इकाई 5 प्रायिकता सिद्धांत की आधारभूत संकल्पनाएं

इकाई की रूपरेखा

5.1 प्रस्तावना

अपने स्कूली पाठ्यक्रम में आपने यह पढ़ा ही होगा कि प्रायिकता की संकल्पना उन स्थितियों में लागू होती है जहां पूर्ण निश्चितता से किसी घटना का अंतिम परिणाम ज्ञात नहीं होता। ये वे स्थितियां हैं जिनमें एक से अधिक परिणाम होने की संभावना होती है। उदाहरण के लिए, जब हम एक संतुलित सिक्के को उछालते हैं-जैसे कि क्रिकेट के मैच में यह जानने के लिए कि कौन सी टीम पहले बल्लेबाज़ी करेगी – तब हमें अंतिम परिणाम मालूम नहीं होता। सिक्का चित्त भी पड़ सकता है और पट्ट भी। क्या हम यही बात मुक्त रूप से गिर रहे पत्थर की गति के बारे में कह सकते हैं? नहीं, क्योंकि इस स्थिति में हमें मालूम है कि पत्थर ज़मीन पर ही गिरेगा- यानि कि अंतिम परिणाम हम पूर्ण निश्चितता के साथ बता सकते हैं। अब मान लीजिए कि हम एक पासा (dice) फेंकते हैं। हम यह निश्चित रूप से नहीं बता सकते कि पासा गिरने पर कौन सी संख्या आएगी। वस्तुतः इस स्थिति में संभव परिणामों की संख्या 6 है और पासा फेंकने पर कौन सी संख्या आएगी, यह **संयोग** पर निर्भर करता है। इसी प्रकार के अनेक उदाहरण आप अपने दैनिक जीवन से ले सकते हैं। इसी बात को ध्यान में रखकर यह सही कहा गया है कि विश्व की दो भाषाएं अंग्रेजी और गणित हैं तथा प्रायिकता सिद्धांत गणित की भाषा है जिसका दैनिक जीवन से गहरा संबंध है। प्रायिकता सिद्धांत द्वारा तमाम संयोग परिघटनाओं की अनिश्चितताओं का गणितीय निदर्शन किया जाता है। अतः यह आवश्यक है कि हम प्रायिकता सिद्धांत को अच्छी तरह से समझें।

प्रायिकता के गणितीय सिद्धांत को विकसित करने के लिए हमें ऐसे साधनों की आवश्यता होती है जिनके द्वारा हम किसी प्रयोग के परिणाम को प्रस्तुत कर सकें। प्रयोग के कुछ अत्यंत सरल उदाहरण हैं, एक अनभिनत सिक्के को उछालना, एक अच्छी तरह से फैंटी गई ताश की गड्डी से पत्ते निकालना, चुनाव के पहले लोगों का मत जानना और प्रक्षेपास्त्र छूटने के बाद नियमित समय-अंतराल पर उसका वेग मालूम करते रहना आदि। प्रयोगों से जुड़ी प्रायिकता की संकल्पनाएं हैं – **प्रतिदर्श समष्टि** (sample space) और **घटनाएं** (events)। हम आशा करते हैं कि पिछली कक्षाओं में आप इन संकल्पनाओं से अवश्य परिचित होंगे। फिर भी भाग 5.2 में हमने इन पर संक्षिप्त चर्चा की है ताकि आप इन संकल्पनाओं को दोहरा लें। हमने **संपूर्ण मिश्र प्रायिकता प्रमेयों** (total and

प्रायिकता सिद्धांत में 'प्रयोग' शब्द का अर्थ है कोई भी ऐसी प्रक्रिया जिससे आंकड़े जनित (generate) किए जा सकते हों।

compound probability) पर संक्षिप्त चर्चा की हैं। इस भाग के अंत में हमने टामस बेज़ की **सप्रतिबंध प्रायिकताओं** (conditional probabilities) के एक रोचक अनुप्रयोग की चर्चा की है।

भाग 5.3 में हम आपको **यादृच्छिक चर** (random variable) की संकल्पना से परिचित कराएंगे। फिर असंतत और संतत प्रायिकता घनत्व फलनों पर चर्चा की है। वहां आप यह देखेंगे कि यादृच्छिक चर के माध्यमान (या प्रत्याशा) से बंटन के फैलाव या परिक्षेपण (dispersion) के बारे में कोई जानकारी नहीं मिलती। यह जानकारी पाने के लिए **प्रसरण** (variance), **सहप्रसरण** (covariance) और **सहसंबंध गुणांक** (correlation coefficient) जानना आवश्यक है। इकाई के अंत में हमने इन्हीं संकल्पनाओं की चर्चा की है। अगली इकाई में आप विभिन्न प्रकार के संतत बंटनों (continuous distributions) के बारे में पढ़ेंगे।

इस इकाई को पढ़ने के बाद हो सकता है कि आप इस विषय के बारे में और अधिक जानकारी पाना चाहें। अगर ऐसा हो तो आप 'प्रायिकता और सांख्यिकी' नामक गणित के पाठ्यक्रम MTE-11 का अध्ययन कर सकते हैं।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- प्रतिदर्श समष्टि को परिभाषित कर सकेंगे और किसी घटना की प्रायिकता परिकलित कर सकेंगे
- प्रायिकता सिद्धांत के मूलभूत प्रमेयों को स्थापित कर सकेंगे और कुछ सरल समस्याओं के लिए इस्तेमाल कर सकेंगे
- एक यादृच्छिक चर के लिए प्रत्याशा और प्रसरण परिकलित कर सकेंगे तथा
- सहप्रसरण और सहसंबंध गुणांक परिकलित कर सकेंगे।

5.2 प्रायिकता सिद्धांत के तत्त्व

अन्य गणितीय सिद्धांतों की तरह प्रायिकता सिद्धांत की भी कुछ आधारभूत संकल्पनाएं और शब्दावली होती हैं। हालांकि आप इन संकल्पनाओं के बारे में पहले भी पढ़ चुके हैं, फिर भी संपूर्णता की दृष्टि से हम यहां इन पर फिर से चर्चा कर रहे हैं। आइए हम इन संकल्पनाओं को दोहराएं।

5.2.1 आधारभूत शब्दावली

मान लीजिए कि हम एक सिक्का उछालते हैं। इसके संभव परिणाम हैं

(H) और (T)

H और T क्रमशः सिक्के के चित्त और पट्ट गिरने को प्रकट करते हैं। यहां ध्यान दें कि हमने सिक्के के अपने कोर पर खड़े रह जाने या लुढ़क कर कहीं चले जाने की संभावननाओं पर विचार नहीं किया है।

अब आइए हम इस प्रयोग को दो सिक्के उछालकर दोहराएं। इसके सभी संभव परिणामों के समुच्चय को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)$$

किसी प्रयोग के सभी संभव परिणामों के समुच्चय को प्रयोग की **प्रतिदर्श समष्टि** (sample space) कहा जाता है।

प्रतिदर्श समष्टि के प्रत्येक परिणाम को **प्रतिदर्श बिंदु** (sample point) कहा जाता है। प्रतिदर्श समष्टि

को ग्रीक प्रतीक ओमेगा Ω से प्रकट किया जाता है। पहले प्रयोग में प्रतिदर्श समष्टि के दो प्रतिदर्श बिंदु हैं:

$$\Omega = \{H, T\}$$

जबकि दूसरे प्रयोग में, प्रतिदर्श समष्टि के चार प्रतिदर्श बिंदु या अवयव हैं:

$$\Omega = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$$

यहां हम यह बता देना जरूरी समझते हैं कि प्रतिदर्श समष्टि के अवयवों की संख्या उस जानकारी पर भी निर्भर करती है जिसे हम प्रयोग के बारे में पाना चाहते हैं। इसे समझने के लिए, मान लीजिए कि हमें मालूम करना है कि दो सिक्कों को उछालने पर कितने पट्ट गिरे हैं। स्पष्ट है कि इस स्थिति में तीन संभावनाएं हैं: दोनों सिक्के पट्ट गिरें, केवल एक सिक्का गिरे और कोई भी सिक्का पट्ट नहीं गिरे। तब प्रतिदर्श समष्टि

$$\Omega = (2, 1, 0\}$$

के तीन अवयव होंगे। इसी प्रकार जब हम एक पासा फेंकते हैं और यह जानना चाहते हैं कि कौन सी संख्या आती है तब प्रतिदर्श समष्टि

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

होगी। पर अगर हम केवल यह जानना चाहते हैं कि आने वाली संख्या सम है या विषम तो प्रतिदर्श समष्टि

$$\Omega = \{\text{सम, विषम}\}$$

होगी। अब आप इन संकल्पनाओं पर एक बोध प्रश्न हल करना चाहेंगे।

बोध प्रश्न 1

प्रश्न पर 2 मिनट लगाएं

एक सिक्का उछाला जाता है। यदि सिक्का चित्त आता है, तो उसे फिर उछाला जाता है। अन्यथा एक बार पासा फेंका जाता है। प्रतिदर्श समष्टि बताइए।

अब आप यह पूछ सकते हैं कि क्या प्रतिदर्श बिंदुओं की संख्या सदैव परिमित होती है ? अगर नहीं, तो इस स्थिति में हम प्रतिदर्श समष्टि को किस प्रकार प्रकट करेंगे ? इन प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए आइए हम निम्नलिखित प्रयोग करें।

एक रेडियोएक्टिव पदार्थ (^{238}U, ^{232}Th, ^{239}Pu) α, β और γ विकिरण उत्सर्जित करता है। एक गणित्र (counter) द्वारा गिने गए ऐसे कणों की संख्या एक निर्धारित संख्या से अधिक हो सकती है। ऐसी स्थितियों में प्रतिदर्श समष्टि को इस रूप में लिखा जाता है:

$$\Omega = \{x \mid x = 0, 1, 2, \ldots\}$$

शब्दों में इसे हम इस प्रकार पढ़ते हैं ; "Ω सभी x का समुच्चय है जबकि x सभी ॠणेत्तर पूर्णांकों का मान धारण करता हो।" कोष्ठक के अंदर दी गई खड़ी रेखा को जबकि पढ़ा जाता है। इसी प्रकार यदि हम दो पासे फेंकें तो प्रतिदर्श समष्टि को हम इस प्रकार लिखते हैं

$$\Omega = \{(i, j \mid i = 1, 2, \ldots, 6; j = 1, 2, \ldots, 6\}$$

आप उस वृत्त की परिसीमा पर स्थिति बिंदुओं के समुच्चय को किस प्रकार निरूपित करेंगे जिसका केन्द्र मूल बिंदु पर हो और जिसकी त्रिज्या 2 हो ? इसे हम इस प्रकार लिखते हैं:

$$\Omega = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$$

यहां यह बता देना जरूरी है कि उस प्रतिदर्श समष्टि को जिसमें परिमित बिंदु होते हैं **विविक्त प्रतिदर्श समष्टि** (discrete sample space) कहा जाता है।

अनुभव हमें बताता है कि अक्सर किसी प्रयोग में अलग-अलग परिणामों को जानने के बजाय हम प्रयोग में विशेष **घटनाओं** के घटने के बारे में जानकारी पाना चाहते हैं । उदाहरण के लिए, मान लीजिए कि हम एक पासा फेंकते हैं । घटना E हो सकती है कि परिणाम 3 से भाज्य हो । यह घटना तब घटेगी, जबकि परिणाम प्रतिदर्श समष्टि $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ के उपसमुच्चय $E = \{3,6\}$ का एक अवयव हो । इसी प्रकार, जब दो सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है तब कुछ संभव घटनाएं ये हो सकती हैं:

$E_1 = \{(H, H)\}$ = दोनों सिक्के चित्त आते हैं

$E_2 = \{(H, H), (H, T), (T, H)\}$ = कम से कम एक सिक्का चित्त आता है

$E_3 = \{(T, T)\}$ = कोई सिक्का चित्त नहीं आता

इसका अर्थ यह है कि हम प्रत्येक घटना के साथ प्रतिदर्श बिंदुओं का एक संग्रह संबंधित कर सकते हैं जो कि प्रतिदर्श समष्टि का एक उपसमुच्चय (subset) हो । अतः हम कह सकते हैं कि

> **घटना** प्रतिदर्श समष्टि का एक उपसमुच्चय होती है ।

E_1 और E_3 जैसी घटनाओं को, जिनमें केवल एक प्रतिदर्श बिंदु है, **सरल घटना** (simple event) कहा जाता है । क्या हम यह नहीं कह सकते कि Ω एक **निश्चित घटना** (sure event) है ? स्पष्ट है कि ऐसा हम यकीनन कह सकते हैं ।

अघट घटना (null event) में, जिसे ϕ से प्रकट किया जाता है, एक भी अवयव नहीं होता । अघट घटना को परिभाषित करने वाली एक जानी पहचानी स्थिति एक जैविक प्रयोग में हो सकती है, जहां हमें अपनी आंख से सूक्ष्मजीव का पता लगाने के लिए कहा जाता है ।

आइए अब हम एक ऐसा उदाहरण लें जिसमें इं. गां. रा. मु. वि. के कर्मचारियों की धूम्रपान की आदतों को दर्ज़ क़िया जाता है । इस स्थितिं में संभव प्रतिदर्श समष्टि यह हो सकती है:

Ω = {(धूम्रपान न करने वाले), (कभी कभी धूम्रपान करने वाले), (काफ़ी धूम्रपान करने वाले)}

यदि धूम्रपान करने वालों का उपसमुच्चय कोई घटना हो, तो धूम्रपान न करने वालों का उपसमुच्चय एक अलग घटना होगी, जो धूम्रपान करने वालों के समुच्चय का पूरक (complement) होती है । अतः हम कह सकते हैं कि

> Ω के सापेक्ष घटना E का **पूरक**, Ω के उन सभी अवयवों का समुच्चय है, जो कि E में नहीं होते ।

स्पष्ट है कि अघट घटना Ω का पूरक होती है, अर्थात्

$$\phi = \Omega^c$$

ऊपर की गई चर्चा को आपने अच्छी तरह से समझ लिया है या नहीं, यह जानने के लिए आप नीचे दिए गए बोध प्रश्न को हल कीजिए ।

बोध प्रश्न 2

प्रश्न पर 5 मिनट लगाएं

एक साथ उछाले गए दो सिक्कों के लिए प्रतिदर्श समष्टि की सभी संभव घटनाएं बताइए ।

आप पिछली कक्षाओं में समुच्चयों के सम्मिलन (union) और सर्वनिष्ठ (intersection) की आधारभूत संक्रियाओं के बारे में अवश्य पढ़ चुके होंगे । आइए अब हम इनकी सहायता से नई घटनाओं को परिभाषित करें । आप देखेंगे कि इस तरह प्राप्त घटनाएं उसी प्रतिदर्श समष्टि का उपसमुच्चय होंगी

जिसकी कि दी हुई घटनाएं हैं। उदाहरण के लिए एक पासे को फेंकने में माना कि E_1 वह घटना है कि सम संख्या ही आएगी और E_2 वह घटना है कि तीन से बड़ी संख्या आएगी। तब

$$E_1 = \{2, 4, 6\}$$

और

$$E_2 = \{4, 5, 6\}$$

प्रतिदर्श समष्टि $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ के उपसमुच्चय हैं। घटना $E = \{4,6\}$ जिसमें E_1 और E_2 के सर्व (common) अवयव हैं, E_1 और E_2 का सर्वनिष्ठ है। गणितीय रूप में हम लिखते हैं कि

$$E = E_1 \cap E_2$$

> दो घटनाओं का **सर्वनिष्ठ** वह घटना है जिसमें दोनों घटनाओं के सर्व अवयव विद्यमान हैं।

इससे यह पता चलता है कि यदि E_1 और E_2 का कोई सर्व प्रतिदर्श बिंदु न हो तो

$$E_1 \cap E_2 = \phi$$

तब E_1 और E_2 को **असंयुक्त** (disjoint) या **परस्पर अपवर्जी** (mutually exclusive) कहा जाता है। इसकी औपचारिक परिभाषा यह है: दो घटनाओं को परस्पर अपवर्जी कहा जाता है, जबकि इनमें कोई भी सर्व अवयव न हो। आप यह आसानी से देख सकते हैं कि सरल घटनाएं परस्पर अपवर्जी घटनाएं होती हैं।

प्रायः हमारी रुचि एक प्रयोग से संबंधित दो घटनाओं में से कम से कम एक घटना के घटित होने की होती है। इस तरह, पासा फेंकने के प्रयोग में यदि $E_1 = \{1, 3, 5\}$ और $E_2 = \{3, 4, 5\}$ हो तो हमारी रुचि E_1 या E_2 या दोनों के घटित होने में हो सकती है। ऐसी घटना, जिसे E_1 और E_2 का **सम्मिलन** कहा जाता है, तभी संभव होती है, जबकि परिणाम उपसमुच्चय $\{1, 3, 4, 5\}$ का एक अवयव हो। इसे प्रतीक $E_1 \cup E_2$ से प्रकट किया जाता है , इससे यह तुरंत पता चलता है कि Ω को अलग-अलग सभी सरल घटनाओं के सम्मिलन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

घटना की प्रायिकता

अभी तक हमने आपको प्रतिदर्श समष्टि और घटना की संकल्पनाओं से परिचित कराया है। एक अन्य अति महत्त्वपूर्ण संकल्पना है एक घटना के घटित होने की **प्रायिकता** की। हमारी ज़रूरतों के हिसाब से यहां केवल उन्ही स्थितियों पर विचार करना काफ़ी है जिनमें प्रतिदर्श समष्टि में परिमित अवयव हों और सभी परिणाम प्रसंभाव्य हों। इस प्रकार के प्रयोगों में एक घटना के घटित होने की संभावना का परिकलन वास्तविक संख्याओं, जिन्हें प्रायिकताएं कहा जाता है, के समुच्चय द्वारा किया जाता है। इन संख्याओं के मान 0 से 1 के बीच होते हैं। घटना A की प्रायिकता को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \qquad (5.1)$$

जहां $n(\Omega)$ सभी भिन्न परिणामों को प्रकट करता है जिनके घटने की संभावना समान है और $n(A)$ उन परिणामों को प्रकट करता है जो घटना A के संगत हैं।

इसे दर्शाने कि लिए, आइए हम एक अनभिनत पासे को फेंकें और उस घटना की प्रायिकता ज्ञात करें जिसमें पासे पर आने वाली संख्या सम होगी। आपको याद होगा कि इस प्रयोग की प्रतिदर्श समष्टि

$$\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

होती है। अतः $n(\Omega) = 6$. क्योंकि पासा अनभिनत है, इसलिए इन सभी परिणामों के आने की संभावना समान है। यदि A सम संख्या की घटना को प्रकट करता है तो

$$n(A) = 3$$

अतः

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

अब हम चाहेंगे कि आप निम्नलिखित घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात करें: पासा फेंकने पर (क) तीन का एक गुणज आता है, (ख) एक ऐसी सम संख्या आती है जो तीन का गुणज भी है और (ग) एक सम संख्या या तीन का एक गुणज आता है। आप देखेंगे कि पहली घटना के लिए $P(A) = 1/3$, दूसरी घटना के लिए $P(B) = 1/6$ और तीसरी घटना के लिए $P(C) = 2/3$.

प्रायिकता सिद्धांत की समस्याएं हल करने में हम प्रायः संचयविन्यास विश्लेषण (combinatorial analysis) के सरल परिणामों का प्रयोग करते हैं। स्कूल में आपने इन्हें अवश्य पढ़ा होगा। इसलिए तुरंत संदर्भ के लिए हम यहां इनका संक्षिप्त विवरण ही देंगे।

5.2.2 प्रारंभिक संचयविन्यास विश्लेषण

आइए हम दो समुच्चय लें :

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \text{ और } B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$$

जहां m उन तरीकों की संख्या है, जिनके द्वारा A में किसी संक्रिया (operation) को किया जा सकता है, और n उन तरीकों की संख्या है जिनके द्वारा B में किसी संक्रिया को किया जा सकता है। मान लीजिए कि हम A से एक अवयव a_i और B से एक अवयव b_j लेते हैं। ऐसा करने से हमें जो समुच्चय प्राप्त होता है, उसे प्रायः हम प्रतिदर्श (a_i, b_j) कहते हैं। अब प्रश्न यह उठता है कि ऐसे कितने प्रतिदर्श संभव हैं। स्पष्ट है कि उत्तर mn होगा। इस परिणाम को **गुणन नियम** (multiplication rule) कहा जाता है और इसका कथन इस प्रकार दिया जा सकता है :

यदि एक संक्रिया को m तरीकों से किया जा सकता हो और एक दूसरी स्वतंत्र संक्रिया को इन तरीकों में से प्रत्येक तरीक़े के लिए n तरीक़ों से किया जा सकता हो, तो एक साथ इन दोनों संक्रियाओं को mn तरीकों से किया जा सकता है।

इसे अच्छी तरह से समझने के लिए आइए हम एक उदाहरण लें।

उदाहरण 1

पांच व्यक्तियों को कितनी विधियों से एक पंक्ति में बैठाया जा सकता है ?

हल

पहले व्यक्ति को अनुक्रम की पांच संभव स्थितियों में बैठाया जा सकता है। इनमें से एक स्थिति को चुन लेने के बाद दूसरे व्यक्ति को शेष चार स्थितियों में बैठाया जा सकता है। इसी प्रकार प्रक्रिया को जारी रखते हुए आप यह आसानी से ज्ञात कर सकते हैं कि विधियों की कुल संख्या $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ है।

जब हमें काफ़ी बड़ी संख्याओं पर विचार करना होता है, जैसे एक पात्र में एक गैस के अणु, तब यह गणना बहुत कठिन हो जाती है कि वस्तु क्रमीकरण (ordering) या विन्यास कितने तरीक़ों से किया जा सकता है। लेकिन विभिन्न विन्यासों की संख्या, जिन्हें क्रमचय (permutations) कहा जाता है, की गणना गणितीय रूप से की जा सकती है। आइए अब हम क्रमचय पर चर्चा करें।

क्रमचय

तीन अक्षर a, b और c लीजिए। इनके संभव क्रमचय ये हैं : $abc, acb, cab, cba, bca, bac$.

आप विभिन्न क्रमों को लिखे बिना ही गुणन नियम का प्रयोग करके इस परिणाम को प्राप्त कर सकते हैं। पहली स्थिति के लिए $n_1 = 3$ विकल्प हैं, दूसरी स्थिति में, इनमें से प्रत्येक के लिए $n_2 = 2$ विकल्प हैं और n_1 और n_2 के प्रत्येक मान के लिए $n_3 = 1$. अतः विकल्पों की कुल संख्या $n_1 n_2 n_3 = (3)(2)(1) = 6$ होगी। व्यापक रुप में n अलग-अलग वस्तुओं को $n(n-1)(n-2) \ldots (3)(2)(1)$ विधियों से रखा जा सकता है। आपको याद होगा कि इस गुणनफल को प्रतीक $n!$ से प्रकट किया जाता है जिसे "n क्रमगुणित" या "n फ़ैक्टोरियल" (n factorial) पढ़ा जाता है। अतः हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि

> **क्रमचय**, वस्तु समुच्चय की सभी वस्तुओं या उनमें से कुछ वस्तुओं का विन्यास होता है और n अलग-अलग वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या $n!$ होती है।

इस परिणाम का व्यापकीकरण (generalisation) करने के लिए, आइए हम निम्नलिखित समुच्चय लें

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$$

मान लीजिए हम समुच्चय B से अवयव लेकर आमाप 2 वाले प्रतिदर्श (b_i, b_j) बनाते हैं। इस प्रकार के प्रतिदर्शों की संख्या कितनी होगी ? यह आसानी से देखा जा सकता है कि यह संख्या n^2 होगी जबकि

(i) अवयवों की पुनरावृत्ति की गई हो, अर्थात् गणना में $(b_1, b_1), (b_2, b_2), \ldots$ जैसे प्रतिदर्श शामिल किए गए हों।

(ii) $(i = j)$ के लिए प्रतिदर्शों (b_i, b_j) और (b_j, b_i) को अलग-अलग गिना गया हो।

आगम (induction) विधि से आमाप r वाले प्रतिदर्शों के लिए, हम कह सकते हैं कि इन प्रतिदर्शों की कुल संख्या n^r है। यह एक महत्त्वपूर्ण परिणाम है और इसका कथन इस प्रकार दिया जा सकता है:

कुल n वस्तुओं में से (जैसे कि लाल, नीले और हरे रंग की गेदें) r वस्तुओं (माना कि लाल गेंदों) के समूह को निकालने की विधियों की संख्या, जबकि पुनरावृत्ति की अनुमति हो (यानि निकाली हुई गेंदों को फिर से रख सकें) n^r होती है।

लेकिन अगर समान अवयवों वाले प्रतिदर्शों की उपेक्षा कर दी जाए, तो आमाप दो वाले प्रतिदर्शों की संख्या $n(n-1)$ होगी। इससे हम कह सकते हैं कि पुनरावृत्ति के बिना आमाप r वाले प्रतिदर्शों की संख्या

$$n(n-1) \ldots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad (5.2)$$

होती है। इसे अलग-अलग n वस्तुओं में से एक बार में r वस्तुओं के निकालने के क्रमचयों की संख्या कहा जाता है। इसे हम प्रतीक ${}^nP_r\,[= n!/(n-r)!]$ से प्रकट करते हैं।

अभी तक हमने भिन्न-भिन्न वस्तुओं के क्रमचयों पर विचार किया है। अर्थात् जब सभी वस्तुओं को अलग-अलग रूप में पहचाना जा सकता है। पर, यदि हम यह मान लें कि अक्षर b और c अक्षर x के बराबर हैं, तो a, b, c अक्षरों के 6 क्रमचय axx, axx, xax, xxa, xax और xxa होंगे। आप देख सकते हैं कि इनमें केवल तीन क्रमचय ही अलग-अलग हैं। अतः तीन अक्षरों से, जबकि दो अक्षर समान, हैं $3!/2! = 3$ अलग-अलग क्रमचय प्राप्त होते हैं। चार अलग-अलग अक्षरों से 24 अलग-अलग क्रमचय प्राप्त होते हैं। पर, यदि यह मान लिया जाए कि $a = b = x$ और $c = d = y$ तो हमें केवल $xxyy, xyxy, yxxy, yyxx, xyyx$ और $yxyx$ क्रमचय प्राप्त हो हैं। अतः हमें $4!/(2!)(2!) = 6$ अलग-अलग क्रमचय प्राप्त होते हैं। इस तरह, आप कह सकते हैं कि

यदि n वस्तुओं में n_1 वस्तुएं एक प्रकार की हैं, ..., n_2 वस्तुएं दूसरे प्रकार की हैं, n_k वस्तुएं kवें प्रकार की हैं, तो क्रमचयों की संख्या

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \ldots\ldots n_k!} \qquad (5.3)$$

होती है। संक्षेप में इसे हम $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots n_k}$ से व्यक्त करते हैं।

इसे अच्छी तरह से समझने कि लिए, आइए एक उदाहरण लें। दूर शिक्षण-पठन पर राष्ट्रमंडलीय शिक्षण संस्था द्वारा आयोजित एक अंतराष्ट्रीय सम्मेलन में सात विदेशी शिक्षाविद भाग ले रहे हैं। जिस होटल में इन्हें ठहराने की व्यवस्था की जा रही है वहां कुछ कमरों में तीन और कुछ में दो को एक साथ ठहराया जा सकता है। हम इन शिक्षाविदों को कमरों में कितने तरीक़ों से ठहरा सकते हैं ? यह संख्या

$$\frac{7!}{3!\, 2!\, 2!} = 210$$

होगी। अधिकांश प्रश्नों में हम क्रम पर विचार किए बिना ही n वस्तुओं में से r वस्तुएं चुनने की विधियों की संख्या मालूम करना चाहते हैं। इन चयनों को संच**य** (combinations) कहा जाता है। ऐसे **संचयों** की संख्या $\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$ होती है। इसे $\binom{n}{r, n-r}$ से या केवल $\binom{n}{r}$ से प्रकट किया जाता है। अतः हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि

एक साथ r वस्तुएं लेने पर, n वस्तुओं के संचयों की संख्या

$$^nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \qquad (5.4)$$

होती है।

इसे और अच्छी तरह से समझने के लिए आप निम्नलिखित उदाहरण पढ़िए।

उदाहरण 2

इं. गां. रा. मु. वि. ने अपने बी. एस-सी कार्यक्रम की प्रगति को सुनिश्चित करने के लिए अपने शैक्षणिक संकाय के सदस्यों को लेकर कुछ समितियां बनाने का प्रस्ताव किया है। सबसे पहले गणित और भौतिकी संकाय के सदस्यों को लेकर समिति बनाने का निर्णय लिया गया है। यदि भौतिकी संकाय में 4 सदस्य हों और गणित संकाय में 5 सदस्य हों, और एक समिति में दो गणितज्ञ और एक भौतिकीविद रखे जाने हों तो कितनी समितियां बनायी जा सकती हैं ?

हल

पांच गणितज्ञों में से दो गणितज्ञों का चयन करने की विधियों की संख्या

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10$$

होगी। और, चार भौतिकीविदों में से एक भौतिकीविद का चयन करने की विधियों की संख्या

$$\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!\,3!} = 4$$

है। गुणन नियम द्वारा $n_1 = 10$ और $n_2 = 4$, लेकर कुछ बनायी जाने वाली समितियों की संख्या परिकलित कर सकते हैं:

$$n = n_1 n_2 = 10 \times 4 = 40$$

अब आप यह देखेंगे कि प्राय: उस स्थिति में किसी घटना की प्रायिकता आसानी से ज्ञात की जा सकती है जबकि अन्य घटनाओं की प्रायिकताएं ज्ञात होती हैं। यह बात उस स्थिति में भी लागू हो सकती है, जबकि घटना विशेष को दो अन्य घटनाओं के सम्मिलन के रूप में या अन्य घटनाओं के पूरक के रूप में प्रकट किया जा सकता हो। इस संबंध में कुछ महत्त्वपूर्ण नियमों और प्रमेयों का, जो कि जटिल स्थितियों में प्रायिकताओं के परिकलन को प्राय: सरल बना देते हैं, प्रयोग किया जा सकता है। अब हम इनका अध्ययन करेंगे।

5.2.3 मूलभूत प्रमेय

पहला प्रमेय घटनाओं के सम्मिलन (union) की प्रायिकता के बारे में है और इसे **संपूर्ण प्रायिकता प्रमेय** (theorem of total probability) या **योज्य नियम** (additive law) कहा जाता है। सरलता के लिए, आइए हम दो परस्पर अपवर्जी घटनाएं E और F लें। तब इनमें से एक घटना के घटित होने की प्रायिकता अलग-अलग घटनाओं के घटित होने की प्रायिकताओं के योग के बराबर होती है। गणितीय रूप में, यदि $E \cap F = \phi$, तब

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) \qquad (5.5)$$

परिमित प्रतिदर्श समष्टियों वाली सरल स्थिति के लिए समीकरण (5.1) का प्रयोग करके आप इसे आसानी से सिद्ध कर सकते हैं। क्योंकि $E \cap F = \phi$, इसलिए,

$$n(E \cup F) = n(E) + n(F) \qquad (5.6)$$

जिससे कि परिणाम

$$P(E \cup F) = \frac{n\,E \cup F)}{n(\Omega)} = \frac{n(E) + n(F)}{n(\Omega)}$$

$$= \frac{n(E)}{n(\Omega)} + \frac{n(F)}{n(\Omega)} = P(E) + P(F)$$

प्राप्त होता है। आप इस परिणाम को n परस्पर अपवर्जी घटनाओं $E_1, E_2, \ldots E_n$ पर भी लागू कर सकते हैं:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \ldots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n) \qquad (5.7a)$$

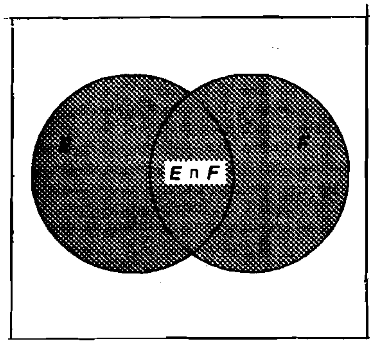
संक्षेप में हम इसे इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) \qquad (5.7b)$$

वेन आरेख में हम प्रतिदर्श समष्टि को एक आयत से और घटनाओं को उस आयत के अंदर बनाए गए वृत्तों से निरूपित करते हैं। चित्र रूप में यह आरेख घटनाओं और सगंत प्रतिदर्श समष्टि के बीच सबंधे प्रकट करता है।

यदि $E \cap F = \phi$ हो तो, समीकरण (5.5) के परिणाम का व्यापकीकरण किया जा सकता है। अर्थात् हम कोई भी दो घटनाएं ले सकते हैं। इस परिणाम को प्राय: संपूर्ण प्रायिकता प्रमेय कहा जाता है।

> **संपूर्ण प्रायिकता प्रमेय** : यदि E और F कोई दो घटनाएं हों, तो
>
> $$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) \qquad (5.8)$$



चित्र 5.1: E और $E \cup F$ को निरूपित करने वाला वेन आरेख

इस प्रमेय को सिद्ध करने के लिए चित्र 5.1 देखिए। इसे वैन आरेख (Venn diagram) कहा जाता है। यहां आप देखेंगे कि समीकरण (5.6) के वाम पक्ष की राशि, $P(E \cup F), E \cup F$ के प्रतिदर्श बिंदुओं की प्रायिकताओं का योगफल है। इसी प्रकार $P(E) + P(F), E$ की सभी प्रायिकताओं के योगफल और F की सभी प्रायिकताओं के योगफल का योग है। इसमें $E \cap F$ की प्रायिकताओं को दो बार लिया गया है। अत: $P(E \cup F)$ को प्राप्त करने के लिए हमें इस प्रायिकता को एक बार अवश्य घटाना होगा।

इस प्रमेय को अच्छी तरह से समझने के लिए यहां हम एक उदाहरण दे रहे हैं।

उदाहरण 3

पहली पच्चीस प्राकृतिक संख्याओं से एक संख्या यादृच्छया ले ली गई है। इस संख्या के 2 या 3 से भाज्य होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल

मान लीजिए E चुनी गई संख्या के 2 से भाज्य होने की घटना है और F चुनी गई संख्या के 3 से भाज्य होने की घटना है। इसलिए, यहां $n(E) = 12$, $n(F) = 8$ और $n(E \cap F) = 4$. अतः

$$P(E) = \frac{12}{25}, P(F) = \frac{8}{25} \text{ और } P(E \cap F) = \frac{4}{25}$$

समीकरण (5.8) का प्रयोग करने पर हमें यह परिणाम प्राप्त होता है:

$$P(E \cup F) = \frac{12}{25} + \frac{8}{25} - \frac{4}{25} = \frac{16}{25}$$

अब आप नीचे दिए गए बोध प्रश्न को हल करके यह देख सकते हैं कि आप उपर्युक्त संकल्पना को कितना समझ पाएं हैं। हम आशा करते हैं कि इसके द्वारा आपको प्रायिकता की गणना करने में मदद मिलेगी।

बोध प्रश्न 3

प्रश्न पर 15 मिनट लगाएं

(i) गणितीय रूप में समीकरण (5.8) को सिद्ध कीजिए।

(ii) $P(E \cup F \cup G)$ परिकलित कीजिए।

(iii) दो पासों को फेंकने पर उन पर आने वली संख्याओं के जोड़ के 7 या 11 होने की प्रायिकता परिकलित कीजिए।

आइए हम पासा फेंकने वाले प्रयोग को फिर से करें। मान लीजिए आपको यह बता दिया जाता है कि आने वाली संख्या सम है या विषम। तब यह जानकारी पासेपर छः आने की प्रायिकता के परिकलन को प्रभावित करेगी। आइए अब हम उस स्थिति में एक घटना के घटने की प्रायिकता परिकलित करें जबकि यह मालूम हो कि कोई अन्य घटना, जिससे यह घटना प्रभावित हो सकती है, घट चुकी है। इसे **सप्रतिबंध प्रायिकता** (conditional probability) कहा जाता है। इसे $P(F|E)$ से प्रकट किया जाता है। इस प्रतीक को इस प्रकार पढ़ा जाता है "F की प्रायिकता जबकि यह दिया हुआ हो कि E घट चुकी है।"

यदि E दिया हुआ हो, तो F की सप्रतिबंध प्रायिकता

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} \quad \text{यदि } P(E) > 0 \tag{5.9}$$

द्वारा परिभाषित की जाती है।

इस परिणाम को सिद्ध करने से पहले आइए हम एक उदाहरण लें।

उदाहरण 4

दो फर्म एक ही प्रकार के वोल्टमीटर बनाती हैं। फर्म A, 1,000 वोल्टमीटर बनाती है जिनमें से 30 वोल्टमीटर खराब निकल जाते हैं। फर्म B, 4,500 वोल्टमीटर बनाती है जिनमें से 100 वोल्टमीटर खराब निकल जाते हैं। एक वोल्टमीटर यादृच्छया उठाया जाता है और वह खराब निकलता है। उस घटना की प्रायिकता ज्ञात कीजिए जिसमें वोल्टमीटर **फर्म B का बनाया हुआ** है।

हल

मान लीजिए कि घटना F उठाए गए वोल्टमीटर के खराब होने की घटना को प्रकट करता है और घटना E उठाए गए वोल्टमीटर के फर्म B द्वारा बनाए जाने की घटना को प्रकट करता है। तब संबंध

$$P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

का प्रयोग करके हम अभीष्ट प्रायिकता परिकलित करते हैं :

$$P(E \mid F) = \frac{(100/5500)}{(130/5500)} = \frac{10}{13}$$

यह देखने के लिए कि वोल्टमीटर के खराब होने की जानकारी से इस बात की प्रायिकता पर प्रभाव पड़ता है कि नहीं कि यह वोल्टमीटर फर्म B का है कि नहीं, आइए हम $P(E)$ मालूम करें :

$$P(E) = \frac{n(E)}{N(\Omega)} = \frac{4500}{5500} = \frac{9}{11}$$

यह $P(E \mid F)$ से अधिक है।

एक और दृष्टांत के रूप में निम्नलिखित उदाहरण लीजिए।

उदाहरण 5

एक विमान की समय पर छूटने की प्रायिकता $P(D) = 0.83$ है। इसकी समय पर पहुंचने की प्रायिकता $P(A) = 0.82$ है और समय पर छूटने और पहुंचने की प्रायिकता $P(D \cap A) = 0.78$ है।

(i) यदि विमान ठीक समय पर पहुंचता है तो उसके ठीक समय पर छूटने की प्रायिकता क्या होगी?

(ii) यदि विमान ठीक समय पर पहुंचा तो इस घटना की प्रायिकता क्या है कि वह ठीक समय पर छूटा था ?

हल

(i) यदि विमान ठीक समय पर छूटा हो, तो समय पर उसके पहुंचने की प्रायिकता यह होगी

$$P(A \mid D) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)}$$

$$= \frac{0.78}{0.83} = 0.94$$

(ii) यदि विमान ठीक समय पर पहुंचा हो, तो ठीक समय पर विमान के छूटने की प्रायिकता यह होगी

$$P(D \mid A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{0.78}{0.82} = 0.95$$

नीचे दिए गए बोध प्रश्न को हल करके आप यह जान सकते हैं कि उपर्युक्त संकल्पना को आप कहां तक समझ पाए हैं।

बोध प्रश्न 4

प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

एक छोटे शहर में 500 पुरुष और 400 महिलाएं हैं, जिनमें से 460 पुरुष और 140 महिलाएं रोज़गार में लगे हुए हैं। शहर में नए उद्योग लगाने से संबद्ध विज्ञापन के लिए इनमें से एक व्यक्ति

यदृच्छया चुनना है। चुने गए व्यक्ति के रोज़गार में लगे होने की प्रायिकता परिकलित कीजिए।

सप्रतिबंध प्रायिकता की संकल्पना से हम जानते हैं कि दी हुई जानकारी के आधार पर किसी घटना की प्रायिकता में परिवर्तन हो सकता है। पर कुछ स्थितियों में यह संभव है कि

$$P(E \mid F) = P(E) \quad \text{जहां } P(F) \neq 0 \tag{5.10}$$

अर्थात् घटना E के घटित होने पर घटना F के घटित होने की प्रायिकता पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता। तब यह कहा जाता है कि घटना E और घटना F **स्वतंत्र हैं**। इस विशिष्ट स्थिति में आप यह सत्यापित कर सकते हैं कि

$$P(E \cap F) = P(E)\,P(F) \tag{5.11}$$

इसे नीचे दिए गए उदाहरण में दर्शाया गया है।

उदाहरण 6

मान लीजिए 3 सिक्के उछाले गए हैं। यदि E पहले सिक्के के पट्ट पड़ने की घटना है, और F तीसरे उछाल पर चित्त पड़ने की घटना है तो क्या E और F स्वतंत्र हैं?

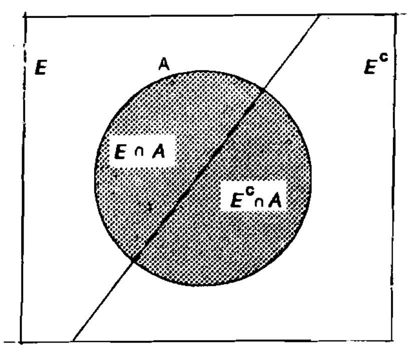
हल

यहां $n(\Omega) = 8\,(= 2^3)$, $n(E) = 4, n(F) = 4, n(E \cap F) = 2.$

अत:

$$P(E) = 1/2, P(F) = 1/2, P(E \cap F) = 1/4$$

क्योंकि समीकरण (5.11) संतुष्ट हो जाता है, इसलिए हम कह सकते हैं कि E और F स्वतंत्र हैं।



चित्र 5.2: A, E और E^c घटनाओं के लिए बेन आरेख

अंग्रेज दार्शनिक टॉमस बेज (Thomas Bayes) ने सप्रतिबंध प्रायिकताओं का एक महत्त्वपूर्ण अनुप्रयोग किया। इसे दर्शाने के लिए आइए हम बोध प्रश्न 4 को फिर से लें। मान लीजिए कि आपको यह बताया गया है कि रोज़गार में लगे व्यक्तियों में से 36 और बेरोज़गार व्यक्तियों में से 12 एक सामाजिक संगठन **शांति मंच** के सदस्य हैं। इस स्थिति में आइए हम यह मान लें कि इस घटना कि प्रायिकता A है। तब चित्र 5.2 को देखकर हम A को दो परस्पर अपवर्जी घटनाओं $E \cap A$ और $E^c \cap A$ के सम्मिलन के रूप में लिख सकते हैं :

$$A = (E \cap A) \cup (E^c \cap A)$$

समीकरण (5.5) का प्रयोग करके हम लिख सकते हैं कि

$$P(A) = P\,[(E \cap A) \cup (E^c \cap A)]$$

$$= P(E \cap A) + P(E^c \cap A)$$

इस परिणाम को समीकरण (5.7) के साथ समायोजित करने पर हमें यह व्यंजक मिलता है :

$$P(A) = P(E)\,P(A \mid E) + P(E^c)\,P(A \mid E^c)$$

बोध प्रश्न 4 के अनुसार रोज़गार में लगे व्यक्तियों की कुल संख्या 600 है और बेरोज़गार व्यक्तियों की कुल संख्या 300 है। इसलिए

$$P(E) = \frac{600}{900} = \frac{2}{3}, P(A \mid E) = \frac{36}{600} = \frac{3}{50}$$

$$P(E^c) = \frac{300}{900} = \frac{1}{3} \quad \text{और} \quad P(A \mid E^c) = \frac{12}{300} = \frac{1}{25}$$

अत:

$$P(A) = \left[\frac{2}{3}\right]\left[\frac{3}{50}\right] + \left[\frac{1}{3}\right]\left[\frac{1}{25}\right]$$
$$= \frac{4}{75}$$

उस स्थिति में, जहां प्रतिदर्श समष्टि को k उपसमुच्चयों में विभाजित किया गया है, इस उदाहरण के व्यापकीकरण को **संपूर्ण प्रायिकता प्रमेय** (theorem of total probability) कहा जाता है। इस प्रमेय पर विचार करने से पहले समुच्चय Ω के **विभाजन** (partition) की परिभाषा को फिर से याद कर लेना ज़रूरी है। समुच्चय $\{E_1, E_2, ... E_n\}$ को Ω का विभाजन कहा जाता है, यदि

(क) $E_i \subset \Omega$ जहां $i = 1, 2, \dots, n$

(ख) $E_i \cap E_j = \phi$ जहां $i, j = 1, 2, \dots n; i \neq j$

और

(ग) $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = \sum_{i=1}^{n} E_i = \Omega$ (5.12)

व्यापकीकृत संपूर्ण प्रायिकता प्रमेय

यदि $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ प्रतिदर्श समष्टि Ω का एक ऐसा विभाजन हो कि $i = 1, 2, ..., n$ के लिए $P(E_i) \neq 0$ तो Ω की किसी भी घटना A के लिए

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)\, P(A \mid E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i \cap A) \qquad (5.13)$$

इस परिणाम को सत्यापित करने के लिए हम देखते हैं कि परिभाषा के अनुसार

$$\Omega = E_1 \cup E_2 \cup ..... \cup E_n$$

अत:

$$A = A \cap \Omega = A \cap (E_1 \cup E_2 \cup .... \cup E_n)$$
$$= (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup \dots \cup (A \cap E_n)$$

और क्योंकि $A \cap E_i \subset E_i$ और परिभाषा के अनुसार E_i आदि असंयुक्त (disjoint) हैं, इसलिए यह भी स्पष्ट है कि $i \neq j$ के लिए

$$(A \cap E_i) \cap (A \cap E_j) = \phi$$

अत:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)\, P(A \mid E_i) \qquad (5.14)$$

अब हम बेज़ प्रमेय पर सीधे विचार कर सकते हैं।

बेज़ प्रमेय: यदि घटनाओं $E_1, E_2, \dots E_n$ से प्रतिदर्श समष्टि Ω का एक विभाजन प्राप्त होता हो, जहां $i = 1, 2, ..., n$ के लिए $P(E_i) \neq 0$ तो Ω की किसी भी घटना A के लिए जहां $P(A) \neq 0$,

$$P(E_i \mid A) = \frac{P(E_i \cap A)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i \cap A)} = \frac{P(E_i)\, P(A \mid E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)\, P(A \mid E_i)} \qquad (5.15)$$

इसे सत्यापित करने के लिए हम देखते हैं कि सप्रतिबंध प्रायिकता की परिभाषा के अनुसार

$$P(E_i|A) = \frac{P(E_i \cap A)}{P(A)}$$

अब हम अभीष्ट परिणाम प्राप्त करने के लिए हर में संपूर्ण प्रायिकता प्रमेय का प्रयोग करेंगे :

$$P(E_i|A) = \frac{P(E_i \cap A)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i \cap A)}$$

हर और अंश दोनों में किन्हीं दो घटनाओं के घटित होने के लिए गुणनात्मक नियम $[P(E_i \cap A) = P(E_i)\,P(A\,|\,E_i)]$ को लागू करके हम बेज़ प्रमेय को एक अधिक उपयोगी रूप में लिख सकते हैं :

$$P(E_i|A) = \frac{P(E_i)\,P(A\,|\,E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)\,P(A\,|\,E_i)}$$

इस प्रमेय को परिकल्पनाओं की प्रायिकताओं का सूत्र भी कहा जाता है, क्योंकि घटना A के घटने का ब्योरा देने के लिए घटनाओं $E_1, E_2, ..., E_n$ को परिकल्पनाएं माना जा सकता है। इन संकल्पनाओं को नीचे दिए गए उदाहरण में दर्शाया गया है।

उदाहरण 7

ट्रांसफ़ॉर्मर बनाने वाली एक कंपनी के चार एसम्बली संयंत्र हैं जो कि क्रमशः 30%, 20%, 40% और 10% की दक्षता से काम कर रहे हैं। इन संयंत्रों द्वारा बनाए गए ट्रॉसफ़ॉर्मरों के दोषपूर्ण होने की प्रायिकताएं क्रमशः 0.02, 0.03, 0.04 और 0.01 हैं। यदि एक ट्रॉसफ़ॉर्मर यदृच्छया लिया जाए, तो उसके दोषपूर्ण होने की प्रायिकता क्या होगी ? यदि यदृच्छया लिया गया ट्रॉसफ़ॉर्मर दोषपूर्ण हो, तो इसकी प्रायाकता क्या होगी कि यह चौथे संयंत्र में बना है ?

हल

मान लीजिए E चुने गए ट्रांसफ़ॉर्मर के दोषपूर्ण होने की घटना है और E_i उसके संयंत्र $i\,(i = 1, 2, 3, 4)$ में बने होने की घटना है। संपूर्ण प्रायिकता प्रमेय के अनुसार

$$P(E) = \sum_{i=1}^{4} P(E_i)\,P(E\,|\,E_i)$$

$$= (0.3)\,(0.02) + (0.2)\,(0.03) + (0.4)\,(0.03) + (0.1)\,(0.04)$$

$$= 0.028$$

समीकरण (5.15) का प्रयोग करने पर हमें यह परिणाम मिलता है:

$$P(E_4\,|\,E) = \frac{P(E_4)\,P(E\,|\,E_4)}{0.028} = \frac{0.004}{0.028} = \frac{1}{7}$$

अभी तक हमने आपको सप्रतिबंध तथा संपूर्ण प्रायिकताओं के आधारभूत प्रमेयों से परिचित कराया है। प्रायिकता सिद्धांत की एक आधारभूत संकल्पना यादृच्छिक चर (random variable) की संकल्पना है। अब हम इस संकल्पना से आपको परिचित कराएंगे।

5.3 यादृच्छिक चर

एक अनभिनत सिक्का उछालकर दो बच्चे खेल रहे हैं। प्रयोगों की प्रतिदर्श समष्टि $\Omega = \{H, T\}$ है। चित्त बोलने वाला बच्चा एक इकाई जीतता है, पर यदि चित्त बोलने पर पट्ट आता हो, तो वह एक इकाई हार जाता है। आप इस संगतता को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं :

$H \Leftrightarrow 1$ और $T \Leftrightarrow -1$

एक वास्तविक मान यादृच्छिक चर X लेकर, जो प्रत्येक स्थिति में प्रायिकता 1/2 से मान 1 और –1 धारण करता हो, हम इस परिणाम को गणितीय रूप में व्यक्त कर सकते हैं। अर्थात्

$$P(X = 1) = 1/2, \; P(X = -1) = 1/2$$

आइए अब हम एक पासा फेंकें। यदि X पासे पर आने वाली संख्या को प्रकट करता हो, तो इसके संभव मान 1, 2, 3, 4, 5, 6 होंगे, जिनमें से प्रत्येक के आने की प्रायिकता 1/6 है। इसी प्रकार, आइए हम दो सिक्के उछालें। तब X, जो पड़ने वाले चित्तों की संख्या निरूपित करता है, संख्यात्मक मान 2, 1 या 0 धारण कर सकता है जिनके आने की प्रायिकताएं क्रमशः 1/4, 1/2 और 1/4 हैं। ये संख्याएं प्रयोग के परिणाम से प्राप्त यादृच्छिक राशियां हैं। इन्हें हम यादृच्छिक चर X द्वारा धारण किए गए मान मानते हैं। अतः हम यह कह सकते हैं कि

> **यादृच्छिक चर** वह फलन है, जो प्रतिदर्श समष्टि Ω के प्रत्येक अवयव के साथ एक वास्तविक संख्या का संबंध स्थापित करता है।

यदि ω प्रतिदर्श समष्टि Ω का एक बिंदु हो और X एक यादृच्छिक चर हो, तो $X(\omega)$, बिंदु ω पर यादृच्छिक चर का मान है। प्रायः हमारी दिलचस्पी न तो X में होती है और न ही Ω में। बल्कि हम जानना चाहते हैं कि यादृच्छिक चर के अवस्था A में होने की प्रायिकता क्या है ? इसे $P(X \in A)$ से प्रकट किया जाता है।

यादृच्छिक चर को **असंतत यादृच्छिक चर** (discrete random variable) कहा जाता है, यदि इसका मान परिमित हो, अर्थात् जब संभव परिणामों का समुच्चय गणनीय हो। जब यादृच्छिक चर अगणनीय मान धारण करता हो, तो इसे **संतत यादृच्छिक चर** (continuous random variable) कहा जाता है। उदाहरण के लिए, अंतराल $[0, 1]$ में एक बिंदु की स्थिति एक संतत चर होती है।

अधिकांश व्यवहारिक समस्याओं में संतत यादृच्छिक चर, तापमान, जीवनकाल, ऊंचाई आदि मापे जा सकने वाले आकड़ों को निरूपित करते हैं, जबकि असंतत यादृच्छिक चर दुर्घटना में घायल व्यक्तियों की संख्या, दिए हुए प्रतिदर्श में दोषपूर्ण वस्तुओं की संख्या, आदि जैसे गणन आंकड़ों (count data) को निरूपित करते हैं।

हम यह जानते हैं कि असंतत यादृच्छिक चर अपना प्रत्येक मान एक निश्चित प्रायिकता से धारण करता है। प्रायः यादृच्छिक चर की सभी प्रायिकताओं को एक सूत्र से निरूपित कर देने से काफ़ी सुविधा हो जाती है। इस प्रकार का सूत्र संख्यात्मक मानों का एक फलन होगा जिसे हम $f(x_i)$ से प्रकट करते हैं, जिससे कि

$$f(x_i) = P(x = x_i), \qquad i = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.16a}$$

क्रमित युग्मों $(x_i, f(x_i))$ के समुच्चय को असंतत यादृच्छिक चर X का **प्रायिकता फलन** (probability function) या **प्रायिकता बंटन** (probability distribution) कहा जाता है, जबकि प्रत्येक संभव परिणाम x_i के लिए

(i) $$f(x_i) \geq 0 \tag{5.16b}$$

(ii) $$\sum_i f(x_i) = 1 \tag{5.16c}$$

संतत यादृच्छिक चर के लिए

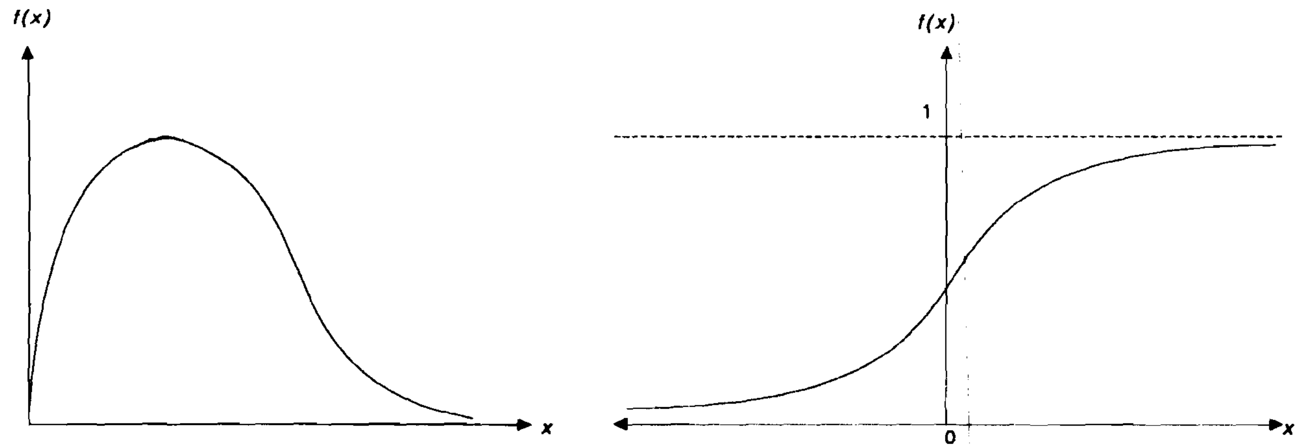
$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx \tag{5.17 a}$$

$$f(x) \geq 0 \qquad \text{सभी } x \text{ के लिए} \tag{5.17b}$$

और

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \tag{5.17c}$$

संतत बंटनों के अनेक रोचक उदाहरण देखने को मिलते हैं। इस खंड की इकाई 7 में आप यह पढ़ेंगे कि किसी प्रयोग की सांख्यिकीय त्रुटियों (statistical errors) का बंटन प्रसामान्य बंटन (normal distribution) होता है। गैस के अणुओं की चाल का बंटन मैक्सवेली बंटन होता है। रेडियोऐक्टिव नाभिकों के जीवनकाल या गैस के मुक्त पथ, चरघातांकी बंटन प्रदर्शित करते हैं। भौतिक निकायों के लिए मान्य दो बंटन चित्र (5.3) में दिखाए गए हैं।



चित्र 5.3: कुछ प्रतिरूपी संतत बंटन

अब हम यादृच्छिक चर की **प्रत्याशा** (expectation) परिभाषित करेंगे। इसका सांख्यिकी में विशेष महत्त्व है, क्योंकि इससे हमें इस बात की जानकारी मिल जाती है कि प्रायिकता बंटन कहां केन्द्रित है। लेकिन इससे मध्य के प्रति बंटन के फैलाव या मानों के परिक्षेपण का परिमाण नहीं मिलता। अतः हमें बंटन की विचरणशीलता का ज्ञान होना चाहिए। यादृच्छिक चर की विचरणशीलता के अति महत्त्वपूर्ण माप को **प्रसरण** (variance) कहा जाता है। आइए अब हम इन पर विस्तार से चर्चा करें।

5.3.1 प्रत्याशा और प्रसरण

आइए हम यह मान लें कि यादृच्छिक चर X प्रायिकताओं $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ ... से मान $x_1, x_2, x_3, ...$ धारण करता है। X की गणितीय प्रत्याशा या माध्य की परिभाषा यह होती है:

$$E(X) = \langle X \rangle = \sum_i x_i f(x_i) \tag{5.18}$$

जबकि $\sum_i x_i f(x_i) < \infty$, अर्थात् जबकि श्रेणी निरपेक्षतः अभिसरित होती हो और X असंतत हो।

यदि X संतत है, तो यह परिभाषा होती है

$$E(X) = \langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx \tag{5.19}$$

इस संकल्पना में निहित विचार को और अच्छी तरह से समझने के लिए नीचे दिए उदाहरणों को भली-भांति समझ लें।

उदाहरण 8

मान लीजिए X एक अनभिनत पासे को फेंकनें पर आने वाली संख्या को प्रकट करता है। $E(X)$ परिकलित कीजिए।

हल

हम जानते हैं कि X का मान 1 से 6 तक कुछ भी हो सकता है जिनमें से प्रत्येक संख्या के आने की प्रायिकता 1/6 है । अत:

$$E(X) = (1)(1/6) + (2)(1/6) + (3)(1/6) + (4)(1/6) + (5)(1/6) + (6)(1/6)$$
$$= 3.5$$

उदाहरण 9

हाइड्रोजन परमाणु के लिए

$$f(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \frac{1}{\pi a_0^3} \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right) d\mathbf{r}$$

है जहां a_0 प्रथम बोर त्रिज्या (Bohr radius) है और r इलेक्ट्रॉन और प्रोटान के बीच की दूरी है । $E(r)$ परिकलित कीजिए ।

हल

आप यहां यह देखेंगे कि $f(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}$ संतत बंटन है । अत: समीकरण (5.19) का प्रयोग करके हम लिख सकते हैं कि

$$E(r) = \frac{1}{\pi a_0^3} \int_0^\infty r \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right) d\mathbf{r}$$

इस पाठ्यक्रम के खंड 1 की इकाई 3 में आपने पढ़ा है कि $d\mathbf{r} = 4\pi r^2 dr$. इस व्यंजक को ऊपर दिए गए व्यंजक में प्रतिस्थापित करके हम यह लिख सकते हैं कि

$$E(r) = \frac{4}{a_0^3} \int_0^\infty r^3 \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right) dr$$

इस समाकल का मान ज्ञात करने के लिए हम

$$\frac{2r}{a_0} = x$$

लेकर चर परिवर्तन करते हैं । इस प्रकार हमें $dr = (a_0/2)\, dx$ और $r^3 dr = (a_0/2)^4 x^3 dx$ प्राप्त होता है । इन परिणामों को उपर्युक्त समाकल में प्रतिस्थापित करने पर हमें यह परिणाम मिलता है:

$$E(x) = \int_0^\infty \exp(-x)\, x^3 dx$$
$$= \frac{a_0}{4} \Gamma(4)$$
$$= 6\, a_0$$

समाकल

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^n\, dx$$

गामा फलन परिभाषित करता है । इस फलन का एक महत्त्वपूर्ण गुणधर्म है कि

$$\Gamma(n) = n\,\Gamma(n-1)$$

जहां $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ और $\Gamma(1) = 1$.

प्रायिकता सिद्धांत की भाषा में x की प्रत्याशा को मूलबिंदु के प्रति बंटन का **प्रथम आघूर्ण** (first moment) कहा जाता है ।

जैसा कि हमने पहले बताया है, बंटन के बारे में अधिक परिशुद्ध जानकारी प्राप्त करने के लिए हम x का **प्रसरण** परिभाषित करते हैं । इसे σ_X^2 या Var(X) से प्रकट किया जाता है । जब X असंतत होता है, तब X का प्रसरण निम्न व्यंजक परिभाषित करता है:

$$\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X) = \sum_x [x - E(X)]^2 f(x) \qquad (5.20a)$$

और जब X संतत होता है तब

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \, f(x)\, dx \qquad (5.20b)$$

प्रसरण के धनात्मक वर्गमूल को X का **मानक विचलन** (standard deviation) कहा जाता है। इस गुणधर्म की सहायता से हम समीकरण (5.20a) को एक वैकल्पिक और उपयोगी रूप में लिख सकते हैं। ऐसा करने के लिए याद करें कि हम असंतत चर के लिए लिख सकते हैं कि

$$\text{Var}(X) = \sum_x [x - E(X)]^2 f(x) \qquad (5.21)$$

$$= \sum_x x^2 f(x) - 2E(X) \sum_x x\, f(x) + [E(X)]^2 \sum_x f(x)$$

$$= E(X^2) - [E(X)]^2 \qquad (5.22)$$

क्योंकि $\sum_x x f(x) = E(X)$ और $\sum_x f(x) = 1.$

अब हम चाहेंगे कि संतत X के लिए इस परिणाम को आप सिद्ध करें। इसके लिए आपको उपर्युक्त प्रक्रिया को चरणशः दोहराना होगा और हर चरण में जोड़ की जगह समाकलन करना होगा।

आइए हम उदाहरण 8 को फिर से लें। हम जानते हैं कि

$$E(X) = 3.5$$

$x_i - E(X)$ के मानों का समुच्चय निम्नलिखित है

$$\{-2.5, -1.5, -0.5, 0.5, 1.5, 2.5\}$$

अतः समीकरण (5.20a) से यह परिणाम प्राप्त होता है

$$\text{Var}(X) = 2[(2.5)^2 \times (1/6) + (1.5)^2 \times (1/6) + (0.5)^2 \times (1/6)]$$
$$= (1/3) \times [6.25 + 2.25 + 0.25]$$
$$= (1/3) \times (8.75) = 2.92$$

X के प्रसरण को माध्य $\langle X \rangle$ के प्रति बंटन का **द्वितीय आघूर्ण** (second moment) कहा जाता है। इससे हमें प्रायिकता बंटन के बारे में विस्तृत जानकारी मिलती है।

अब हम चाहेंगे कि आप नीचे दिये गए बोध प्रश्न को हल करें।

प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 5

मानलीजिए कि एक लोकप्रिय कोल्ड ड्रिंक की साप्ताहिक मांग संतत यादृच्छिक चर X है। यदि इसकी प्रायिकता

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1) & 1 < x < 2 \\ 0 & x \text{ के अन्य मानों के लिए} \end{cases}$$

हो तो माध्य और प्रसरण परिकलित कीजिए।

5.3.2 सहप्रसरण और सहसंबंध गुणांक

प्रसरण या मानक विचलन केवल तभी महत्त्वपूर्ण होते हैं जबकि हम समान माप-इकाइयों वाले दो या अधिक बंटनों की तुलना करते हैं। और, हम बंटन की एकसमानता या विचरणशीलता पर टिप्पणी दे सकते हैं। यानि कि कुछ व्यक्तियों की लंबाइयों के बंटन के प्रसरण और उनके बुद्धिसमंको (aptitude scores) के बंटन के प्रसरण की तुलना करना अर्थहीन है। यही कारण है कि अभी तक

हमने अध्ययन को एक-चर बंटनों (univariate distribution) तक ही सीमित रखा है। फिर भी, हमारे सामने प्राय: ऐसी स्थितियां आती हैं जिनमें एक से अधिक चर होते हैं। मान लीजिए, N विद्यार्थियों की एक कक्षा है और इस कक्षा के प्रत्येक विद्यार्थी की लंबाई x और वज़न y का रिकॉर्ड हमारे पास है। यह **द्विचर बंटन** (bivariate distribution) का एक उदाहरण है। हम प्रत्येक विद्यार्थी के लिए विचरों का एक मान युग्म (x,y) परिभाषित कर सकते हैं। मान लीजिए कि युग्म (x,y) संयुक्त रूप से f बार आता है। तब स्पष्ट है कि

$$\sum_i f_i = N \tag{5.23}$$

और संगत प्रायिकताएं $f(x_i, y_i)$, f_i/N से प्राप्त हो जाती हैं।

यादृच्छिक चरों X और Y के बीच **सहप्रसरण** (covariance), जिसे $\mathrm{Cov}(X, Y)$ से प्रकट करते हैं, को निम्न रूप में परिभाषित किया जाता है:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \sum_i f(x_i, y_i)\,(x_i - \langle X \rangle)\,(y_i - \langle Y \rangle) \tag{5.24}$$

इस महत्त्वपूर्ण अभिधारणा को 1885 में गाल्टन (Galton) ने प्रस्तुत किया और यह दो विचरों के बीच साहचर्य की प्रकृति का अध्ययन करने में काफ़ी उपयोगी है। $\mathrm{Cov}(X, Y)$ के वैकल्पिक और अधिक प्रचलित सूत्र का कथन इस प्रकार दिया जा सकता है :

क्रमशः माध्य $\overline{X}$ और $\overline{Y}$ वाले दो यादृच्छिक चरों का सहप्रसरण

$$\mathrm{Cov}\,(X, Y) = E(XY) - \overline{X}\,\overline{Y} \tag{5.25}$$

इस परिणाम को सिद्ध करने के लिए हम देखते हैं कि

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\,(X, Y) &= \sum_x \sum_y (x - \overline{X})\,(y - \overline{Y})\,f(x, y)\\ &= \sum_x \sum_y (xy - \overline{X}y - x\overline{Y} + \overline{X}\,\overline{Y})\,f(x, y)\\ &= \sum_x \sum_y xy\,f(x, y) - \overline{X} \sum_x \sum_y y\,f(x, y)\\ &\quad - \overline{Y} \sum_x \sum_y x\,f(x, y) + \overline{X}\,\overline{Y} \sum_x \sum_y f(x, y)\end{aligned}$$

यदि हम $\overline{X}, \overline{Y}$ की परिभाषाओं और $\sum_x \sum_y f(x, y) = 1$ का प्रयोग करें तो हमें अभीष्ट परिणाम प्राप्त हो जाता है। जब X और Y संतत हों, तो सहप्रसरण

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \iint f(x, y)\,(x - \langle X \rangle)\,(y - \langle Y \rangle)\,dx\,dy \tag{5.26}$$

होता है। आप समीकरण (5.25) में दिए गए परिणाम को संतत X और Y के लिए भी सिद्ध कर सकते हैं।

यदि X और Y स्वतंत्र हों, तो यह आसानी से दिखाया जा सकता है कि

$$E(XY) = E(X)\,E(Y) \tag{5.27}$$

तब समीकरणों (5.25) और (5.27) से हमें यह परिणाम मिलता है:

$$\mathrm{Cov}\,(X, Y) = 0 \tag{5.28}$$

हालांकि दो यादृच्छिक चरों के बीच सहप्रसरण से उनके संबंध की प्रकृति के बारे में काफ़ी जानकारी मिल जाती है, लेकिन इसके परिमाण से संबंध की प्रबलता के बारे में कुछ पता नहीं चलता, क्योंकि $\mathrm{Cov}\,(X, Y)$ मापक्रम से मुक्त नहीं है। लेकिन हम सहसंबंध गुणांक (correlation coefficient) r_{XY} की सहायता से इस संबंध की प्रबलता मालूम कर सकते हैं। परिभाषा के अनुसार

$$r_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\mathrm{Cov}\,(X, Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y} \tag{5.29}$$

इस महत्त्वपूर्ण अभिधारणा को 1895 में कार्ल पियर्सन ने प्रस्तुत किया था। यदि X और Y स्वतंत्र हों, तो समीकरण (5.28) से यह पता चलता है कि

$$r_{XY} = 0 \tag{5.30}$$

लेकिन ध्यान रहे कि यह आवश्यक नहीं कि इसका विलोम भी सही हो। ऐसा भी हो सकता है कि $r_{XY} = 0$ हो और फिर भी X और Y स्वतंत्र नहीं हों।

यदि युग्म (x_i, y_i), f_i बार आता हो, तो यह आसानी से दिखाया जा सकता है कि

$$r_{XY} = \frac{\sum_i f_i x_i y_i - \frac{1}{N}\left(\sum_i f_i x_i\right)\left(\sum_i f_i y_i\right)}{\sqrt{\sum_i f_i x_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_i f_i x_i\right)^2} \times \sqrt{\sum_i f_i y_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_i f_i y_i^2\right)^2}}$$

जहां $\sum_i f_i = N$.

यह संबंध सहसंबंध गुणांक का परिकलन करने में विशेष रूप से उपयोगी होता है। हम इकाई 7 में इस पर विस्तार से चर्चा करेंगे।

इस इकाई में आपने जो कुछ पढ़ा है अब हम उसका संक्षिप्त विवरण दे रहे हैं।

5.4 सारांश

- एक प्रयोग के परिणाम समुच्चय को उस प्रयोग की प्रतिदर्श समष्टि कहा जाता है।कोई भी **घटना** Ω का एक उपसमुच्चय होती है। घटना $E_1 \cup E_2$ का अर्थ है कि E_1 और E_2 में कम से कम एक घटना अवश्य घटती हो। घटना $E_1 \cap E_2$ का अर्थ है कि दोनों घटनाएं E_1 और E_2 घटती हैं। घटना A की प्रायिकता

  $$P(A) = \frac{n(A)}{n\,(\Omega)}$$

- $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$
  यदि $E \cap F = \phi$ तो
  $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$
  इसे संपूर्ण प्रायिकता प्रमेय कहा जाता है

- $P(E \cap F) = P(E)\,P(F\,|\,E) = P(F)\,P(E\,|\,F)$
  इसे मिश्र प्रायिकता प्रमेय कहा जाता है।

- बेज़ प्रमेय : मान लीजिए कि $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$प्रदिदर्श समष्टि Ω का एक विभाजन है , जहां $i = 1, 2, \ldots, n$ के लिए $P(E_i) \neq 0$. मान लीजिए E कोई घटना है, जहां $P(E) \neq 0$. तब

  $$P(E_j\,|\,E) = \frac{P(E_j)\,P(E\,|\,E_j)}{\sum_{i=1}^{n} P\,(E_i)\,P(E\,|\,E_i)}$$

- यादृच्छिक चर, प्रतिदर्श समष्टि Ω पर परिभाषित एक वास्तविक-मान फलन होता है।

- यादृच्छिक चर असंतत होता है, यदि इसके मान परिमित संख्या में हों। संतत यादृच्छिक चर के मान अगणनीय संख्या में होते हैं। इसकी **प्रत्याशा**

$$E(X) = \langle X \rangle = \sum_i x_i f(x_i), \qquad X \text{ असंतत हो}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx, \qquad X \text{ संतत हो}$$

- X का **प्रसरण**

$$\text{Var}(X) = \sigma_X^2 = E[X - E(X)]^2$$

- X और Y के बीच **सहप्रसरण**

$$\text{Cov}\,(X, Y) = E\,[\,(X - \langle X \rangle)\,(Y - \langle Y \rangle)\,]$$

तथा **सहसंबंध गुणांक**

$$r_{XY} = \frac{\text{Cov}\,(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}\,(X)\,\text{Var}\,(Y)}}$$

से परिकलित किया जा सकता है। यदि X और Y स्वतंत्र हों, तो $r_{XY} = 0$.

5.5 अंत में कुछ प्रश्न

1. A के परीक्षा में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 3/7 है और B के परीक्षा में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 4/7 है। इनमें से कम से कम एक के परीक्षा में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
2. एक साधारण पासा फेंका जाता है। यदि A विषम संख्या के आने की घटना हो और B एक पूर्ण वर्ग के आने की घटना हो, तो $P(B\,|\,A)$ परिकलित कीजिए।
3. एक अच्छी तरह से फेंटी गई ताश की गड्डी में हुकुम के गुलाम के बाद हुकुम की रानी के आने की प्रायिकता क्या होगी ?
4. मान लीजिए चार सिक्के उछाले जाते हैं, और मान लीजिए X चित्त पड़ने की संख्या है। $E(X)$ परिकलित कीजिए।

5.6 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. $\{HH, HT, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$
2. प्रतिदर्श समष्टि $\{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$ की सभी संभव घटनाएं हैं :

   ϕ, $\{(H, H)\}$, $\{(H, T)\}$, $\{(T, H)\}$ $\{(T, T)\}$, $\{(H, H), (H, T)\}$, $\{(H, H), (T, H)\}$,
   $\{(H, H), (T, T)\}$, $\{(H, T), (T, H)\}$, $\{(H, T), (T, T)\}$, $\{(T, H), (T, T)\}$,
   $\{(H, H), (H, T), (T, H)\}$, $\{(H, H), (H, T), (T, T)\}$, $\{(H, T), (T, H), (T, T)\}$,
   $\{(H, H), (T, H), (T, T)\}$, Ω

   व्यापक रूप में, आमाप n वाली प्रतिदर्श समष्टि में घटनाओं की कुल संख्या 2^n होती है।

3. (i) चित्र 5.1 से यह स्पष्ट है कि यदि E और F परस्पर अपवर्जी अवयव हों, तो

$$E \cup F = E \cup (E^c \cap F) \qquad \text{.... (i)}$$

और

$$F = (E \cap F) \cup (E^c \cap F) \qquad \text{... (ii)}$$

समीकरण (5.5) का प्रयोग करने पर हम देखते हैं कि

$$P(E \cup F) = P(E) + P(E^c \cap F)$$

और $$P(F) = P(E \cap F) + P(E^c \cap F)$$

इन परिणामों को संयोजित करने पर हमें अभीष्ट परिणाम मिलता है:

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

(ii) हम $P(E \cup F \cup G)$ परिकलित करना चाहते हैं।
मान लीजिए $F \cup G = H$. तब

$$P(E \cup F \cup G) = P(E \cup H) = P(E) + P(H) - P(E \cap H)$$

और $$P(H) = P(F) + P(G) - P(F \cap G)$$

$$P(E \cap H) = P(E \cap F \cup G)$$

$$= P[(E \cap F) \cup (E \cap G)]$$

अत:

$$P(E \cap H) = P(E \cap F) + P(E \cap G) - P[(E \cap F) \cap (E \cap G)]$$

$$= P(E \cap F) + P(E \cap G) - P(E \cap F \cap G)$$

इसलिए

$$P(E \cup F \cup G) = P(E) + P(F) \div P(G) - P(E \cap F) - P(F \cap G)$$
$$- P(G \cap E) + P(E \cap F \cap G)$$

(iii) मान लीजिए A, 7 आने की घटना है और B, 11 आने की घटना है। 36 प्रतिदर्श बिंदुओं में से 6 प्रतिदर्श बिंदुओं के लिए 7 का जोड़ आता है पर, केवल 2 प्रतिदर्श बिंदुओं के लिए 11 का जोड़ आता है। क्योंकि सभी प्रतिदर्श बिंदु समप्रायिक हैं, इसलिए $P(A) = 1/6$ और $P(B) = 1/18$. क्योंकि 7 या 11 को समान उछाल पर जोड़ा जा सकता है, इसलिए हम यह कह सकते हैं कि घटनाएं A और B परस्पर अपवर्जी हैं। अत:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= (1/6) + (1/18)$$

$$= 2/9$$

4. मान लीजिए M एक व्यक्ति के चुने जाने की घटना को प्रकट करता है और E चुने हुए व्यक्ति के रोज़गार में लगे होने को प्रकट करता है। क्योंकि रोज़गार में लगे व्यक्तियों की कुल संख्या 600 है, इसलिए

$$P(M \mid E) = \frac{460}{600} = \frac{23}{30}$$

5. $$E(X) = \int_1^2 x f(x)\, dx = 2\int_1^2 x(x-1)\, dx = \frac{5}{3}$$

और $$E(X^2) = 2\int_1^2 x^2(x-1)\, dx = \frac{17}{6}$$

अत: समीकरण (5.22) से हमें यह परिणाम मिलता है

$$\text{Var}(X) = \frac{17}{6} - \frac{25}{9} = \frac{1}{18}$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. क्योंकि A और B स्वतंत्र हैं, इसलिए अभीष्ट प्रायिकता यह होगी

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)\,P(B)$$

अतः $$P(A \cup B) = \frac{3}{7} + \frac{4}{7} - \frac{12}{49} = \frac{37}{49}.$$

2. मान लीजिए $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ । यहां

$$A = \{1, 3, 5\}, B = \{1, 4\}, A \cap B = \{1\}$$

अतः

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{(1/6)}{(3/6)} = \frac{1}{3}$$

3. मान लीजिए

E = हुकुम की रानी और हुकुम का गुलाम एक दूसरे से सटे पत्ते हैं

Ω = { 52 पत्तों के सभी संभव विन्यासों को प्रकट करने वाला क्रमिक 52-टुपल है }

निम्नलिखित परिकल्पनाएं लीजिए

E_1 = हुकुम की रानी गड्डी में सबसे ऊपर है

E_2 = हुकुम की रानी गड्डी में सबसे नीचे है

E_3 = हुकुम की रानी गड्डी में बीच में कहीं पर है । स्पष्ट है कि

$$P(E_1) = P(E_2) = \frac{51!}{52!} = \frac{1}{52},$$

तथा $$P(E_3) = \frac{50}{52} = \frac{25}{26}$$

क्योंकि सबसे ऊपर या सबसे नीचे वाले पत्ते के बाद केवल एक पत्ता होता है और गड्डी के बीच में रखे पत्ते के पहले और बाद, दो पत्ते होते हैं, इसलिए

$$P(E \mid E_1) = P(E \mid E_2) = \frac{1}{51}, P(E \mid E_3) = \frac{2}{51}$$

अतः

$$P(E) = P(E_1)\,P(E \mid E_1) + P(E_2)\,P(E \mid E_2) + P(E_3)\,P(E \mid E_3)$$
$$= 1/26$$

4. यहां

$$P(X=0) = \frac{1}{16} \quad P(X=1) = \frac{1}{4} \quad P(X=2) = \frac{3}{8} \quad P(X=3) = \frac{1}{4} \quad P(X=4) = \frac{1}{16}$$

अतः $$E(X) = 0 \times \left(\frac{1}{16}\right) + 1 \times \left(\frac{1}{4}\right) + 2 \times \left(\frac{3}{8}\right) + 3 \times \left(\frac{1}{4}\right) + 4 \times \left(\frac{1}{16}\right)$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 2$$

5.7 शब्दावली

अघट घटना	null event
असंतत प्रतिदर्श समष्टि	discrete sample space
असंयुक्त	disjoint
आघूर्ण	moment
एकचर	univariate
क्रमचय	permutation
गणनीय	countable
घटना	event
चरघातांकी बंटन	exponential distribution
द्विचर	bivariate
निश्चित घटना	sure event
परस्पर अपवर्जी	mutually exclusive
परिक्षेपण	dispersion
परिघटना	phenomenon
परिणाम	outcome
प्रतिदर्श समष्टि	sample space
प्रत्याशा	expectation
प्रसरण	variance
प्रायिकता	probability
मानक विचलन	standard deviation
मिश्र प्रायिकता	compound probability
यादृच्छिक चर	random variable
योज्य नियम	additive law
विचर	variate
विभाजन	partition
विविक्त प्रतिदर्श समष्टि	discrete sample space
संचय	combination
सप्रतिबंध प्रायिकता	conditional probability
समप्रायिक	equally likely
सम्मिलन	union
सहप्रसरण	covariance
सहसंबंध गुणांक	correlation coefficient
सर्वनिष्ठ	intersection