इकाई 3 विद्युत विभव

इकाई की रूपरेखा

3.1 प्रस्तावना
उद्देश्य
3.2 गणितीय पृष्ठभूमि
अदिश का ग्रेडिएण्ट
सदिश का रेखा समाकल
3.3 आवेश को ले जाने में किया गया कार्य
विद्युत क्षेत्र का रेखा समाकल
विद्युत क्षेत्र के रेखा समाकल का पथ स्वातन्त्र्य
पथ स्वातन्त्र्य के परिणाम
3.4 विद्युत विभव
आवेश निकाय से उत्पन्न विभव
विभवांतर
3.5 विद्युत क्षेत्र और विद्युत विभव के बीच संबंध
3.6 वैद्युत द्विध्रुव और चतुर्ध्रुव का विद्युत क्षेत्र और विभव
3.7 विद्युत क्षेत्र में द्विध्रुव
3.8 सारांश
3.9 अंत में कुछ प्रश्न
3.10 हल और उत्तर
3.11 परिशिष्ट
3.12 शब्दावली

3.1 प्रस्तावना

इस खंड की इकाई 1 में आप यह पढ़ चुके हैं कि किन्हीं दो आवेशों के बीच का बल कूलॉम नियम से परिभाषित होता है। एकक धन आवेश पर लग रहे बल से किसी भी बिंदु पर विद्युत क्षेत्र **E** की प्रबलता परिभाषित होती है। इस खंड की पहली दो इकाइयों में सीधे या गाउस नियम की सहायता से **E** का मान ज्ञात करने के बारे में चर्चा की गई है।

स्थिरविद्युतिकी से संबंधित अधिकांश प्रश्नों में हमें **E** का परिकलन करना होता है। क्योंकि **E** एक सदिश राशि है, इसलिए इसके परिकलन में इसके प्रत्येक घटक का परिकलन करना होता है। इस परिकलन को और अधिक सरल बनाने के लिए हम एक अदिश राशि का परिकलन करते हैं। इस राशि को स्थिरवैद्युत विभव (electrostatic potential) ϕ कहते हैं। तत्पश्चात् एक सरल संबंध की सहायता से **E** का परिकलन किया जा सकता है। क्योंकि ϕ एक अदिश राशि है, इसलिए अधिकांश स्थितियों में इसका परिकलन विद्युत क्षेत्र की अपेक्षा अधिक सरल होता है। विभव की संकल्पना का इसलिए भी काफी महत्व है, क्योंकि आवेशित कणों द्वारा किये गये कार्य तथा उनकी ऊर्जाओं के साथ विभव का निकट का संबंध होता है। इस इकाई में मुख्यतः विभव, किन्हीं दो बिंदुओं के बीच इसके अंतर और **E** के साथ इसके संबंध के बारे में चर्चा की जाएगी। ϕ की संकल्पना को विकसित करने और **E** के साथ इसके संबंध को प्राप्त करने के लिए इस इकाई में दो नई गणितीय संकल्पनाओं पर भी विचार किया जाएगा। ये संकलपनाएं हैं (i) अदिश फलन (scalar function) का ग्रेडिएन्ट (gradient) और (ii) सदिश का रेखा समाकल (line integral)।

अगली इकाई में हम सतत आवेश-वितरणों (continuous charge distributions) से उत्पन्न विभव, समविभव पृष्ठ (equipotential surface) और स्थिरवैद्युत स्थितिज ऊर्जा (electrostatic potential energy) जैसे विभिन्न विषयों पर चर्चा करेंगे।

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप :

- आवेश q को एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक ले जाने में किये गये कार्य को परिकलित कर सकेंगे,
- यह दर्शा सकेंगे कि एक बंद पथ पर विद्युत क्षेत्र का रेखा समाकल शून्य के बराबर होता है,
- एकक आवेश (unit charge) से उत्पन्न किसी बिंदु पर विद्युत विभव का परिकलन कर सकेंगे,
- विद्युत विभव और विद्युत क्षेत्र के बीच संबंध स्थापित कर सकेंगे तथा इस प्रकार किसी भी बिंदु पर विद्युत विभव ज्ञात होने पर उस बिंदु पर विद्युत क्षेत्र का परिकलन कर सकेंगे,
- द्विध्रुव (dipole) और चतुर्ध्रुव (quadrupole) से उत्पन्न किसी बिंदु पर विद्युत विभव का परिकलन कर सकेंगे,
- एकसमान (uniform) विद्युत क्षेत्र में एक वैद्युत द्विध्रुव पर लगे बल आघूर्ण का परिकलन कर सकेंगे ।

3.2 गणितीय पृष्ठभूमि (Mathematical background)

इस इकाई में अदिश फलन के ग्रेडिएण्ट और सदिश के रेखा समाकल की संकल्पनाओं का प्रयोग किया गया है । इस इकाई के भौतिक विषयों को समझने में ये संकलपनाएं काफी उपयोगी हैं । आइए अब हम इन संकल्पनाओं को समझने का प्रयास करें । यदि आपने हाल ही में "भौतिकी में गणितीय विधियां-I" (पी एच ई-04) के पाठ्यक्रम में दी गई संकल्पनओं का अध्ययन किया है तो आप इस भाग का अध्ययन न कर आगे बढ़ सकते हैं ।

3.2.1 अदिश का ग्रेडिएण्ट (Gradient of a scalar)

आप जानते हैं कि सदिशों से संबंधित तीन विभिन्न प्रकार के गुणनफल होते हैं: सदिश **A** का अदिश से गुणनफल (k **A**), दो सदिशों का अदिश गुणनफल (**A**·**B**) और दो सदिशों का सदिश गुणनफल (**A** × **B**) इसी प्रकार सदिशों से संबंधित अनेक अवकल संक्रियाएं (differential operation) होती हैं, और सभी का अलग-अलग प्रयोग होता है । किसी सदिश जैसे रेडियस वेक्टर (radius vector) **r** का किसी अदिश, जैसे समय, के सापेक्ष अवकलन एक सरल संक्रिया है । इसे $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ से प्रकट किया जाता है । सदिशों से संबंधित अन्य अवकल संक्रियाओं में सदिश अवकल संकारक (vector differential operator) डेल (Del) प्रमुख है । डेल को ∇ से प्रकट किया जाता है । कार्तीय निर्देशांकों (cartesian coordinates) में डेल को निम्न पदों में व्यक्त करते हैं ।

$$\nabla = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \qquad (3.1)$$

यहां $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ आंशिक अवकलज (partial derivatives) हैं । यदि $f(x, y, z)$, x, y और z का एक फलन हो, तो y और z दोनों को अचर मान कर x के सापेक्ष f का आंशिक अवकलज $\frac{\partial f}{\partial x}$ होता है । इसी प्रकार x और z को अचर मानकर y के सापेक्ष f का आंशिक अवकलज $\frac{\partial f}{\partial y}$ होता है ।

आप यहां यह देख सकते हैं कि ∇ एक सदिश है तथा एक संकारक (operator) भी है । यह अपने दायीं ओर के व्यंजक पर संक्रिया (operate) करता है । संभवतः आपको याद होगा क्योंकि ∇ एक संकारक है इसलिए यह उस व्यंजक की दांयी ओर नहीं हो सकता जिस पर कि इसे संक्रिया करना है ।

जब ∇ एक अदिश क्षेत्र (scalar field) या फलन $f(x, y, z)$ पर संक्रिया करता है, तब यह स्थानिक निर्देशांक (space-coordinates) x, y, z के सापेक्ष इसके अवकलज को निर्धारित करता है ।

अदिश क्षेत्र जैसे विभव ϕ के ग्रेडिएण्ट से, एक सदिश क्षेत्र (vector field) को निम्न रूप में प्राप्त किया जाता है :

$$\nabla\phi = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial\phi}{\partial z} \qquad (3.2)$$

$\nabla\phi$ की दिशा वह होती है जिस ओर ϕ में अधिकतम परिवर्तन होता है अर्थात् इसकी दिशा सदा ही अचर विभव पृष्ठ पर खींचे गये लंब की ओर होती है।

ग्रेडिएण्ट संक्रिया के भौतिक अर्थ को समझने के लिए उस कमरे के तापमान पर विचार कीजिए जिसका एक भाग सूर्य की गर्मी से गर्म हो रहा है। अलग-अलग स्थान पर कमरे का तापमान अलग-अलग होगा और इसे निर्देशांक (x, y, z) के एक फलन के रूप में लिखा जा सकता है। मान लीजिए इसे $T(x, y, z)$ से प्रकट किया जाता है। अब, मान लीजिए हम कमरे में इसका विचरण दर (rate of variation) मालूम करना चाहते हैं। यह तो स्पष्ट है कि अलग-अलग दिशाओं में इसका परिमाण अलग-अलग होगा। यदि हम एक बिंदु (x_0, y_0, z_0) से Δr की दूरी तक चलें तो अलग-अलग दिशाओं में ताप परिवर्तन ΔT अलग-अलग होगा। यदि Δr लघु हो, तो तापमान में अंतर ज्ञात करने के लिए हम तीन चरों वाले टेलर प्रसार (Taylor expansion) का उपयोग कर सकते हैं। इकाई 2 के भाग 2.5 में एक चर वाले फलन के टेलर प्रसार के बारे में बताया गया है। यदि फलन तीन चरों पर आश्रित हो, जैसा कि इस स्थिति में है, तब हम निम्न प्रकार लिख सकते हैं।

$$T(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$$

$$= T(x_0, y_0, z_0) + \Delta x \frac{\partial T}{\partial x_0}(x_0, y_0, z_0) + \Delta y \frac{\partial T}{\partial y_0}(x_0, y_0, z_0)$$

$$+ \Delta z \frac{\partial T}{\partial z_0}(x_0, y_0, z_0) + \ldots\ldots\ldots \qquad (3.3)$$

क्योंकि Δx, Δy और Δz अति लघु हैं, इसलिए इस प्रसार में उच्च घात वाले पदों की उपेक्षा कर दी गई है।

ध्यान दीजिए कि Δx, Δy, Δz विस्थापन सदिश Δr के सदिश घटक हैं, अतः हम यह लिख सकते हैं कि

$$T(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) = T(x_0, y_0, z_0) + \Delta r \cdot \nabla T(x_0, y_0, z_0)$$

$$\because \nabla T = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial T}{\partial x_0} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial T}{\partial y_0} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial T}{\partial z_0}.$$

या संक्षिप्त रूप में,

$$T(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}) = T(\mathbf{r}_0) + \Delta\mathbf{r} \cdot \nabla T(\mathbf{r}_0) \qquad (3.4)$$

इस तरह, हम यह पाते हैं कि यदि हमें ∇T ज्ञात हो, तो किसी भी दिशा (arbitrary direction) में हम ताप विचरण मालूम कर सकते हैं।

इस समीकरण से हम यह अच्छी तरह से समझ सकते हैं कि ग्रेडिएण्ट संक्रिया की दिशा का अर्थ क्या होता है। मान लीजिए हम यह जानना चाहते हैं कि किस दिशा में T-क्षेत्र का विचरण सबसे अधिक है। समीकरण (3.4) से यह स्पष्ट है कि $\Delta T = T(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}) - T(\mathbf{r}_0)$ तब अधिकतम होगा, जब $\Delta\mathbf{r}$, ∇T के समांतर हो। इस तरह, ∇T की वह दिशा होती है जिसमें T क्षेत्र का विचरण सबसे अधिक तेजी से होता है। ग्रेडिएंण्ट के संबंध में एक और महत्वपूर्ण बात है। ऊपर के उदाहरण में, हम कमरे में ऐसे पृष्ठ बना सकते हैं जिन पर तापमान अचर रहता हो। उदाहरण के लिए, $\mathbf{r}_0$ से होते हुए हम एक ऐसा पृष्ठ प्राप्त कर सकते हैं, जिस पर तापमान का एक निश्चित मान होता है। यह मान r_0 पर के तापमान के बराबर होता है। ऐसे पृष्ठों को व्यापक रूप में **समविभव पृष्ठ (equipotential surfaces)** (तापमान क्षेत्र के लिए समतापी (isothermal), दाब क्षेत्र के लिए समदाबी (isobar) कहा जाता है।) परिभाषा के अनुसार, पृष्ठ के अनुदिश किसी भी दिशा में ∇T का घटक शून्य होता है। क्योंकि $\Delta T = \Delta\mathbf{r}_s \cdot \nabla T$ जहां $\mathbf{r}_s$ पृष्ठ के अनुदिश है, इसलिए समविभव पृष्ठ, ∇T के अवश्य लंब होगा।

इस बात से सुनिश्चित होने के लिए कि आप अदिश फलन का ग्रेडिएण्ट परिकलित कर सकते हैं या नहीं, यहां हम एक उदाहरण (solved example) दे रहे हैं।

उदाहरण 1

grad ϕ (अर्थात् $\nabla\phi$) का मान ज्ञात कीजिए यदि $\phi = Ax^2yz^3$, जहां A एक अचर है।

हल :

$$\text{grad}\ \phi = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x}(Ax^2yz^3) + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y}(Ax^2yz^3) + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}(Ax^2yz^3)$$

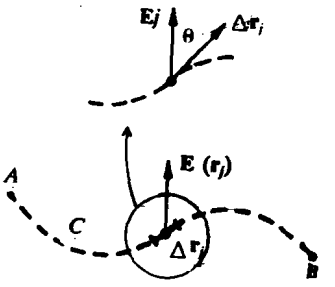
अब, $\frac{\partial}{\partial x}(Ax^2yz^3)$ मालूम करने के लिए हम yz^3 को अचर मान लेते हैं और x के सापेक्ष x^2 का अवकलज प्राप्त करते हैं। यही प्रक्रिया हम अन्य दो पदों के लिए भी अपनाते हैं। अतः

$$\nabla\phi = 2Axyz^3\,\hat{\mathbf{i}} + Ax^2z^3\,\hat{\mathbf{j}} + 3Ax^2yz^2\,\hat{\mathbf{k}}$$

ध्यान रहे कि $\nabla\phi$ एक सदिश है।

3.2.2 सदिश का रेखा समाकल (Line integral of a vector)

रेखा समाकल एक महत्वपूर्ण सदिश क्षेत्र संक्रिया (vector field operations) है। रेखा समाकल का अर्थ है वक्र (या रेखा) के अनुदिश एक समाकल। रेखा समाकल के संबंध में मुख्य रूप से समझने वाली बात यह है कि एक वक्र के अनुदिश गतिमान होने के लिए केवल एक स्वतंत्र चर की आवश्यकता होती है, क्योंकि विमाएं (dimensions) कुछ भी क्यों न हों, वक्र के समीकरण को सदा ही एक स्वतंत्र चर के पदों में लिखा जा सकता है।



चित्र 3.1 : सदिश क्षेत्र का रेखा समाकल। सदिश $\Delta\mathbf{r}$ की दिशा वक्र के बिन्दु विशेष पर खींची गई स्पर्शरेखा के अनुदिश होती है।

मान लीजिए हम वक्र C के अनुदिश बिंदु A से बिंदु B तक सदिश क्षेत्र $\mathbf{E}$ का रेखा समाकल ज्ञात करना चाहते हैं। इसके लिए चित्र 3.1 देखिये। वक्र C को अनेक छोटे-छोटे भागों $\Delta\mathbf{r}_1, \Delta\mathbf{r}_2, \ldots, \Delta\mathbf{r}_j, \ldots, \Delta\mathbf{r}_n$ में बांट दीजिए। यहां $\Delta\mathbf{r}_j$ वक्र के विभिन्न बिंदुओं पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के अनुदिश होते हैं। सदिश क्षेत्र $\mathbf{E}$ और j वां भाग के विस्थापन सदिश $\Delta\mathbf{r}_j$ का अनुदिश गुणनफल लीजिए तत्पश्चात् सभी भागों के लिए प्राप्त गुणनफलों को जोड़ दीजिए अर्थात्

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_1)\cdot\Delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{E}(\mathbf{r}_2)\cdot\Delta\mathbf{r}_2 + \ldots\ldots \mathbf{E}(\mathbf{r}_n)\cdot\Delta\mathbf{r}_n$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}(\mathbf{r}_j)\cdot\Delta\mathbf{r}_j \qquad (3.5)$$

क्योंकि वक्र C सतत (continuous) है, इसलिए $n \to \infty$ और $|\Delta\mathbf{r}_j| \to 0$ के लिए इस व्यंजक की सीमा (limit) को पथ C के अनुदिश सदिश क्षेत्र $\mathbf{E}$ का रेखा समाकल कहते हैं। अर्थात्

$$\int_C^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \underset{n\to\infty,\ \Delta r_j\to 0}{\text{Limit}} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}(\mathbf{r}_j)\cdot\Delta\mathbf{r}_j \qquad (3.6)$$

अतः $d\mathbf{r}$ (अर्थात् वक्र की स्पर्शरेखा के अनुदिश) की दिशा के अनुदिश $\mathbf{E}$ के घटक और $d\mathbf{r}$ के गुणनफल के समाकल को रेखा समाकल कहते हैं।

$$\int_C^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \int_C^B |\mathbf{E}|\,|d\mathbf{r}|\,\cos\theta$$

रेखा समाकल का मान $d\mathbf{r}$ के सापेक्ष $\mathbf{E}$ की दिशा (relative orientation of $\mathbf{E}$ and $d\mathbf{r}$) पर निर्भर करता है जो कि सामान्यतः बदलता रहता है। यदि प्रत्येक बिंदु पर ये समांतर हों, तो $\theta = 0$ और

$\int_C^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$, $\int_C^B |\mathbf{E}|\,|d\mathbf{r}|$ के बराबर होता है। यदि प्रत्येक बिंदु पर ये एक दूसरे के लंबवत् हो अर्थात्

$\theta = 90°$, तो $\int_C^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = 0$ होता है।

बोध प्रश्न 1

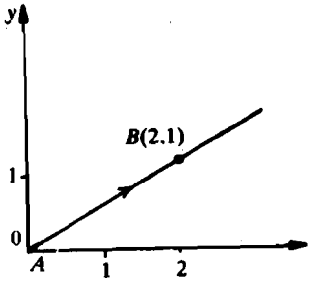
मान लीजिए एक बिंदु आवेश से उत्पन्न सदिश क्षेत्र $\mathbf{E}$ में A और B कोई दो बिंदु हैं। दिखाइए कि B से A तक के सदिश क्षेत्र $\mathbf{E}$ का रेखा समाकल A से B तक के रेखा समाकल के ऋणात्मक है, अर्थात्

$$\int_B^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\int_B^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} \qquad (3.7)$$

रेखा समाकल का सबसे अधिक प्रयोग बल $\mathbf{F}$ द्वारा किए गए कार्य को ज्ञात करने में किया जाता है। एक वस्तु को बिंदु C से बिंदु D तक ले जाने में बल $\mathbf{F}$ द्वारा किए गए कार्य W को प्रायः इस रूप में लिखा जाता है

$$W = \int_C^D \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

जहां $d\mathbf{r}$ एक विस्थापन सदिश (displacement vector) है। इसके बारे में आप अगले भाग में पढ़ेंगे।



चित्र 3.2 : वस्तु की गति का पथ AB

उदाहरण 2

जैसा कि चित्र 3.2 में दिखाया गया है, एक वस्तु को xy समतल में $A(0,0)$ से $B(2,1)$ तक ले जाने में बल $\mathbf{F} = (2y\hat{\mathbf{i}} + 6xy\hat{\mathbf{j}})$ N द्वारा किया गया कार्य ज्ञात कीजिए।

हल

हम जानते हैं कि किया गया कार्य

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_A^B (2y\hat{\mathbf{i}} + xy\hat{\mathbf{j}}) \cdot (dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}})$$

जहां कार्तीय निर्देशांक में

$$d\mathbf{r} = dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\therefore W = \int_A^B (2y\,dx + xy\,dy)$$

क्योंकि $\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = 1$
और $\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0$

क्योंकि A और B को जोड़ने वाली सरल रेखा का समीकरण उसकी प्रवणता (slope) ज्ञात करके लिखा जाता है, इसलिए

$$y = \frac{x}{2}$$

और $dy = \frac{dx}{2}$

किए गए कार्य से संबंधित समीकरण में इन्हें प्रतिस्थापित करने और समाकल को एक चर अर्थात् x में लिखने पर हमें यह प्राप्त होता है।

$$W = \int_0^2 \left(x\,dx + \frac{x^2}{4}\,dx\right)$$

यहां, x के मान की सीमाएं वहीं हैं जो कि बिंदुओं A और B के x-निर्देशांक है। समाकल को हल करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{12}\right]_0^2$$

$$\therefore W = 2 + \frac{2}{3} = 2.67\text{J}$$

बोध प्रश्न 2

एक वस्तु को परवलयिक पथ $y = \frac{x^2}{4}$ के अनुदिश (0, 0) से (2, 1) तक ले जाने में बल $F = xy\,\hat{\mathbf{i}} - y^2\,\hat{\mathbf{j}}$ द्वारा किया गया कार्य ज्ञात कीजिए।

3.3 आवेश को ले जाने में किया गया कार्य

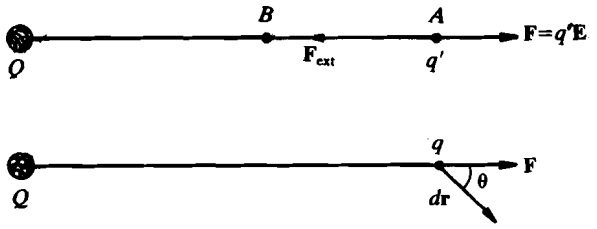
इकाई 1 में हमने यह देखा है कि एक आवेश (या आवेशों का समूह) अपने आस पास एक विद्युत क्षेत्र उत्पन्न करता है। किसी बिंदु पर विद्युत क्षेत्र **E** का मान उस बिंदु पर रखे एकक धन आवेश द्वारा अनुभव किये गए बल के बराबर होता है। यदि उस बिंदु पर एकक धन आवेश के स्थान पर हम कोई आवेश q' रखें, तो विद्युत क्षेत्र **E** में आवेश q' द्वारा अनुभव किया गया बल **F** समीकरण $\mathbf{F} = q'\mathbf{E}$ से प्राप्त हो जाता है। यदि हम इस आवेश q' को बल **F** के विरुद्ध बिंदु A से बिंदु B की ओर लघु दूरी $d\mathbf{r}$ तक ले जायें, जैसा कि चित्र 3.3 में दिखाया गया है, तो हमें इस बल के विरुद्ध कार्य करना होता है। किए गए इस कार्य को हम इस रूप में लिख सकते हैं

$$dW = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -|\mathbf{F}|\ |d\mathbf{r}| \cos\theta \tag{3.8}$$

और

$$W = -\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{3.9}$$

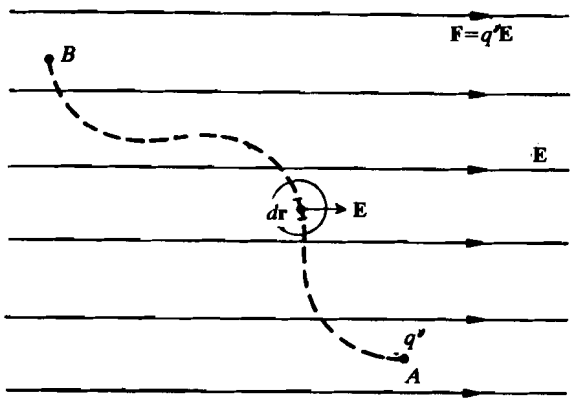
यहां $F\cos\theta$ विस्थापन सदिश $d\mathbf{r}$ के अनुदिश, **F** का घटक है। ध्यान दीजिए कि एक अन्य आवेश से उत्पन्न बल **F** के विरुद्ध आवेश q' को ले जाने के लिए एक बाह्य बल $\mathbf{F}_{ext}$ लगाना पड़ता है। यह बल $\mathbf{F}_{ext}$ परिमाण में **F** के बराबर होता है, पर विपरीत चिह्न का होता है अर्थात् $\mathbf{F}_{ext} = -\mathbf{F}$



चित्र 3.3 : आवेश q द्वारा उत्पन्न विद्युत क्षेत्र में आवेश की गति

3.3.1 विद्युत क्षेत्र का रेखा समाकल

ऊपर की गई चर्चा को और आगे बढ़ाते हुए आइए अब हम आवेश q को चित्र 3.4 में दिखाए गए पथ के अनुदिश A से B तक ले जायें। पथ AB विद्युत क्षेत्र **E** में स्थित हैं। इस पथ को dr लंबाई के अनंत छोटे-छोटे खंडों में बांट दीजिए। सदिश $d\mathbf{r}$ पथ के किसी भी खंड की दिशा एवं उसकी लंबाई को निरुपित करता है। आवेश q' को A से B तक ले जाने में किया गया कार्य (चित्र 3.4 देखिए) बल **F** और विस्थापन सदिश $d\mathbf{r}$ का ऋणात्मक अदिश गुणनफल अर्थात् $-\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ होता है।



चित्र 3.4 : विद्युत क्षेत्र **E** में A से B तक आवेश q' की गति

यदि A और B के बीच सभी अत्यूण खंडों (infinitesimal segments) में किए गए कार्यों को जोड़ दें,

संख्या अनंत की ओर प्रवृत होती है तब आवेश q' को A से B तक ले जाने में किए गए कार्य W को इस रूप में लिखा जाता है :

$$W = -\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -q' \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \qquad (3.10)$$

अब प्रश्न उठता है कि यदि हम आवेश q' के स्थान पर एकक धन आवेश को A और B के बीच गतिमान करें, तो क्या होता है ? आप यह आसानी से देख सकते हैं कि इस स्थिति में W को q' से भाग दे देने पर ही किया गया कार्य W' प्राप्त हो जाता है अर्थात्

$$W' = \frac{W}{q'} = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \qquad (3.11)$$

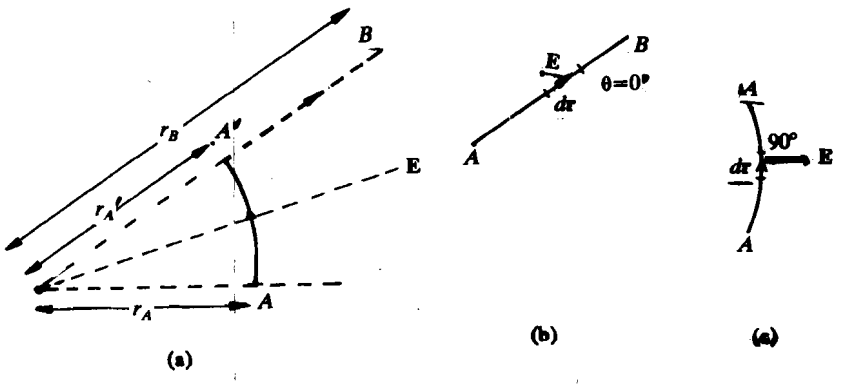
दक्षिण पक्ष के समाकल को विद्युत क्षेत्र का रेखा समाकल कहा जाता है। अतः किसी भी पथ के अनुदिश विद्युत क्षेत्र का रेखा समाकल उस पथ के अनुदिश एकक धन आवेश को ले जाने में किए गए कार्य के परिमाण के बराबर होता है।

आइए अब हम यह देखें कि समीकरण (3.11) में दिया गया समाकल A और B के बीच के पथ पर निर्भर करता है या नहीं। इस बात को हम क्यों जानना चाहते हैं, यह आपको भाग 3.4 और 3.5 में स्पष्ट हो जाएगा।

3.3.2 विद्युत क्षेत्र के रेखा समाकल का पथ स्वातन्त्र्य (Path independence of line integral of electric field)

आइए हम आवेश q से उत्पन्न क्षेत्र पर विचार करें। मान लीजिए इस क्षेत्र में दो बिंदु A और B हैं। जो आवेश q से r_A और r_B की दूरियों पर है। आइए हम चित्र 3.5 (क) में रंगीन रेखा द्वारा दिखाए गए पथ के अनुदिश A से B तक एकक धन आवेश को ले जाने का प्रयास करें। इस स्थिति में समीकरण (3.11) को इस रूप में लिखा जा सकता है :

$$W' = -\int_A^B E \cdot d\mathbf{r} = -\int_A^{A'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \qquad (3.12)$$



चित्र 3.5 : रंगीन रेखा द्वारा दिखाए गए पथ के अनुदिश एकक धन आवेश को A से B तक ले जाने में किया गया कार्य।

दक्षिण पक्ष का पहला समाकल त्रिज्या r_A वाले वृत के चाप (arc) के अनुदिश एकक आवेश को A से A' तक ले जाने में किए गए कार्य को निरुपित करता है। और, दूसरा समाकल बड़े वृत की त्रिज्या के अनुदिश इस आवेश को A' से B तक ले जाने में किए गए कार्य को निरुपित करता है। पहला समाकल $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ शून्य के बराबर है, क्योंकि $\mathbf{E}$ और $d\mathbf{r}$ एक दूसरे पर लंब हैं, जैसा कि चित्र 3.5 (ख) में दिखाया गया है। और, क्योंकि $A'B$ के अनुदिश $\mathbf{E}$ और $d\mathbf{r}$ दोनों ही एक दूसरे के समांतर हैं, इसलिए दूसरा समाकल

$\int_{A'}^{B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B |\mathbf{E}|\,|d\mathbf{r}|$ है। क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों है? ऐसा इसलिए है, क्योंकि पहले समाकल में $\cos\theta = 0$ और दूसरे समाकल में $\cos\theta = 1$ है।

आइए अब हम दूसरे समाकल को विस्तार से हल करें। इकाई 1 में हमने यह देखा है कि दूरी r पर आवेश

$\mathbf{E}$ का यह मान और $d\mathbf{r}$ के स्थान पर $\hat{\mathbf{r}}\, dr$ प्रतिस्थापित करने पर (क्योंकि $d\mathbf{r}$, $\hat{\mathbf{r}}$ की दिशा में एक सदिश अल्पांश (vector elements) है। हमें यह प्राप्त होता है :

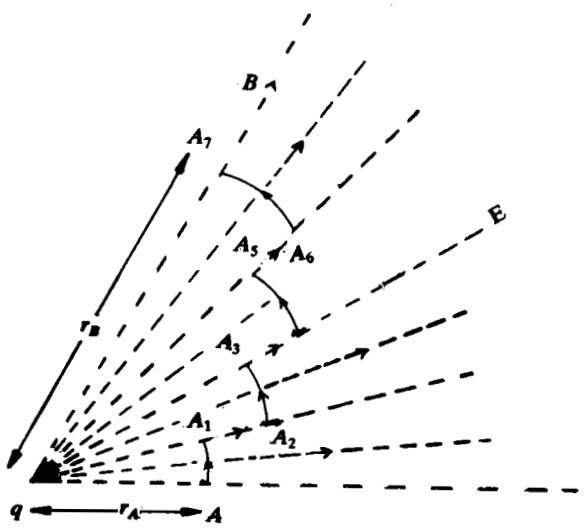
$$-\int_{A'}^{B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{r_A'}^{r_B} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} (dr) = -\int_{r_A}^{r_B} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} \quad \text{क्योंकि } r_A' = r_A$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right]$$

अतः समीकरण (3.12) से, A और B के बीच दिखाए गए पथ के लिए

$$W' = -\int_{A}^{B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right] \tag{3.13}$$

आइए अब हम एकक धन आवेश को बिंदु A से बिंदु B तक ले जाने के लिए एक अन्य पथ (जिसे रंगीन दिखाया गया है) लें जैसा कि चित्र 3.6 में दिखाया गया है।



चित्र 3.6 : एकक धन आवेश को A और B के बीच दिखाये गये पथ (जिसे रंगीन दिखाया गया है) के अनुदिश ले जाने में किया गया कार्य

इस पथ के अनुदिश किया गया कार्य भी ऊपर बताई गई विधि द्वारा ज्ञात कर सकते हैं। पथ के अनुदिश एकक आवेश कुछ समय तक वृत्त के चाप के अनुदिश जाता है, इसके बाद कुछ समय के लिए त्रिज्यतः जाता है, इसके बाद फिर चाप के अनुदिश और फिर इसके बाद त्रिज्यतः जाता है और इसी प्रकार प्रक्रिया चलती रहती है। हम यहां यह देख सकते हैं कि जब भी एकक आवेश चाप के अनुदिश चलता है, तब कोई कार्य नहीं होता। और, जब भी एकक आवेश त्रिज्य पथ के अनुदिश चलता है तब कार्य होता है। अतः हम यह लिख सकते हैं :

$$-\int_{A}^{B} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{A_1}^{A_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} - \int_{A_3}^{A_4} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} - \int_{A_5}^{A_6} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} - \int_{A_7}^{B} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} \tag{3.14}$$

इन त्रिज्य पथों में से प्रत्येक पथ के अनुदिश किया गया कार्य समीकरण (3.13) के अनुसार यह होता है

$$-\int_{A_1}^{A_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_{A_2}}\right]$$

$$-\int_{}^{A_4} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\frac{q}{}\left[\frac{1}{} - \frac{1}{}\right]$$

$$-\int_{A_5}^{A_6} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_{A_4}} - \frac{1}{r_{A_6}}\right]$$

और

$$-\int_{A_7}^{B} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_{A_6}} - \frac{1}{r_B}\right]$$

इन सभी को एक साथ जोड़ने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$W' = -\int_{A}^{B} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right] \qquad (3.15)$$

समीकरण (3.13) और समीकरण (3.15) की तुलना करने पर हम यह पाते हैं कि बिंदु आवेश q के क्षेत्र में एकक धन आवेश को ले जाने में किया गया कार्य दो अलग-अलग पथों के लिए समान होता है।

ऊपर के उदाहरण से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि A और B के बीच हम किसी भी पथ से क्यों न चले, हमें सदा ही समान परिणाम प्राप्त होती है। इससे यह अर्थ निकलता है कि विद्युत क्षेत्र का रेखा समाकल A और B के बीच के पथ पर निर्भर नहीं करता है।

बोध प्रश्न 3

एक समान विद्युत क्षेत्र में, क्षेत्र-दिशा के समानांतर d दूरी तक एकक धन आवेश को ले जाने में किया गया कार्य ज्ञात कीजिए।

3.3.3 पथ स्वातन्त्र्य के परिणाम (Consequence of path independence)

अभी हमने यह देखा है कि स्थिरवैद्युत बल के विरुद्ध एकक आवेश को ले जाने में किया गया कार्य प्रारंभिक स्थिति और अंतिम स्थिति के बीच के पथ पर निर्भर नहीं करता है। समीकरण (3.11) और (3.15) की सहायता से एक अन्य निश्चित आवेश q के क्षेत्र में A से B तक एक आवेश q' को ले जाने में किए गए कार्य को हम इस रूप में लिख सकते हैं :

$$W' = -\int_{A}^{B} q'\,\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

$$\therefore W' = (U_B - U_A) \qquad \text{जहां } U = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right) \qquad \ldots(3.16)$$

यहां U स्थिरवैद्युत स्थितिज ऊर्जा (electrostatic potential energy) है। ऐसी स्थिति में हम किए गए कार्य को दो बिंदुओं पर आवेश की स्थितिज ऊर्जाओं के अंतर के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। इस दशा में हम आवेश की स्थिति में परिवर्तन लाने में किए गये कार्य को ऊर्जा के रूप में संचित करते हैं और जब आवेश को अपनी मूल स्थिति पर लाते हैं तो इस ऊर्जा की पुनः प्राप्ति की जा सकती है। किसी विद्युत क्षेत्र में आवेश की स्थितिज ऊर्जा, उन आवेशों के सापेक्ष, जिनसे विद्युत क्षेत्र उत्पन्न होता है, इसकी स्थिति के कारण इसमें संचित ऊर्जा का एक माप होता है। आप अगली इकाई में स्थिरवैद्युत स्थितिज ऊर्जा और पथ स्वातंत्र्य के परिणाम के बारे में और अधिक पढ़ेंगे।

3.4 विद्युत विभव (Electric potential)

पिछले भाग में हमने यह देखा है कि एक बिंदु आवेश q के विद्युत क्षेत्र $\mathbf{E}$ में एकक धन आवेश को A से B तक ले जाने में किया गया कार्य A और B के बीच के पथ से स्वतंत्र होता है और केवल अंत्य बिंदुओं

में व्यक्त कर सकते हैं। समीकरण (3.15) से प्राप्त ये संख्याएं क्रमशः $\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_B}\right)$ और $\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}\right)$ हैं। यदि हम इन संख्याओं को क्रमशः ϕ_B और ϕ_A से प्रकट करें, तो इनका अंतर ϕ_{BA} यह होगा:

$$\phi_{BA} = \phi_B - \phi_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \qquad (3.17)$$

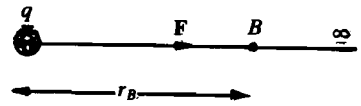
आइए, अब हम यह देखें कि यदि प्रारंभिक बिंदु A अनंत पर हो, तो क्या होता है। समीकरण (3.13) से पहले की गई चर्चा के आधार पर हम यह लिख सकते हैं :

$$\phi_{BA} = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\int_A^B \frac{q\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}dr}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{A=\infty}^{B}\frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A=\infty}^{r_B}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} + \frac{1}{\infty}\right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_B} = \phi_B \qquad (3.18)$$

समीकरण (3.18) के अदिश $\phi_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_B}$ को प्रायः आवेश q से r_B दूरी पर स्थित बिंदु पर का स्थिरवैद्युत विभव (electrostatic potential) प्रति एकक आवेश या केवल विभव (potential) कहा जाता है। आप यह भी जानते हैं कि विद्युत क्षेत्र का ऋणात्मक रेखा समाकल उस विद्युत क्षेत्र में एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक एकक धन आवेश को ले जाने में किया गया कार्य होता है। अतः q आवेश से दूरी r_B पर स्थित किसी बिंदु पर (चित्र 3.7 देखिए) विद्युत विभव को, प्रायः एक धन आवेश को अनंत से उस बिंदु तक लाने में किए गए कार्य के रूप में परिभाषित किया जाता है। इसलिए, विभव का SI मात्रक जूल/कूलाम हैं। इस संयोजन (जूल/कूलाम) का प्रयोग इतनी बार होता है कि इसे निरूपित करने के लिए एक विशेष मात्रक, वोल्ट (जिसका संक्षिप्त रूप V है) का प्रयोग किया जाता है।



चित्र 3.7 : आवेश q के निकट एक बिन्दु B पर विभव

दूरी r पर स्थित एक बिंदु आवेश से उत्पन्न विद्युत विभव ϕ_r को निम्न प्रकार लिखा जाता है :

$$\boxed{\phi_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}} \qquad (3.19)$$

अध्ययन को और आगे बढ़ाने से पहले ऊपर दिए गए व्यंजक की सहायता से निम्नलिखित बोध प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

बोध प्रश्न 4

स्वर्ण न्यूक्लियस (gold nucleus) के पृष्ठ पर विद्युत विभव क्या होगा ? स्वर्ण न्यूक्लियस की त्रिज्या 6.6×10^{-5}m है और स्वर्ण की परमाणु संख्या $Z = 79$ है। यहां यह मानें लीजिए कि न्यूक्लियस एक बिंदु आवेश की तरह है और इलेक्ट्रॉनिक आवेश $e = 1.6 \times 10^{-19}$C है।

क्या इस बात की ओर आपने ध्यान दिया है कि विद्युत विभव की परिभाषा में हमने शब्द अनंत का प्रयोग क्यों किया है ? यदि इस पर आप विचार नहीं कर पाए हैं तो आइए हम इसकी व्याख्या यहां कर दें। यदि r_B के स्थान पर हम समीकरण (3.18) में ∞ रखें तो हमें, $\phi_B = 0$ प्राप्त होता है।

इसका अर्थ यह हुआ कि किसी भी बिंदु पर विभव सदैव अनंत पर स्थित बिंदु के सापेक्ष ज्ञात किया जाता है। अनंत पर किसी भी आवेश के कारण विभव शून्य होता है।

समीकरण (3.18) से हम यह पाते हैं कि धनात्मक आवेश के लिए किसी बिंदु पर विभव धनात्मक होता है, जबकि ऋणात्मक आवेश के लिए यह ऋणात्मक होता है। क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों है ? इसका कारण यह है कि जब आवेश धनात्मक होता है तो एक धन आवेश के प्रतिकर्षी बल (repulsive force)

और यदि आवेश ऋणात्मक है तो परीक्षण आवेश का अनंत से लाने में विद्युत क्षेत्र को कार्य करना होता है। किया गया यह कार्य ऋणात्मक होता है।

चर्चा के दौरान इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि जब बल (इस स्थिति में विद्युत क्षेत्र) के विरुद्ध कार्य किया जाता है, तब तंत्र की विभव (ऊर्जा) में वृद्धि होती है। गुरुत्वीय क्षेत्र से संबंधित एक उदाहरण लेकर इसे आसानी से समझा जा सकता है। जब अधोमुखी (downwards) कार्य कर रहे गुरुत्व बल के विरुद्ध कोई त्वरण (acceleration) दिए बिना द्रव्यमान m वाले पिंड को ऊंचाई h तक उठाया जाता है, तब पिंड की स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि हो जाती है। यह गुरुत्व के विरुद्ध कार्य किया गया है। जब गुरुत्व बल (force of gravity) द्वारा कार्य किया जाता है, जैसा कि पिंड के मुक्त रूप से गिरने में होता है, तो स्थितिज ऊर्जा में कमी आती है। स्थितिज़ ऊर्जाओं का अंतर मुक्त रूप से गिर रही वस्तु की स्थितिज ऊर्जा में रूपांतरित हो जाता है।

3.4.1 आवेश निकाय से उत्पन्न विभव (Potential due to a system of Charges)

यदि एक आवेश के स्थान पर आवेशों का एक निकाय हो तो हमें अध्यारोपण नियम लागू करना चाहिए। अर्थात् आवेश निकाय $q_1, q_2, \ldots, q_N$ के कारण बिंदु P पर परिणामी विभव उस बिंदु पर अलग-अलग आवेशों से उत्पन्न विभवों के जोड़ के बराबर होता है। यदि $r_1, r_2, \ldots, r_N$ बिंदु P से आवेशों क्रमशः $q_1, q_2, \ldots, q_N$ की दूरियां हों, तो बिंदु P पर विभव यह होगा

$$\phi_P = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \ldots + \frac{q_N}{4\pi\epsilon_0 r_N}$$

आप यहां यह देख सकते हैं कि प्रत्येक आवेश कुछ इस तरह कार्य कर रहा होता है, जैसे कि अन्य आवेश वहां विद्यमान है ही नहीं। बिंदु P पर के विभव को संकलन रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\phi_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i} \qquad (3.20)$$

यहां यह बात ध्यान में रखिए कि समीकरण (3.20) में दिया गया योगफल एक बीजीय (algebraic) योगफल है न कि सदिश योगफल है क्योंकि विभव एक अदिश राशि है।

उदाहरण 3

निम्नलिखित बिंदु आवेशों को x-अक्ष पर रखा गया है :
$x = 20$cm पर $2\ \mu$C, $x = 30$ cm पर -3μC तथा
$x = 40$ cm पर -4μC बिंदु $x = 0$ पर विभव ज्ञात कीजिए।

हल

हम जानते हैं कि विभव एक अदिश है और अध्यारोपण नियम लागू करके इसे इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{3} \frac{q_i}{r_i}$$

इसमें q_i और r_i के संख्यात्मक मानों को प्रतिस्थापित करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$\phi = 9 \times 10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}} \left[\frac{2\times10^{-6}\mathrm{C}}{0.20\mathrm{m}} - \frac{3\times10^{-6}\mathrm{C}}{0.30\mathrm{m}} - \frac{4\times10^{-6}\mathrm{C}}{0.40\mathrm{m}} \right]$$

$$= 9 \times 10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}}\ [10^{-5}\ \mathrm{C\,m^{-1}} - 10^{-5}\mathrm{C\,m^{-1}} - 10^{-5}\mathrm{C\,m^{-1}}]$$

$$= -9 \times 10^4\ \mathrm{N\,m\,C^{-1}} = -9 \times 10^4\mathrm{V}$$

यदि आवेश वितरण विभिन्न आवेशों का संग्रह न होकर आवेशित गोले पर, सतत हो, तो समीकरण (3.20) के योगफल के स्थान पर एक समाकल का प्रयोग किया जाता है। ऐसी स्थिति में हम यह लिख सकते हैं।

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho\, dV}{r} \qquad (3.21)$$

जहां ρ आवेश का आयतन घनत्व है, dV आयतन का अल्पांश (Volume element) है और r एक चर है जो कि आयतन अल्पांश के प्रत्येक बिंदु की उस बिंदु से दूरी होती है, जहां विभव का परिकलन किया जा रहा है। फिर भी, व्यंजक (3.21) का मान तभी निकाला जा सकता है जबकि आवेश घनत्व के स्पष्ट व्यंजक (eplicit expressions) हों और पूरे आवेश वितरण की स्थिति उपलब्ध हो।

3.4.2 विभवांतर (Potential difference)

जिस तरह हमने एक बिंदु पर विभव को परिभाषित किया है उसी तरह हम एक अन्य अति उपयोगी राशि को परिभाषित कर सकते हैं जिसे दो बिंदुओं के बीच का **विभवांतर** कहा जाता है।

आइए हम आवेश q द्वारा उत्पन्न क्षेत्र में एकक धन आवेश को पहले अनंत से बिंदु A तक और फिर बिंदु B तक (चित्र 3.8 देखिए) लाने में किए गए कार्य को ज्ञात करें। समीकरण (3.18) से हमें यह प्राप्त होता है :

$$\phi_A = W_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$$

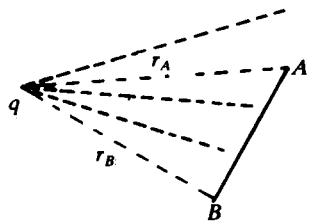
और

$$\phi_B = W_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_B}$$

इन दोनों का अंतर (अर्थात् $\phi_B - \phi_A$) एकक आवेश को A से B तक ले जाने में किया गया कार्य है और इसे दो बिंदुओं A और B के बीच का विभवान्तर कहा जाता है। इसे इस रूप में लिखा जाता है :

$$\phi_{BA} = \phi_B - \phi_A = W_2 - W_1$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right] \qquad (3.22)$$



चित्र 3.8 : एकक आवेश को A से B तक ले जाने में किया गया कार्य

ऐसा इसलिए है, क्योंकि किसी विद्युत क्षेत्र में आवेश को ले जाने में किया गया कार्य पथ पर निर्भर नहीं करता है। इसी पथ स्वातन्त्र्य की सहायता से हम विभव की संकलपना को परिभाषित कर सकते हैं। यदि हम एकक धन आवेश के स्थान पर A और B के बीच एक आवेश q को ले जायें, तो किया गया कार्य W यह होता है :

$$W = q' \phi_{BA} = q' (\phi_B - \phi_A) \qquad (3.23)$$

स्थिरविद्युतिकी (electrostatics) और विद्युत धारा (current electricity) में विभवान्तर का काफी महत्व है। इसकी जानकारी होने पर हम उस धारा का ठीक-ठीक मान प्राप्त कर सकते हैं जो एक विद्युत परिपथ में किन्हीं दो बिंदुओं के बीच प्रवाहित होती है, यदि इन दो बिंदुओं के बीच का प्रतिरोध ज्ञात हो।

बोध प्रश्न 5

एक 12V की बैटरी के धन टर्मिनल से ऋण टर्मिनल तक एक इलेक्ट्रॉन को ले जाने में कितने कार्य की आवश्यकता होती है ?

3.5 विद्युत क्षेत्र और विद्युत विभव के बीच संबंध

समीकरण (3.17) में हमने यह देखा है कि एक रेखा समाकल के जरिए विद्युत विभव ϕ और विद्युत क्षेत्र $\mathbf{E}$ के बीच संबंध स्थापित किया जा सकता है। इस तरह विद्युत क्षेत्र का ज्ञान होने और रेखा समाकल का मान निकालने पर, किसी बिंदु पर विभव प्राप्त किया जा सकता है। अब हम एक विपरीत संबंध का पता लगाना चाहते हैं, जहां यदि ϕ ज्ञात हो तो $\mathbf{E}$ प्राप्त किया जा सकता हो। इसे हम नीचे दी गई चर्चा में प्राप्त करेंगे।

समीकरण (3.22) में हमने यह देखा है कि आवेश q के क्षेत्र में दो बिंदुओं A और B के बीच का विभवान्तर यह होता है :

$$\phi_{BA} = \phi_B - \phi_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

इस समीकरण का दक्षिण पक्ष उन्हीं दो बिंदुओं के बीच विद्युत क्षेत्र $\mathbf{E}$ के ऋणात्मक रेखा समाकल के भी बराबर होता है। अतः हम लिख सकते हैं :

$$\phi_{BA} = -\int_{A}^{B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \tag{3.24}$$

अब समीकरण (3.8) की सहायता से हम $d\mathbf{r}$ की दूरी पर स्थित किन्हीं दो बिंदुओं के बीच के विभवान्तर को इस रूप में लिख सकते हैं

$$d\phi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \tag{3.25}$$

या $d\phi = -E \cos\theta \, |d\mathbf{r}|$

या $$-E\cos\theta = \frac{d\phi}{|d\mathbf{r}|} \tag{3.26}$$

इस समीकरण में $\cos\theta$ के होने के कारण हम यह पाते हैं कि विद्युत क्षेत्र, विभव का एक विशेष प्रकार का अवकलज (derivative) है। इसे हम दिक् अवकलज (directional derivative) कहते हैं।

उप-भाग 3.2.1 में आपने यह देखा है कि अलग-अलग दिशाओं में अलग-अलग स्थानों पर कमरे के तापमान विचरण को किस प्रकार ग्रेडिएण्ट संकारक की सहायता से हम लिखते हैं। इसी प्रकार, एक विद्युत क्षेत्र में दो प्रतिवेशी बिंदुओं (neighbouring points) के बीच विद्युत विभव के अंतर $d\phi$ को ग्रेडिएण्ट संकारक के पदों में हम लिख सकते हैं। तत्पश्चात् इसका संबंध किसी बिंदु पर के विद्युत क्षेत्र $\mathbf{E}$ के साथ किया जा सकता है। अतः

$$d\phi = \phi(x + dx, y + dy, z + dz) - \phi(x, y, z)$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz$$

$$= \left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \cdot (\hat{\mathbf{i}}\, dx + \hat{\mathbf{j}}\, dy + \hat{\mathbf{k}}\, dz)$$

$$= \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} \tag{3.27}$$

समीकरण (3.25) के साथ इस समीकरण की तुलना करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = -\left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \tag{3.28}$$

जहां $E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}$, $E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y}$ और $E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z}$ (3.29)

क्रमशः x, y, z दिशाओं में $\mathbf{E}$ के घटक हैं।

इस तरह, विद्युत क्षेत्र $\mathbf{E}$ किसी भी बिंदु पर विभव ϕ का ऋण ग्रेडिएण्ट होता है। क्योंकि ग्रेडिएण्ट का अर्थ है प्रवणता (slope), इसलिए क्षेत्र की दिशा में विभव (अदिश) का परिवर्तन दर ज्ञात कर विद्युत क्षेत्र (सदिश) का मान प्राप्त किया जाता है।

समतल ध्रुवी निर्देशांक तंत्र (plane polar coordinate system) में हम (r, θ) निर्देशांकों का प्रयोग करते हैं। अगले भाग में इस निर्देशांक तंत्र का प्रयोग द्विध्रुव से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र को मालूम करने में किया जायेगा। अतः इस इकाई के अंत में दिए गए परिशिष्ट में इस निर्देशांक तंत्र में ग्रेडिएण्ट डेल संकारक को ज्ञात किया जायेगा। आपके लिए यह उचित होगा कि आप इसे अच्छी तरह से समझ लें, वैसे इस विषय पर आपसे परीक्षा में प्रश्न नहीं पूछे जायेंगे।

उदाहरण 4

किसी बिंदु पर विद्युत विभव $\phi = Ax + By - Cz$ है

जहाँ A, B और C अचर हैं। इस बिंदु पर विद्युत क्षेत्र का मान ज्ञात कीजिए।

हल

और $\mathbf{E} = -\left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$

$\therefore E = -[A\hat{\mathbf{i}} + B\hat{\mathbf{j}} - C\hat{\mathbf{k}}]$

अब आप बोध प्रश्न 6 को हल करने के लिए स्वयं इस विधि को लागू कीजिए।

बोध प्रश्न 6

किसी भी बिंदु पर विभव $\phi = x(y^2 - 4x^2)$ है। उस बिंदु पर विद्युत क्षेत्र $\mathbf{E}$ ज्ञात कीजिए।

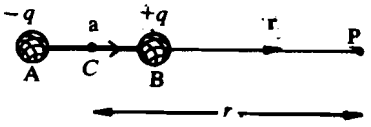
विद्युत क्षेत्र और विद्युत विभव के बीच के संबंध को और अच्छी तरह से समझने के लिए आइए हम द्विध्रुव और चतुर्ध्रुव (quadrupole) के संबंध में विस्तार से चर्चा करें।

3.6 वैद्युत द्विध्रुव और चतुर्ध्रुव का विद्युत क्षेत्र और विभव

सदिश दूरी $\mathbf{a}$ पर स्थित समान एवं विपरीत आवेशों के युगल (pair) को द्विध्रुव कहा जाता है (चित्र 3.9)। सदिश $\mathbf{a}$ की दिशा द्विध्रुव के अक्ष के अनुदिश ऋण आवेश से धन आवेश की ओर होती है। धनात्मक और ऋणात्मक आयन वाला अणु प्रकृति में पाए जाने वाला वैद्युत द्विध्रुव का एक उदाहरण है। क्योंकि परमाणु में समान मात्रा में धन और ऋण आवेश होते हैं तथा इनके केन्द्र संपाती होते हैं, इसलिए परमाणु के बाहर स्थित सभी बिंदुओं के लिए यह उदासीन (neutral) होता है। बाह्य विद्युत क्षेत्र के होने पर परमाणु के धन और ऋण आवेशों के केन्द्र संपाती नहीं रह जाते, बल्कि अलग-अलग हो जाते हैं। इस स्थिति में तब यह एक द्विध्रुव हो जाता है। किसी बाह्य विद्युत क्षेत्र के प्रभाव में परावैद्युत (dielectrics) के व्यवहार को समझने में द्विध्रुव के आस पास के विद्युत क्षेत्र और विभव काफी सहायक सिद्ध होते हैं। दो विपरीतदिश द्विध्रुवों को एक रेखा में रखने पर हमें एक रैखिक चतुर्ध्रुव प्राप्त होता है। द्विध्रुव की तुलना में इसके क्षेत्र और विभव अधिक जटिल (complicated) होते हैं। आइए पहले हम एक द्विध्रुव से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र और विभव पर चर्चा करें।

क) द्विध्रुव के अक्ष पर स्थित बिंदु P पर विद्युत क्षेत्र

मान लीजिए द्विध्रुव के मध्य बिंदु और बिंदु P जो कि अक्ष पर स्थित है, के बीच की दूरी r है (चित्र 3.9 देखिए)। हमें P पर विद्युत क्षेत्र का मान ज्ञात करना है। $+q$ से उत्पन्न P पर विद्युत क्षेत्र यह होता है :



चित्र 3.9 : केन्द्र c और अक्ष a (धन और ऋण आवेशों की बीच की दूरी) वाला वैद्युत द्विध्रुव AB। बिन्दु P अक्ष पर स्थित है।

$$\mathbf{E}_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{(r - a/2)^2}$$

और $-q$ से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र यह होता है

$$\mathbf{E}_- = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{(r + a/2)^2}$$

P पर परिणामी क्षेत्र यह होता है

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$$

$$= \frac{q\,\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{(r - a/2)^2} - \frac{1}{(r + a/2)^2}\right]$$

$$= \frac{q\,\hat{\mathbf{r}}\,2ar}{4\pi\epsilon_0\,(r^2 - a^2/4)^2}$$

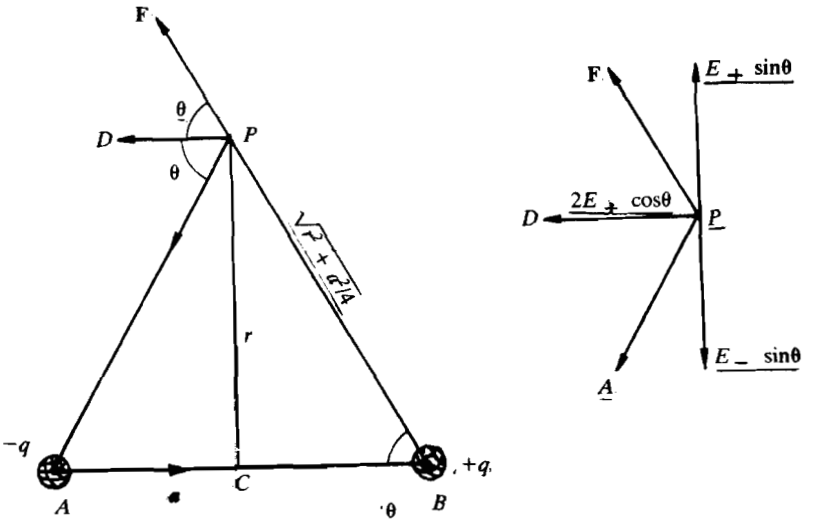
$$\mathbf{E} = \frac{2\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0\,r^3} \quad r >> a \text{ के लिए} \qquad (3.30\text{क})$$

जहां $\mathbf{p} = qa\,\hat{\mathbf{r}}$ (3.30ख)

यहां हमने हर (denominator) में r^2 की तुलना में $a^2/4$ की उपेक्षा कर दी है, क्योंकि वास्तविक भौतिक समास्यों (actual physical problems) में $a << r$ होता है। समीकरण (3.30 क) में $qa\hat{\mathbf{r}}$ के स्थान पर $\mathbf{p}$ रखा गया है, जिसे द्विध्रुव आघूर्ण (dipole moment) कहा जाता है। परमाणु और अणु द्विध्रुवों में $a \approx 10^{-10}$m और $r >> a$ होता है।

ख) द्विध्रुव अक्ष के लंब अर्धक रेखा पर स्थित बिंदु P पर विद्युत क्षेत्र

मान लीजिए इस स्थिति में द्विध्रुव के केन्द्र और बिंदु P के बीच की दूरी r है। चित्र 3.10 देखिए।



चित्र 3.10 : बिंदु P पर द्विध्रुव से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र

P पर $+q$ से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र, PF के अनुदिश होता है और इसका परिमाण यह होता है :

$$E_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{(r^2 + a^2/4)}\right]$$

P पर $-q$ से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र PA के अनुदिश होता है और इसका परिमाण यह होता है :

$$E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(r^2 + a^2/4)}$$

परिणामी विद्युत क्षेत्र मालूम करने के लिए CP पर लंब PD खींचिए। अब, यदि आप इन दो विद्युत क्षेत्रों को PD के एवं PD के लंब दिशा के अनुदिश वियोजित करें, तो आप पायेंगे कि घटक $E_+ \sin\theta$ और $E_- \sin\theta$ एक दूसरे को काट देते हैं, जबकि $E_+ \cos\theta$ और $E_- \cos\theta$, PD के अनुदिश जुड़ जाते हैं (जैसा कि चित्र 3.10 में दिखाया गया है)। क्योंकि ये दोनों घटक परिमाण में बराबर है इसलिए परिणामी क्षेत्र, PD के अनुदिश होता है और इसका परिमाण

$$2E_+ \cos\theta = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\cos\theta}{(r^2 + a^2/4)}\right] \text{ होता है।}$$

चूंकि $\cos\theta = \dfrac{a/2}{(r^2 + a^2/4)^{1/2}}$ तथा

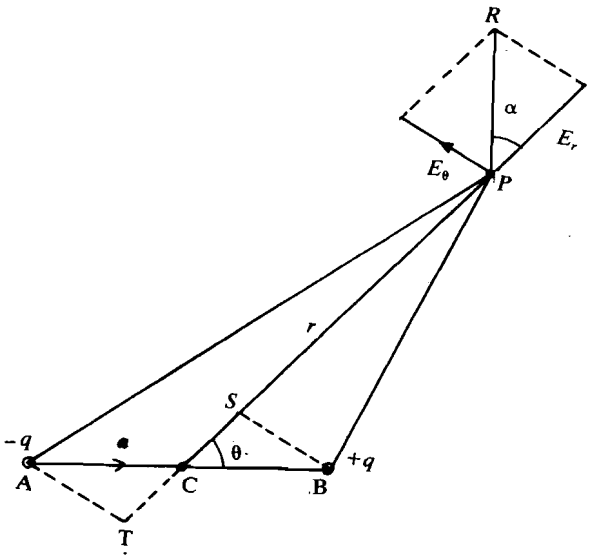
P पर परिणामी क्षेत्र PD के अनुदिश है, जो कि $\mathbf{p}$ के प्रति समांतर (antiparallel) हैं, अतः सदिश क्षेत्र को इस प्रकार लिख सकते हैं

$$\mathbf{E} = \frac{-\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(r^2 + a^2/4)^{3/2}} \qquad \textbf{(3.31)}$$

$$\approx -\frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3} \quad \text{जहां} \quad r >> a$$

ग) द्विध्रुव से उत्पन्न विभव

विद्युत क्षेत्र का मान स्थिरवैद्युत विभव ϕ से भी ज्ञात किया जा सकता है। इसके लिए आइए हम द्विध्रुव के मध्य बिंदु C से दूरी r पर स्थित बिंदु P पर विभव ϕ ज्ञात करें (चित्र 3.11 देखिए)। P और C को मिलाने वाली रेखा $\mathbf{a}$ के साथ कोण θ बनाती है। समीकरण (3.19) की सहायता से द्विध्रुव के आवेशों $-q$ और $+q$ के कारण P पर विभव ज्ञात किया जाता है।



चित्र 3.11 : द्विध्रुव द्वारा उत्पन्न विभव और क्षेत्र का परिकलन। *BS* और *AT*, *PC* पर लंब है। $AB = a$ है।

$-q$ और $+q$ से P की दूरियां क्रमशः AP और BP हैं, ज्यामिति से आप ये देखेंगे कि

$$BP = SP = PC - CS = r - \frac{a}{2}\cos\theta$$

और $$AP = TP = TC + CP = r + \frac{a}{2}\cos\theta$$

इस तरह, P पर विभव यह होता है

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{(r - \frac{a}{2}\cos\theta)} - \frac{1}{(r + \frac{a}{2}\cos\theta)}\right]$$

$$= \frac{q\, a\cos\theta}{4\pi\epsilon_0\,(r^2 - a^2/4\cos^2\theta)}$$

जब P काफी दूर है, तब $\frac{a^2}{4}\cos^2\theta$ की तुलना में r^2 काफी बड़ा होता है और तब हर में $\frac{a^2}{4}\cos^2\theta$ की उपेक्षा करने पर हम यह लिख सकते हैं

$$\phi = \frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\,\epsilon_0\, r^2}$$

$$\text{या } \phi = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0\, r^2} \quad \left[\because \mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}} = qa\,\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}} = qa\cos\theta\right] \qquad (3.32)$$

P पर विद्युत क्षेत्र मालूम करने के लिए हम ध्रुवीय निर्देशांकों में ग्रेडिएण्ट संकारक (Operator) का प्रयोग करते हैं। (इस इकाई के अंत में दिया गया परिशिष्ट देखिए।) इस तरह,

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = -\left[\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right]$$

$$\text{या } \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{r^3}\left[\hat{\mathbf{r}}\,(2\cos\theta) + \hat{\theta}\sin\theta\right] \qquad (3.33)$$

परिणामी $\mathbf{E}$, PR की दिशा में है जैसा कि चित्र 3.11 में दिखाया गया है और इसका परिमाण

$$|\mathbf{E}| = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\, r^3}\sqrt{3\cos^2\theta + 1} \quad \text{है।}$$

$\hat{\mathbf{r}}$ के साथ $\mathbf{E}$ कोण α बनाता है जिसका मान है :

$$\tan\alpha = \frac{1}{2}\tan\theta \qquad (3.34)$$

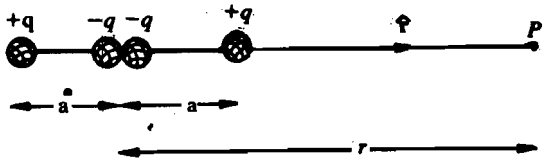
जब $\theta = 0$ है तब बिंदु P द्विध्रुव के अक्ष पर होता है, इस स्थिति में केवल त्रिज्य घटक (radial component) विद्यमान होता है और हमें वही परिणाम प्राप्त होता है जो कि हमें समीकरण (3.30) में प्राप्त हुआ था। जब $\theta = \frac{\pi}{2}$ है तब बिंदु P द्विध्रुव अक्ष के लंब अर्धक रेखा पर होता है, त्रिज्य घटक शून्य होता है, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ और हमें वही परिणाम प्राप्त होता है जो कि हमें समीकरण (3.31) में प्राप्त हुआ था, क्योंकि $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ और इस बिंदु पर $\hat{\theta}$, $\mathbf{p}$ के प्रतिसमांतर होता है। इन तथ्यों से आप यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि

1) द्विध्रुव के लिए विभव, $\frac{1}{r^2}$ के अनुसार और क्षेत्र $\frac{1}{r^3}$ के अनुसार परिवर्तित होता है। जबकि बिंदु आवेश के लिए विभव $\frac{1}{r}$ के अनुसार और क्षेत्र $\frac{1}{r^2}$ के अनुसार परिवर्तित होता है। अतैव हम यह पाते हैं कि बिंदु आवेश की तुलना में द्विध्रुव के लिए r के साथ विभव और क्षेत्र में काफी तेजी से कमी आती है।

2) द्विध्रुव विभव का मान उन बिंदुओं पर शून्य होता है जो कि द्विध्रुव अक्ष के लंब अर्धक रेखा पर स्थित होते हैं, अतः परीक्षण आवेश को लंब अर्धक रेखा के अनुदिश ले जाने में कोई कार्य नहीं होता।

आइए अब हम चतुर्ध्रुव से उत्पन्न विद्युत विभव और विद्युत क्षेत्र ज्ञात करें।

चित्र 3.12 में दिखाई गई 4 आवेशों की व्यवस्था को देखिए।



चित्र 3.12 : चतुर्ध्रुव से उत्पन्न P पर विभव

यह चतुर्ध्रुव का एक रूप है। इस चतुर्ध्रुव से उत्पन्न बिन्दु P पर विभव को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r+a} - \frac{2}{r} + \frac{1}{r-a}\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2a^2}{r\,(r^2-a^2)}\right]$$

हर में r^2 की तुलना में a^2 को नगण्य माना जा सकता है यदि $r >> a$ हो। अतः

$$\phi = \frac{2q\,a^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \qquad (3.35)$$

क्योंकि इस स्थिति में विद्युत क्षेत्र का केवल त्रिज्य घटक होता है। इसलिए

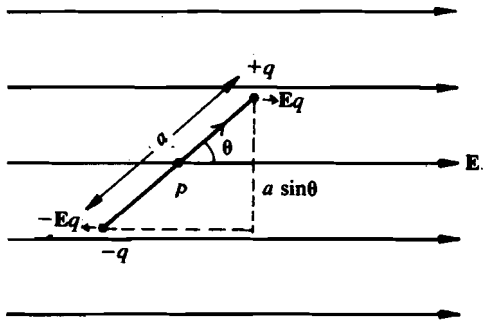
$$\mathbf{E} = -\hat{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{4q\,a^2}{4\pi\epsilon_0 r^4}\hat{r} \qquad (3.36)$$

सीधे परिकलन करके भी इसे सिद्ध किया जा सकता है। द्विध्रुव और बिंदु आवेश की तुलना में, चतुर्ध्रुव के लिए विभव में $\frac{1}{r^3}$ के अनुसार और क्षेत्र में $\frac{1}{r^4}$ के अनुसार तेजी से कमी आती है।

3.7 विद्युत क्षेत्र में द्विध्रुव

द्विध्रुव से उत्पन्न क्षेत्र और विभव पर चर्चा कर लेने के बाद हम द्विध्रुव पर बाह्य विद्युत क्षेत्र के प्रभाव के

मान लीजिए कि एक द्विध्रुव एकसमान बाह्य विद्युत क्षेत्र **E** में रखा हुआ है। एकसमान विद्युत क्षेत्र वह होता है जिसका परिमाण और दिशा हर जगह समान होते हैं। मान लीजिए **p** क्षेत्र दिशा के साथ θ कोण बनाता है जैसा कि चित्र 3.13 में दिखाया गया है।



चित्र 3.13 : एक समान विद्युत क्षेत्र में रखे द्विध्रुव पर लग रहा बल आघूर्ण (torque)।

बाह्य विद्युत क्षेत्र के कारण आवेश $+q$ पर बल $\mathbf{F} = E\mathbf{q}$ लगता है, जबकि आवेश $-q$ पर बराबर और विपरीतदिश बल $-E\mathbf{q}$ लगता है। क्योंकि क्षेत्र एकसमान है, इसलिए द्विध्रुव पर परिणामी बल (resultant force) शून्य होगा, अर्थात्

$$\mathbf{F}_{\text{कुल}} = E\mathbf{q} - E\mathbf{q} = 0 \qquad (3.37)$$

क्योंकि परिणामी बल शून्य है, इसलिए द्विध्रुव त्वरित नहीं होता अर्थात् इसकी स्थानांतरीय गति (translatory motion) पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता। क्या इससे यह अर्थ निकलता है कि बाह्य विद्युत क्षेत्र का द्विध्रुव पर कोई प्रभाव नहीं होता। नहीं, बात ऐसी नहीं है।

द्विध्रुव पर लग रहे बल आघूर्ण (torque) के कारण वह घूमने लगता है। द्विध्रुव पर बल आघूर्ण इसलिए लग रहा होता है, क्योंकि दो बराबर और विपरीतदिशा वाले बल, जो एक दूसरे को मुक्त सदिश के रूप में निरसन (cancel) कर देते हैं, वास्तव में, अलग-अलग बिंदुओं पर लग रहे होते हैं। चित्र 3.13 से आप यह देख सकते हैं कि इस बल आघूर्ण का परिमाण (magnitude) $|\mathbf{F}|a\sin\theta = q|\mathbf{E}|\ a\sin\theta$ होता है। क्योंकि इसका प्रभाव दक्षिणावृत (clockwise) घुमने का होता है, इसलिए इसे $\mathbf{p} \times \mathbf{E}$ के रूप में लिखा जा सकता है। इस तरह, द्विध्रुव पर लग रहा बल आघूर्ण τ यह होता है :

$$\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \qquad (3.38)$$

बल आघूर्ण का मात्रक न्यूटन मीटर (Nm) होता है। बल आघूर्ण लगने पर द्विध्रुव स्वयं क्षेत्र **E** की दिशा में आ जाता है। इस स्थिति में, द्विध्रुव आघूर्ण सदिश **p** सदिश **E** के समांतर होता है। तथा द्विध्रुव पर लगने वाले बल आघूर्ण का मान शून्य होता है। क्योंकि निकाय स्थायी (stable) स्थिति में होता है, इसलिए द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा निम्नतम होती है। अतः इस स्थिति से द्विध्रुव का घूर्णन कराने में एक बाह्य बल द्वारा किया गया कार्य द्विध्रुव में स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित होता है। आइए हम यह मान लें कि एक बाह्य विद्युत क्षेत्र में जब कोण $\theta = 90^0$ है तब द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा शून्य है।
ऐसा हमने केवल अंतिम परिणाम को सरल बनाने के लिए किया है। अतः कोण θ के लिए द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा यह होती है :

$$U(\theta) = W(\theta) = \int_{90^\circ}^{\theta} |\tau|\, d\theta = \int_{90^\circ}^{\theta} pE \sin\theta\, d\theta \qquad (3.39)$$

जहां $W(\theta)$ द्विध्रुव को क्षेत्र में θ कोण से घुमाने पर किया गया कार्य है। इस समाकल का मान ज्ञात करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$U(\theta) = - pE\, |\cos\theta|_{90^\circ}^{\theta} = - pE\cos\theta$$

इसे सदिश रूप (vector form) में लिखने पर द्विध्रुव की ऊर्जा यह होती है

$$U(\theta) = - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \qquad (3.40)$$

समीकरण (3.40) से यह पता चलता है कि U निम्नतम (अधिकांशतः ऋणात्मक) होता है जब द्विध्रुव क्षेत्र दिशा के अनुदिश अर्थात् ($\theta = 0^\circ$) हो और अधिकतम (अधिकांशतः धनात्मक) होता है जबकि यह क्षेत्र दिशा की विपरीत दिशा अर्थात् ($\theta = 180^\circ$) में हो।

इस इकाई में हमने जो कुछ पढ़ा है, आइए उसका संक्षिप्त विवरण हम यहां दे दें।

3.8 सारांश

- विद्युत क्षेत्र $\mathbf{E}$ का रेखा समाकल $-\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ एकक धन आवेश को बिंदु A से बिंदु B तक ले जाने में किए गए कार्य W के बराबर होता है अर्थात्

$$W = -\int_A^B \mathbf{E}.\, d\mathbf{r}$$

- किसी विद्युत क्षेत्र में एकक धन आवेश को एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक ले जाने में किया गया कार्य दो बिंदुओं के बीच के पथ पर निर्भर नहीं करता है।

- किसी विद्युत क्षेत्र के विरुद्ध एकक धन आवेश को अनंत से किसी बिंदु तक ले जाने में किया गया कार्य उस बिंदु पर के विभव (potential) के नाम से जाना जाता है।

- बिंदु आवेश q से r दूरी पर स्थित बिंदु पर विभव ϕ_r यह होता है :

$$\phi_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- दो बिंदुओं B और A के बीच का विभवान्तर ϕ_{BA} एकक धन आवेश को A से B तक ले जाने में किए गए कार्य के बराबर होता है

$$W = q\,\phi_{BA} = q(\phi_B - \phi_A)$$

- विभवान्तर का मात्रक वोल्ट है। बिंदुओं A और B के बीच का विभवान्तर एक वोल्ट होता है, यदि एकक धन आवेश को इन दो बिंदुओं के बीच ले जाने में किया गया कार्य एक जूल के बराबर हो।

- किसी बिंदु पर विद्युत क्षेत्र $\mathbf{E}$ उस बिंदु पर विभव ϕ की ऋण प्रवणता (negative gradient) के बराबर होता है :

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi$$

- द्विध्रुव के अक्ष पर स्थित किसी बिंदु पर द्विध्रुव का विद्युत क्षेत्र यह होता है।

$$\mathbf{E} = \frac{2\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \text{जहां } r >> a$$

और द्विध्रुव अक्ष के लंब अर्धक (perpendicular bisector) रेखा पर किसी बिंदु पर विद्युत क्षेत्र यह होता है :

$$\mathbf{E} = \frac{-\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \text{जहां } r >> a$$

जहां r द्विध्रुव के केन्द्र से उस बिंदु की दूरी है जहां विद्युत क्षेत्र ज्ञात किया जा रहा है; और $\mathbf{p}$ द्विध्रुव आघूर्ण सदिश है।

- द्विध्रुव के अक्ष के साथ θ कोण बनाने वाली रेखा के किसी भी बिंदु P पर विभव का मान

$$\phi = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ होता है}$$

जहां $\mathbf{r}$ एकक सदिश है जिसकी दिशा द्विध्रुव के केन्द्र से उस बिंदु P तक है जहां क्षेत्र ज्ञात करना है।

- एकसमान विद्युत क्षेत्र में एक द्विध्रुव पर वर्तन प्रभाव (turning effect) पड़ता है। द्विध्रुव पर लग रहा बल आघूर्ण τ यह होता है

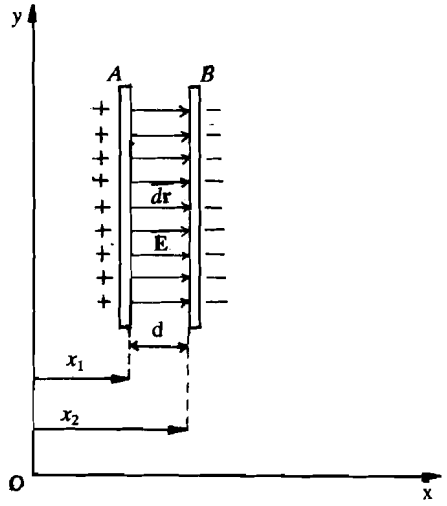
$$\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ होती है। जब $\mathbf{p}$, $\mathbf{E}$ के समांतर होता है, तब यह निम्नतम होती है।

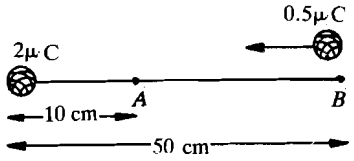
3.9 अंत में कुछ प्रश्न

1) दिखाइए कि एक बंद पथ के लिए विद्युत क्षेत्र **E** का रैंखा समाकल शून्य के बराबर होता है ।

2) दिखाइए कि धन तथा ऋण आवेशित दो समतल समांतर प्लेटों के बीच विद्युत क्षेत्र **E** का मान, उन प्लेटों के बीच विभवान्तर तथा उनके बीच की दूरी के अनुपात के बराबर होता है । यहां आप यह मान सकते हैं कि विद्युत क्षेत्र, प्लेटों के बीच के स्थान में ही सीमित है, जैसा कि चित्र 3.14 में दिखाया गया है ।



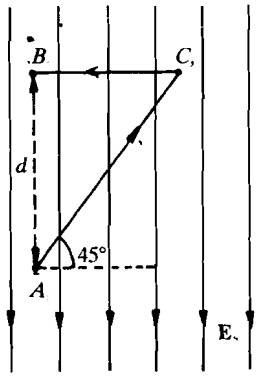
चित्र 3.14



चित्र 3.15

3) जैसा कि चित्र 3.15 में दिखाया गया है, 2 μC के आवेश से 10 cm और 50 cm की दूरियों पर स्थित दो बिंदुओं A और B पर विभव ज्ञात कीजिए । 0.05 μC के आवेश को B से A तक ले जाने के लिए आवश्यक कार्य भी ज्ञात कीजिए ।

4) यह मान कर कि परीक्षण आवेश q_0 बिना किसी त्वरण के, चित्र 3.16 में दिखाए गए पथ, के अनुदिश A से B तक जाता है, बिंदुओं A और B के बीच का विभवान्तर ज्ञात कीजिए ।



चित्र 3.16

3.10 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1) चित्र 3.17 देखिए । बिंदु A से एक अन्य बिंदु B तक आवेश q से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र **E** का रेखा समाकल यह होता है :.

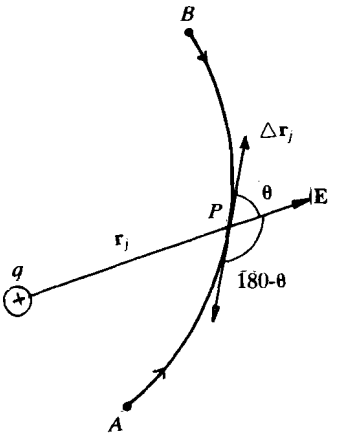
$$\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ r_j\to 0}} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\,(r_j)\,.\,\Delta\mathbf{r_j}$$

जहां $\Delta\,\mathbf{r_j}$, A से B तक के पथों की स्पर्शरेखाओं के अनुदिश है । किसी बिंदु P पर $\mathbf{E}\,(r_j)$ और $\Delta\,\mathbf{r_j}$ के अदिश गुणनफल को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\mathbf{E}\,(r_j)\,\cdot\,\Delta\mathbf{r_j} = |\mathbf{E}(r_j)|\;|\Delta\mathbf{r_j}|\;\cos\theta$$

जहां θ, $\mathbf{E}\,(r_j)$ और $\Delta\,\mathbf{r_j}$ के बीच का कोण है । अब, यदि B से A तक रेखा समाकल का मान ज्ञात करना हो, तो अदिश गुणनफल A से B तक के रेखा समाकल के संगत अदिश गुणनफलों का ऋणात्मक होगा । ऐसा इसलिए है, क्योंकि (चित्र 3.17 देखें) एक विशेष रेखा खंड के लिए A से B तक का रेखा समाकल ज्ञात करते समय यदि **E** और r_j के बीच का कोण θ होता है तो B से A तक का रेखा समाकल ज्ञात करते वक्त **E** और r_j के बीच का कोण $180° - \theta$ हो जाता है । अतः

$$\int_B^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\,(r_j)\,\cdot\,\Delta\mathbf{r_j} = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$$



2) बल **F** द्वारा किया गया कार्य

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (xy\,\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy)$$

$$= \int_C (xy\,dx - y^2\,dy)$$

जहां C (0, 0) से (2, 1) तक के परवलयिक पथ $y = \frac{x^2}{4}$ को दर्शाता है। x और dx के पदों में y और dy के लिए प्रतिस्थापन करने पर निम्नलिखित समाकल प्राप्त होता है

$$\int_0^2 \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^5}{32}\right) dx = \left[\frac{x^4}{16} - \frac{x^6}{192}\right]_0^2 = \frac{2}{3}$$

यहां चर x के लिए 0 से 2 सीमाओं के बीच समाकल का मान ज्ञात किया गया है।

3) मान लीजिए विद्युत क्षेत्र **E** है और पथ लंबाई का अल्पांश (element of path length) $d\mathbf{r}$ है। क्योंकि **E** और $d\mathbf{r}$ दोनों समांतर है। इसलिए इन दोनों सदिशों के बीच का कोण θ शून्य होगा। तब किया गया कार्य

$$W = -\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= -\int_C E\,(\cos 0^\circ)\,dr$$

$$= -\int_C E\,dr$$

$$\therefore W = -Ed \qquad \left(\because \int_C dr = d\right)$$

4) न्यूक्लियस पर आवेश $q = Ze = 79 \times 1.6 \times 10^{-19}$C और $r = 6.6 \times 10^{-15}$m

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} = \frac{(9\times10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}})\,(79\times1.6\times10^{-19}\mathrm{C})}{6.6\times10^{-15}\mathrm{m}}$$

$$= 1.7 \times 10^7\ \mathrm{NmC^{-1}} = 1.7 \times 10^7\mathrm{V}\ (\because \mathrm{NmC^{-1}} = \mathrm{JC^{-1}})$$

5) एक बैटरी के धन टर्मिनल से ऋण टर्मिनल तक जाने में इलेक्ट्रॉन (एक ऋण आवेशित कण) उच्च विभव वाले बिंदु से निम्न विभव वाले बिंदु की ओर जाता है। क्योंकि

$q = -1.6 \times 10^{-19}C$

और $\phi_A - \phi_B = -12\mathrm{V}$

$\therefore$ किया गया कार्य $W = q\,(\phi_A - \phi_B)$

$= (-1.6 \times 10^{-19}\mathrm{C})\,(-12\mathrm{V}) = 1.92 \times 10^{-18}\mathrm{J}$

6) $$\mathbf{E} = -\left[\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right]$$

जहां $\phi = x\,(y^2 - 4x^2)$

$$\therefore \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\,[xy^2 - 4x^3] = y^2 - 12x^2$$

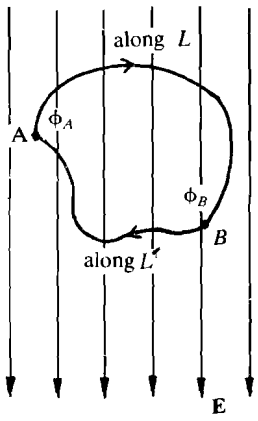
$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y}\,[xy^2 - 4x^3] = 2xy$$

और

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial z}\,[xy^2 - 4x^3] = 0$$

$$\therefore \mathbf{E} = -[\hat{\mathbf{i}}\,(y^2 - 12x^2) + \hat{\mathbf{j}}\,(2xy) + \hat{\mathbf{k}}\,(0)]$$

$$= (12x^2 - y^2)\,\hat{\mathbf{i}} - 2xy\,\hat{\mathbf{j}}$$



चित्र 3.18

अंत में कुछ प्रश्न

1) आइए हम A से प्रारंभ और A पर ही समाप्त होने वाला एक बंद पथ लें, जैसा कि चित्र 3.18 में दिखाया गया है। मान लीजिए B इस बंद पथ पर एक बिंदु है। यदि ϕ_A और ϕ_B क्रमशः A और B पर विभव हो, तो हम यह लिख सकते हैं

$$-\int_{A}^{B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \phi_B - \phi_A \qquad (3.41)$$

L के अनुदिश

और $-\int_{A}^{B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \phi_B - \phi_A \qquad (3.42)$

L' के अनुदिश

क्योंकि

$$\int_{A}^{B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{B}^{A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

L' के अनुदिश $\qquad$ L' के अनुदिश

$$\therefore -\int_{B}^{A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \phi_A - \phi_B \qquad (3.43)$$

L' के अनुदिश

समीकरणों (3.41) और (3.43) को जोड़ने पर हमें प्राप्त होता है

$$-\int_{A}^{B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \int_{B}^{A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \phi_B - \phi_A + \phi_A - \phi_B = 0$$

L के अनुदिश $\qquad$ L' के अनुदिश

अर्थात् बंद पथ के अनुदिश विद्युत क्षेत्र का रेखा समाकल शून्य के बराबर होता है।

वैकल्पिक विधि

1) पथ स्वातन्त्र्य की संकल्पना (Concept of path independence) का भी उपयोग किया जा सकता है:

$$\int_{A}^{B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A}^{B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

L के अनुदिश $\qquad$ L' के अनुदिश

या $\int_{A}^{B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \int_{A}^{B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$

$$\text{या} \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

L के अनुदिश $\quad$ L' के अनुदिश

($L + L'$ का अर्थ बंद पथ है।)

2) मान लीजिए A और B, d दूरी पर धन तथा ऋण आवेशित दो प्लेटें हैं। मान लीजिए $\mathbf{E}$ दोनों प्लेटों के बीच एकसमान विद्युत क्षेत्र है। तब हमें यह प्राप्त होता है :

$$-\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = (\phi_B - \phi_A)$$

जहां ϕ_A और ϕ_B क्रमशः प्लेट A और B के विभव हैं।

इस स्थिति में $\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ को $\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{i}}\, dx$, के रूप में लिख कर और इस बात की ओर ध्यान देकर कि $\mathbf{E}$ और $\hat{\mathbf{i}}\, dx$ दोनों समांतर है, हम यह लिख सकते हैं

$$\phi_B - \phi_A = -\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{E}\, dx = -E\,|x|_{x_2}^{x_1}$$

$$= -E\,(x_2 - x_1) = -E\,d$$

या

$$\phi_A - \phi_B = Ed$$

$$\therefore E = \frac{\phi_A - \phi_B}{d}$$

अर्थात् धन तथा ऋण आवेशित दो समांतर प्लेटों के बीच विद्युत क्षेत्र का परिमाण इन दोंनो के बीच के विभवान्तर तथा उनके बीच की दूरी के अनुपात के बराबर होता है।

3) आवेश q से r दूरी पर स्थित बिंदु पर विभव ϕ_r यह होता है :

$$\phi_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \qquad (3.19)$$

जहां $q = 2\mu C = 2\times10^{-6}C$, $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9\times10^9\ Nm^2\ C^{-2}$ और $r = 0.10m$ और $0.50m$ है।

समीकरण (3.19) का प्रयोग करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$\phi_{0.10} = (9\times10^9\ Nm^2\ C^{-2})\ \frac{2\times10^{-6}C}{0.10m} = 1.8\times10^5 V$$

$$\phi_{0.50} = (9\times10^9\ Nm^2\ C^{-2})\ \frac{2\times10^{-6}C}{0.50m} = 0.36\times10^5 V$$

किया गया कार्य $W = q'\,(\phi_{0.10} - \phi_{0.50})$, जहां $q' = 0.05\times10^{-6}C$,

$$\therefore W = (0.05\times10^{-6}C)\,(1.8\times10^5 - 0.36\times10^5)V$$

$$= 7.2\times10^{-3}\ J.$$

4) हम यह लिख सकते हैं

$$\phi_B - \phi_A = (\phi_B - \phi_C) + (\phi_C - \phi_A)$$

$$= -\int_C^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \int_A^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

C से B तक के पथ के लिए $\mathbf{E}$ और $d\mathbf{r}$ एक दूसरे पर लंब होते हैं। इसलिए,

$$\int_C^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{E}\ dr \cos 90^\circ = 0. \text{ अतः } -\int_C^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

इससे निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$\phi_B - \phi_A = -\int_A^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

A से C तक के पथ के लिए $\mathbf{E}$ और $d\mathbf{r}$ के बिंदु का कोण 135° है।

$$\therefore \int_A^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^C E\ dr \cos 135^\circ$$

$$= \int_A^C E\ dr \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= -\frac{E}{\sqrt{2}} \int_A^C dr = -\frac{E}{\sqrt{2}}\ (AC) = -\frac{E}{\sqrt{2}}\ \sqrt{2}\ d$$

$$= -Ed$$

क्योंकि $AC = d/\cos 45^\circ = \sqrt{2}d$

$$\therefore \phi_B - \phi_A = -\int_A^C E \cdot d\mathbf{r}$$

$$= Ed$$

यदि परीक्षण आवेश बिंदु A से सीधे बिंदु B तक जाये तो भी विभवान्तर का यही मान प्राप्त होगा।

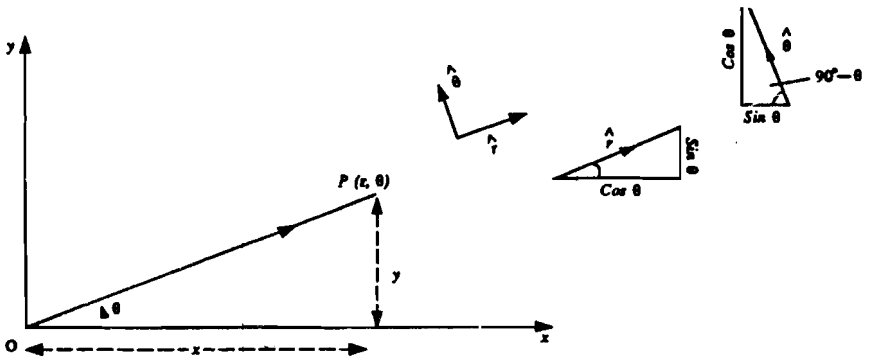
3.11 परिशिष्ट

ध्रुवीय निर्देशांक (Polar coordinates)

कार्तीय निर्देशांकों (cartesian co-ordinates) के अलावा आप ध्रुवीय निर्देशांकों का भी प्रयोग करेंगे। वृत्तीय सममिति से संबंधित प्रश्नों को हल करने में ध्रुवीय निर्देशांक काफी सहायक होते हैं। यांत्रिकी में आपने वृत्तीय गति के बारे अवश्य पढ़ा होगा। वृत्तीय गति से संबंधित प्रश्नों को गणितीय रूप में हल करने के लिए कार्तीय निर्देशांकों के उपयोग की अपेक्षा ध्रुवीय निर्देशांकों का उपयोग करना अधिक सहज रहता है।

ध्रुवीय निर्देशांक में किसी बिंदु P (x, y) को (r, θ) के रूप में लिखा जाता है। यहां r मूल बिंदु O से बिंदु P तक की दूरी को व्यक्त करता है तथा θ धनात्मक x-अक्ष एवं O से बिंदु P को मिलाने वाली सरल रेखा के बीच के कोण को व्यक्त करता है। चित्र A·1 देखें।

A.1



चित्र A.1 : ध्रुवीय निर्देशांकों एवं एकक सदिश $\hat{r}$ तथा $\hat{\theta}$ दो सदिशों के योगफल के रूप में।

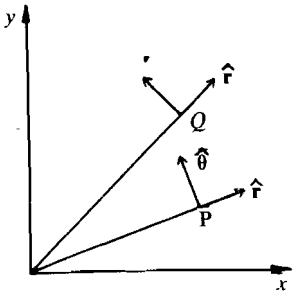
OP को P का स्थिति सदिश कहते हैं। x-अक्ष पर OP का प्रक्षेप P का x निर्देशांक तथा y-अक्ष पर OP का प्रक्षेप P का निर्देशांक व्यक्त करता है। (x, y) और (r, θ) में निम्न संबंध होता है।

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \tag{A.1}$$

सदिश OP (**r**) को दो सदिशों के योगफल के रूप में निम्न प्रकार लिखा जाता है :

$$\mathbf{r} = \hat{\imath}\, x + \hat{\jmath}\, y \tag{A.2}$$

आइए हम बिंदु P पर एकक सदिश $\hat{r}$ और $\hat{\theta}$ को इस प्रकार परिभाषित करें कि $\hat{r}$ की दिशा उस ओर हो जिस ओर r के मान में वृद्धि हो रही हो तथा $\hat{\theta}$ की दिशा उस ओर हो जिस ओर θ के मान में वृद्धि हो रही हो, जैसा कि चित्र A.1 में दिखाया गया है। $\hat{\theta}$ की दिशा वहीं होती है जो कि केन्द्र O और त्रिज्या r वाले वृत्त के बिंदु P पर स्पर्शरेखा की होती है। $\hat{r}$ और $\hat{\theta}$ एकक सदिश हैं। इन्हें दो सदिशों के योगफल के रूप में लिखा जा सकता है। $\hat{r}$ को x-दिशा में प्रक्षिप्त करने पर $\hat{r}$ के x-घटक के रूप में $\cos\theta$ प्राप्त होता है और y-दिशा में प्रक्षिप्त करने पर $\hat{r}$ के y-घटक (component) के रूप में $\sin\theta$ प्राप्त होता है। चित्र A.1 देखिए। अतः



चित्र A.2 : दो अलग-अलग बिन्दुओं पर एकक सदिश।

$$\hat{r} = \hat{\imath}\cos\theta + \hat{\jmath}\sin\theta \tag{A.3}$$

इसी प्रकार $\hat{\theta}$ को x-दिशा और y-दिशा में प्रक्षिप्त करने पर x-घटक के रूप में $\sin\theta$ और y-घटक के रूप में $\cos\theta$ प्राप्त होता है। चित्र A.1 देखिए, अतः

$$\hat{\theta} = -\hat{\imath}\sin\theta + \hat{\jmath}\cos\theta \tag{A.4}$$

ध्यान दीजिए कि $\hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0$, $\hat{r} \cdot \hat{r} = 1 = \hat{\theta} \cdot \hat{\theta}$ है। चित्र A.2 को देखने पर आप पायेंगे कि P पर के एकक सदिश $\hat{r}$ और $\hat{\theta}$, Q पर के एकक सदिश $\hat{r}$ और $\hat{\theta}$ के बराबर नहीं है। जब भी आप एक बिंदु से दूसरे बिंदु की ओर जाते हैं तो इन एकक सदिशों की दिशाएं बदल जाती हैं। यदि आप समीकरण (A.3) और (A.4) को θ के सापेक्ष आंशिकतः अवकलित करें, तो आपको यह प्राप्त होगा :

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = -\hat{\imath}\sin\theta + \hat{\jmath}\cos\theta = \hat{\theta}$$

और

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta}$$

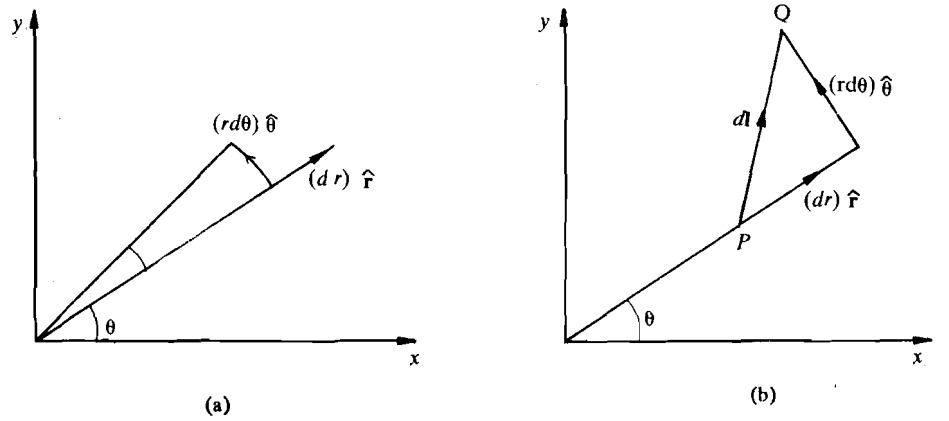
(x, y) निर्देशांक में सदिश $\mathbf{A}$ को x, y-दिशाओं के अनुदिश इसके घटकों के रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{i}} A_x + \hat{\mathbf{j}} A_y$$

इसी प्रकार यदि A_r और A_θ (r, θ) निर्देशांक में घटक हो तो हम $\mathbf{A}$ को इस रूप में लिख सकते हैं

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{r}} A_r + \hat{\boldsymbol{\theta}} A_\theta$$

(r, θ) निर्देशांक में डेल (∇) संकारक (operator) को लिखने के लिए हमें r और θ की दिशाओं में लंबाई में अत्यणु परिवर्तन करने की आवश्यकता होती है। r-दिशा में लंबाई में अत्यणु परिवर्तन dr होता है और θ-दिशा में यह $rd\theta$ होता है। यहां $d\theta$ को, जो कि केवल कोण में हुये परिवर्तन को व्यक्त करता है, r से गुणा करना होता है जिससे कि $P(r, \theta)$ पर θ दिशा में लंबाई में अत्यणु परिवर्तन प्राप्त किया जा सके।



चित्र A.3 : (क) r और θ दिशाओं में लंबाई के अत्यांश (ख) विस्थापन $d\mathbf{l}$ को $\hat{\mathbf{r}}$ (dr) और $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ $(rd\theta)$ के योगफल के रूप में व्यक्त किया है।

(x, y) निर्देशांक में अत्यणु विस्थापन $d\mathbf{l}$ को इस रूप में लिखा जाता है।

$$d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{i}}\, dx + \hat{\mathbf{j}}\, dy$$

इसी प्रकार (r, θ) निर्देशांक में (चित्र A.3 ख देखिए) $d\mathbf{l}$ को इस रूप में लिखा जा सकता है।

$$d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{r}}\, dr + \hat{\boldsymbol{\theta}}\, (rd\theta)$$

अब (r, θ) निर्देशांकों में डेल संकारक प्राप्त किया जा सकता है। इसके लिए एक अदिश फलन (scalar function) ϕ लीजिए। मान लीजिए बिन्दु $P(r_1\, \theta_1)$ पर इसका मान $\phi_1(r_1, \theta_1)$ है और बिंदु $Q\ (r_2, \theta_2)$ पर इसका मान $\phi_2(r_2, \theta_2)$ है। यदि $PQ = d\mathbf{l}$ एक अत्यणु विस्थापन हो, तो

$$\phi_2\ (r_2, \theta_2) - \phi_1\ (r_1, \theta_1) = d\phi$$

क्योंकि बिंदु (r_1, θ_1) और (r_2, θ_2) एक दूसरे के निकट है, इसलिए हम $d\phi$ को इस रूप में लिखते हैं

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r}\, dr + \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\, d\theta \qquad \text{(A.5)}$$

$$= (\nabla \phi) \cdot d\mathbf{l}$$

$\nabla\phi$ को (r, θ) निर्देशांक में लिखने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$(\nabla \phi) = \hat{\mathbf{r}}\, (\nabla \phi)_r + \hat{\boldsymbol{\theta}}\, (\nabla \phi)_\theta \qquad \text{(A.6)}$$

जहां $(\nabla\phi)_r$ और $(\nabla\phi)_\theta$ क्रमशः r-घटक और θ-घटक हैं। अतः

$$(\nabla \phi) \cdot d\mathbf{l} = \{\hat{\mathbf{r}}\, (\nabla \phi)_r + \hat{\boldsymbol{\theta}}\, (\nabla \phi)_\theta\} \cdot (\hat{\mathbf{r}}\, dr + \hat{\boldsymbol{\theta}}\, rd\theta)$$

$$= (\nabla \phi)_r\, dr + (\nabla \phi)_\theta\, rd\theta$$

$d\phi = \dfrac{\partial \phi}{\partial r}\, dr + \dfrac{\partial \phi}{\partial \theta}\, d\theta$, के साथ इसकी तुलना करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$(\nabla \phi)_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \text{ तथा } (\nabla \phi)_\theta = \frac{1}{r}\, \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \qquad \text{(A.7)}$$

अतः ध्रुवी निर्देशांक (polar coordinates) में डेल संकारक यह होता है

$$\nabla = \left\{ \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right\} \qquad \text{(A.8)}$$

उदाहरण

ध्रुवी निर्देशांकों का उपयोग कर किसी प्रश्न को हल करने में कितनी आसानी होती है, इसे समझने के लिए आइए हम एक वृत्त में अचर चाल से चल रहे एक कण की गति पर विचार करें। मान लीजिए मूल बिंदु, त्रिज्या r वाले वृत्त के केन्द्र पर है और कण की चाल v है। तब हम यह लिख सकते हैं

$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2 =$ अचर
$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2 =$ अचर

इनमें से पहले समीकरण को समय के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0 \quad \text{या} \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$$

और दूसरे समीकरण का अवकलन करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$2\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \quad \text{or} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0 \text{ जहां } \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

इन्हें देखने से पता चलता है कि प्रत्येक बिंदु पर वेग $\mathbf{v}$, $\mathbf{r}$ पर समकोण बनाता है और त्वरण $\mathbf{a}$, $\mathbf{v}$ पर समकोण बनाता है। इससे यह अर्थ निकलता है कि त्वरण $\mathbf{a}$ या तो $\mathbf{r}$ के समांतर है या $\mathbf{r}$ के प्रति समांतर। समय के सापेक्ष $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$ का अवकलन करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$$
$$\therefore v^2 = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = -r\,a\cos\theta$$

क्योंकि v^2 धनात्मक है, इसलिए $\cos\theta < 0$ है, जिसका अर्थ $\theta = \pi$ है, क्योंकि $\mathbf{r}$ और $\mathbf{a}$ या तो समांतर हैं या प्रति समांतर है। इससे यह स्पष्ट हो जाता है कि त्वरण $\mathbf{a}$, $\mathbf{r}$ के विपरीत दिशा में होती हैं और इसका परिमाण

$a = \dfrac{v^2}{r}$ होता है।

अतः त्वरण की दिशा केन्द्र की ओर होती है।

3.12 शब्दावली

अत्यणु	**Infinitesimal**
अदिश	**Scalar**
अभिविन्यास	**Orientation**
घटक	**Component**
त्रिज्य	**Radial**
द्विध्रुव	**Dipole**
परावैद्युत	**Dielectric**
प्रतिवेश	**Neighbourhood**
प्रतिसमांतर	**Antiparallel**
बल-आघूर्ण	**Torque**
रेखा समाकल	**Line integral**
संकारक	**Qperator**
संक्रिया	**Operation**
सदिश	**Vector**
समविभव	**Equipotential**
स्थानिक निर्देशांक	**Space cordinates**