Prt = P\,(1 + rt).$$

हम केवल एक नकदी प्रवाह से प्रारंभ करते हैं। मान लीजिए आपने वर्ष 2008 में 100 रूपये का निवेश किया। आपके निवेश का भविष्य मूल्य 100रू + 10 रू प्रतिवर्ष होगा तब तक के लिए जब तक के लिए आपने 10% की दर निवेश किया है। अतः, यदि आपने 100रू 4 वर्ष के लिए निवेशित किए, तो आपकी राशि 4 वर्ष के अंत में 140 रू हो जाएगी। व्यापक रूप में, यदि आप P रू का निवेश $100r\%$ प्रतिवर्ष की दर से t वर्ष के लिए करें तो आपको t वर्षों के पश्चात्

$$A = P + \mathrm{Pr}\,t = P(1 + rt)$$

के बराबर राशि प्राप्त होगी, यह हम देख चुके हैं। चक्रवृद्धि ब्याज में स्थिति अधिक रोचक/जटिल है। जब किसी निवेश में ब्याज चक्रवृद्धि होता है तो हमें अपने निवेश में ब्याज पर भी ब्याज मिलता है। दूसरे शब्दों में किसी भी समय अवधि में पिछली समय अवधियों में अर्जित ब्याज पर ब्याज दिया जाएगा। ऊपर दिए गए उदाहरण में, प्रथम वर्ष के अंत में राशि 100रू + 10रू (ब्याज = 100 का 10% = 10 रू.) = 110रू हो जाएगी। यह दूसरे वर्ष के प्रारंभ में मूलधन है। दूसरे वर्ष का ब्याज 110रू का 10% अर्थात् 11रू होगा। अतः, दूसरे वर्ष के अंत में राशि 110+ 11 रू. = 121 रू. हो जाएगी।

व्यापक रूप में, यदि राशि P का निवेश $100r\%$ चक्रवृद्धि ब्याज की दर पर t वर्ष के लिए किया जाएं तो t वर्षों के अंत में प्राप्त होने वाली कुल राशि होगी

$$A = P(1 + r)^t$$

साधारण एवं चक्रवृद्धि ब्याज द्वारा प्राप्त राशियों के सूत्रों में अंतर पर ध्यान दीजिए। साधारण ब्याज में कोष्ठक के अंदर का व्यंजक $1+rt$ है, अर्थात् r और t के गुणनफल में 1 जोड़ा गया है जबकि चक्रवृद्धि ब्याज द्वारा प्राप्त राशि के सूत्र में t एक गुणक के रूप में न होकर घातांक में उपस्थित है। यहाँ t, $(1+r)$ का घातांक है।

मान लीजिए

C_0 प्रारंभिक नकद प्रवाह या निवेश है

r ब्याज या प्रतिफल/लाभ की हुई दर है

t निवेश की अवधि है

C_t राशि C_0 का निवेश करने पर t वर्ष के पश्चात् प्राप्त होने वाली राशि है

तो $C_t = C_0\,(1 + r)^t$

यह संयोजन ज्ञात करने का सूत्र है, जो कि वर्तमान नकदी मूल्य को भविष्य नकदी मूल्य में परिवर्तित करता है। $(1 + r)^t$ भविष्य मूल्य संयोजन घटक कहलाता है और इसे $FVCF_{r,t}$ द्वारा निरूपित किया जाता है यहाँ r और t ऊपर परिभाषित किए गए चर है। अतः

$$C_t = C_0\,FVCF_{r,t}$$

अब हम इसकी विपरीत प्रक्रिया का अध्ययन करते हैं। अर्थात् हम यह ज्ञात करने का प्रयास करते हैं कि यदि किसी राशि का भविष्य नकदी प्रवाह दिया है, तो इसके संगत वर्तमान नकद प्रवाह का मान क्या होगा? इस प्रक्रिया को बट्टा (discounting) कहते हैं। हम एक ही अवधि वाली स्थिति से प्रारंभ करते हैं। भविष्य नकदी मान को वर्तमान मान में परिवर्तित करने के लिए हम बट्टे की प्रक्रिया का प्रयोग करेंगे। इसके लिए हमें केवल संयोजन समीकरण के पदों को निम्नलिखित रूप में पुनः व्यवस्थित करने की आवश्यकता है

$$C_0 = \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

अतः, बट्टा, संयोजन की विपरीत प्रक्रिया है। ऊपर प्राप्त समीकरण $C_0 = \frac{C_t}{(1+r)^t}$ में $\frac{1}{(1+r)^t}$ वर्तमान मूल्य बट्टा घटक कहलाता है तथा इसे $PVDF_{r,t}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। ध्यान दें कि बट्टा घटक, संयोजन घटक का व्युत्क्रम है।

अब तक हमने संयोजन तथा बट्टे का अध्ययन केवल एक नकदी प्रवाह की स्थिति में किया है। अनेक अर्थसंबंधी समस्याएं एक से अधिक नकदी प्रवाहों से संबंधित होती हैं। आईए हम बट्टे के संदर्भ में एक ऐसी स्थिति पर विचार करें। अनेक नकदी प्रवाहों वाली बट्टे की स्थिति सरल है : हम प्रत्येक व्यक्तिगत नकदी प्रवाह के लिए अलग–अलग वर्तमान मूल्य (PV) ज्ञात करके उनका योग करते हैं। व्यापक स्थिति में इसका सूत्र हम यहाँ दे रहे हैं। ध्यान रहे कि प्रतिवर्ष होने वाले विभिन्न नकदी प्रवाह असमान हो सकते हैं।

$$PV_0 = \frac{C_1}{(1+r)^1} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

हम किसी वार्षिकी (annuity) के वर्तमान मूल्य पर भी विचार करते हैं। एक वार्षिकी एक ऐसी नियत (अचर) राशि है तो प्रतिवर्ष प्राप्त होती है। मान लीजिए, P_0 एक ऐसी वार्षिकी का वर्तमान मूल्य है जो t वर्ष के पश्चात् प्रत्येक वर्ष के अंत में C रू देती हो। हम पाते हैं कि

$$P_0 = \frac{C}{(1+r)} + \frac{C}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{C}{(1+r)^t}$$

$$= C\left[\frac{1}{(1+r)^1} + \frac{1}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+r)^t}\right]$$

कोष्ठक [ ] में लिखें पदों का योग एक गुणोत्तर श्रेढ़ी के रूप में हैं। यह गुणोत्तर श्रेढ़ी r की दर पर t वर्ष के लिए वर्तमान मूल्य वार्षिकी घटक ($PVAF_{r,t}$) कहलाती है। इस अंकन पद्धति में इसे इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है

$$P_0 = C.PVAF_{r,t}$$

जहाँ C अचर भुगतान राशि है। वर्तमान मूल्य वार्षिकी घटक को सूत्र

$$PVAF_{r,t} = \frac{1 - \left[\frac{1}{(1+r)^t} \right]}{r}$$

से भी व्यक्त किया जा सकता है।

इसी प्रकार हम किसी वार्षिकी का भविष्य मूल्य ज्ञात करने के लिए भी सूत्र ज्ञात करते है। यह सूत्र है :

$$FVA_t = C(1+r)^{t-1} + C(1+r)^{t-2} + \ldots + C$$

$$= C\left[\frac{(1+r)^t - 1}{r}\right]$$

यह भी संभव है कि संयोजन और बट्टे में नकदी प्रवाह वर्ष में एक बार न होकर कई बार हो। मान लीजिए r ब्याज की दर तथा t वर्षों में समय अवधि को निरूपित करता है परंतु अब संयोजन वर्ष में एक बार न होकर m बार होता है।

ऐसी स्थिति में संयोजन सूत्र

$$C_t = C_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}$$

तथा बट्टा सूत्र

$$C_0 = \frac{C_t}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}}$$

प्राप्त होता है।

6.6.3 वर्तमान मूल्य [Present Value]

मान लीजिए कि धन को 10% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से निवेश किया जा सकता है जब कि ब्याज का संयोजन वार्षिक रूप से होता हो। तो100रू का निवेश एक वर्ष पश्चात् 110 रू हो जाएगा। इसी प्रकार वर्तमान के 100 रू. का मान दो वर्ष के पश्चात् के $100(1.1)^2 = 121$ रू के मान के बाराबर हैं इससे भविष्य में मिलने वाली किसी राशि के वर्तमान मान/मूल्य की अवधारणा का अर्थ स्पष्ट हो जाता है। इसे विधि पूर्वक व्यक्त करने के लिए हम देखते हैं कि यदि निवेश की वर्तमान दर 10% है, तो एक वर्ष पश्चात् मिलने वाले 110 रू का वर्तमान मूल्य $\frac{110}{1.1} = 100$ रू. है।

इसी प्रकार, दो वर्ष पश्चात् मिलने वाले 121 रू. का वर्तमान मूल्य $\frac{121}{1.1^2} = 100$रू है, इत्यादि। यहाँप्रयुक्त निवेश दर को बट्टा दर भी कहा जाता है नीचे हम वर्तमान मूल्य ज्ञात करने का व्यापक सूत्र दे रहे हैं तथा इसे एक उदाहरण द्वारा स्पष्ट भी कर रहे हैं।

वर्तमान मूल्य सूत्र

राशि A, का जो कि t वर्ष में प्राप्त होने वाली है, 100i% की बट्टा दर से वर्तमान मूल्य P निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त किया जा सकता है

$$P = \frac{A}{(1+i)^t}$$

जहाँ P = वर्तमान मूल्य है

A = वर्ष पश्चात् प्राप्त होने वाली राशि है

i = बट्टा दर (अनुपातिक रूप में) है

तथा t = वर्षों में समय अवधि है

उदाहरण 10 : एक फर्म ने एक वस्तु 8 वर्ष तक 20000 रू. प्रतिवर्ष भुगतान की योजना के अंतर्गत खरीदी। भुगतान प्रत्येक वर्ष के प्रारंभ में किए जाने हैं। 20% वार्षिक ब्याज दर से भुगतानों के नकदी प्रवाह का कुल वर्तमान मूल्य क्या है?

हल : पहले वर्ष के भुगतान का वर्तमान मूल्य = 20,000रू

दूसरे वर्ष के भुगतान का वर्तमान मूल्य = $\frac{20,000}{1.2}$ रू

तीसरे वर्ष के भुगतान का वर्तमान मूल्य = $\frac{20,000}{(1.2)^2}$ रू

… … … …

… … … …

… … … …

अंतिम वर्ष के भुगतान का वर्तमान मूल्य = $\frac{20,000}{(1.2)^7}$ रू

अतः भुगतान के कुल नकदी प्रवाह का वर्तमान मूल्य होगा

$$20,000\left\{1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{(1.2)^2} + ... + \frac{1}{(1.2)^7}\right\}$$

यह सार्व अनुपात $r = \frac{1}{1.2}$ वाली एक गुणोत्तर श्रेणी है और हमें इसके प्रथम 8 पदों का योग अथवा S_8

ज्ञात करना है

$$S_8 = \frac{a(1 - r^8)}{1 - r}$$

$$= 20,000\left\{\frac{1-\left(\frac{1}{1.2}\right)^8}{1-\frac{1}{1.2}}\right\}$$

$$= 1,20,000\left[1-\frac{1}{(1.2)^8}\right]$$

$$= 1,20,000\ (1 - 0.23)$$

$$= \text{Rs. } 92,400 \text{ लगभग}$$

निवल वर्तमान मूल्य, जिसे हम संक्षेप में NPV से व्यक्त करते हैं, किसी परियोजना से संबंधित सभी नकदी प्रवाहों के वर्तमान मूल्यों के योग के बराबर होता है। सभी नकदी प्रवाहों को, सामान्यतः, प्रतिवर्ष एक तालिका में सूचीबद्ध कर लिया जाता है जैसा कि नीचे उदाहरण में दर्शाया गया है।

उदाहरण 11 : एक ऐसी व्यापारिक परियोजना पर विचार किया जा रहा है जिसकी प्रारंभिक लागत 12000 रूपये है। इसमें आने वाले चार वर्षों में क्रमशः 8000रू, 12000रू, 10000 रू. तथा 6500 रू. का राजस्व/आय अपेक्षित है। यदि परियोजना में अगले चार वर्षों में होने वाली लागत क्रमशः 8500 रू. 3000 रू., 1500 रू. तथा 1500 रू. है और बट्टा दर 18.5% है, तो परियोजना का शुद्ध वर्तमान मूल्य अर्थात् NPV ज्ञात कीजिए।

हल :

वर्ष	अंतर्वाह नकदी प्रवाह (a)	बहिर्वाह नकदी प्रवाह (b)	(a)– (b)	18.5 की दर से बट्टा घटक	वर्तमान मूल्य
1	–	12000	(12000)	1.000 $\left(=\frac{1}{(1+0.185)^0}\right)$	(12000)
2	8000	8500	(500)	0.8439 $\left(=\frac{1}{(1+0.185)^1}\right)$	(421.95)
3	12000	3000	9000	0.7121	6408.90
4	10000	1500	8500	0.6010	5108.50
5	6500	1500	5000	0.5071	2535.50
				शुद्ध वर्तमान मूल्य	**1630.95**

6.6.4 सिंकिंग फंड (निक्षेप निधि) विधि [Sinking Fund for debt Amortization]

निक्षेप निधि एक ऐसी वार्षिकी होती है जिसका निवेश भविष्य में की गई वित्तीय प्रतिबद्धताओं को पूरा करने के लिए किया जाता है।

निक्षेप निधि का प्रयोग सामान्यतः निम्न उद्देश्यों के लिए किया जाता है :

क) ऋण चुकाने के लिए

ख) किसी विद्यमान/वर्तमान संपत्ति/परिसंपत्ति के पूर्ण रूप से मूल्यह्रास होने के पश्चात् नई संपत्ति/परिसंपत्ति के लिए पूँजी उपलब्ध करवाने के लिए

उदाहरण के लिए, यदि 25,000 रू. का ऋण तीन वर्ष के लिए 12% चक्रवृद्धि ब्याज पर लिया गया हो, तो तीसरे वर्ष के अंत में बकाया ऋण होगा : $25{,}000(1.12)^3$ रू = 35123.20 रू। यदि धन का निवेश 9.5% की दर पर किया जा सकता है, तो हम वार्षिकी A का मान ज्ञात करना चाहेंगे, जिसके निवेश से 3 वर्ष में 35,123.20 की राशि प्राप्त हो सके। A का मान निम्न समीकरण द्वारा ज्ञात किया जा सकता है :

$35{,}123.20$	$=$	A	$+$	$A(1.095)$	$+$	$A(1.095)^2$
शेष ऋण		तीसरा भुगतान (जो भुगतान तीसरे वर्ष के अंत में किया गया)		दूसरा भुगतान (जिसका निवेश 1 वर्ष के लिए किया गया)		पहला भुगतान (जिसका निवेश 2 वर्ष के लिए किया गया)

अर्थात् $35123.20 = A(1+1.095+1.095^2)$

$$35123.20 = A(3.2940)$$

इसलिए, $$A = \frac{35123.20}{3.2940}$$

$$= 10662.78$$

अतः, निक्षेप निधि में वार्षिक भुगतान 10,662.78 रू. होना चाहिए। इससे 3 वर्ष पश्चात् 9.5% की दर से 35,133.20 रू. प्राप्त हो जाएंगे।

बोध प्रश्न 3

1) साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज में क्या अंतर है? उपयुक्त उदाहरणों द्वारा स्पष्ट कीजिए।

....

....

....

....

....

2) संयोजन से आप क्या समझते हैं? वर्तमान मूल्य की संकल्पना बट्टे से किस प्रकार संबंधित है?

....

....

....

....

....

....

....

3) एक डिपार्टमेंटल स्टोर के विज्ञापन के अनुसार एक वस्तु 700 रू. देकर, 500 रू. की तीन समान वार्षिक किश्तों में ली जा सकती है। यदि बट्टा दर 7.5% है, तो उस वस्तु का वर्तमान मूल्य ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

4) एक मशीन, जिसकी कीमत 100000 रू. है, की अपेक्षित आयु 5 वर्ष है तथा 5 वर्ष के पश्चात् उसका अवशिष्ट मूल्य 15000 रू. है। यदि इस मशीन से अपेक्षित लाभ प्राप्ति इस प्रकार है : वर्ष 1 में 20,000 रू., वर्ष 2 में 50,000 रू., वर्ष 3 में 35,000 रू., वर्ष 4 में 35,000 रू. तथा वर्ष 5 में 35,000 रू. यह भी ज्ञात है कि इस प्रकार की परियोजना में कम से कम 18% प्रतिलाभ अपेक्षित है। बताईए कि क्या यह मशीन खरीदी जानी चाहिए ?

....

....

....

....

....

5) वार्षिकियों से आप क्या समझते हैं? ऋण शोधन निधि क्या होती है, व्याख्या कीजिए।

....

....

....

....

....

6.7 सार-संक्षेप

यह इकाई, जो कि इस पाठ्यक्रम की पाँचवी इकाई है, एक विशिष्ट प्रकार के फलन से संबंधित थी जिसे अनुक्रम कहते हैं, यह श्रेणियों से भी संबंधित थी। एक श्रेणी अनुक्रम पर आधारित गणित की एक महत्वपूर्ण अवधारणा है। हमने देखा कि एक अनुक्रम प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय से, किसी समुच्चय तक एक फलन होता है। इसके पश्चात् इस इकाई में श्रेणियों की चर्चा की गई। एक श्रेणी एक दिए हुए अनुक्रम के पदों को जोड़ने पर प्राप्त होती है। इसके पश्चात् इस इकाई में श्रेढ़ियों की अवधारणा की व्याख्या की गई, जो कि अर्थशास्त्र में एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाती हैं। इस इकाई दो महत्वपूर्ण श्रेढ़ियों, समांतर श्रेढ़ी तथा गुणोत्तर श्रेढ़ी की चर्चा की गई।

इसके पश्चात् इस इकाई में किसी अनुक्रम के अभिसरण की संकल्पना की चर्चा की गई। हमने देखा कि किन स्थितियों में कोई अनुक्रम अभिसारी कहलाता है तथा कब अपसारी कहलाता है। साथ ही इस इकाई में सीमा की संकल्पना की प्रारंभिक जानकारी दी गई। अगली इकाई में हम सीमाओं के बारे में और अध्ययन करेंगे। इकाई के अंत में, अर्थशास्त्र में अनुक्रमों और श्रेणियों के अनुप्रयोगों की चर्चा की गई।

विशेष तौर पर साधारण और चक्रवृद्धि ब्याज में, संयोजन तथा बट्टे में, वर्तमान मूल्य ज्ञात करने में तथा निक्षेप निधि जैसी संकल्पनाओं में अनुक्रमों, श्रेणियों तथा श्रेढ़ियों के अनुप्रयोगों की चर्चा की गई।

6.8 बोध प्रश्नों के उत्तर/संकेत

बोध प्रश्न 1

1) 57
2) (i) 15; (ii) 1635
3) $a_7 = 246000$; $S_7 = 1386000$
4) $a_{11} = 4096$; $S_{20} = 4194300$
5) सांझा अनुपात $(r) = \frac{7}{49} = \frac{1}{7} = \frac{\frac{1}{7}}{1} = \frac{1}{7}$; $S_{10} = \frac{343}{6}\left[1 - \left(\frac{1}{7}\right)^{10}\right]$

बोध प्रश्न 2

1) देखें भाग 6.5
2) देखें भाग 6.5.2

बोध प्रश्न 3

1) देखें भाग 6.6.1
2) देखें भाग 6.6.2
3) संकेत : घातांकी विधि से वृद्धि मान जनसंख्या इस सूत्र का अनुसरण करती है :

   $P_n = P_0\,(1 + r)^n$

   जहाँ P_n = अवधिअंत पर जनसंख्या, P_0 = अवधिआरंभ पर जनसंख्या, r = वार्षिक वृद्धि दर, n = अवधि वर्षों में
4) तीन किश्तों वाले नकद प्रवाह का वर्तमान मूल्य मान :

$$= 500\left\{1 + \frac{1}{(1+0.075)^1} + \frac{1}{(1+0.075)^2}\right\}$$

$$= 500\,\frac{\left[1-\left(\frac{1}{1.075}\right)^3\right]}{1-\frac{1}{1.075}}$$

= रूपये 1361.67 (लगभग)

सारे नकद प्रवाह का वर्तमान मूल्य मान = रूपये 700 + 1361.67

= रूपये 2061.67 (लगभग)

5)

वर्ष	नकद प्रवाह (a)	नकद अपवाह (b)	निवल नकद प्रवाह (a)– (b)	काटा कारक	वर्तमान मूल्य मान
1	20000	–	20000	0.8474 $(=\frac{1}{(1+0.18)^1})$	16948
2	50000	–	50000	0.7181$(=\frac{1}{(1+0.18)^2})$	35905
3	35000	–	35000	0.6086	21301
4	35000	–	35000	0.5158	18053
5	35000	–	50000	0.4371	21855
	+ 15000 (कबाड़ी मूल्य)			नकद प्रवाहों का वर्तमान मूल्य मान	114062 रूपये

मशीन खरीदने का निवल वर्तमान मूल्य मान = नकद प्रवाहों का वर्तमान मूल्य मान – प्रारंभिक खरीद लागत

= 114062 – 100000

= 14062

निवल वर्तमान मूल्य मान NPV > 0, अतः मशीन खरीदी जानी चाहिए।

6) देखें उपभाग 6.6.4