इकाई 8 तरंगों का अध्यारोपण – I

इकाई की रूपरेखा

8.1 प्रस्तावना

आपने खंड 1 की इकाई 2 में पढ़ा है कि किस प्रकार एक कण पर एक साथ दो सरल आवर्त्त दोलनों के प्रभाव से लिसाज आकृतियाँ बनती हैं।

इस इकाई में आप तरंगों के अध्यारोपण के सिद्धांत के बारे में पढ़ेंगे। कुछ परिस्थितियों में, तरंगों के अध्यारोपण से कुछ रोचक परिघटनाएँ मिलती हैं, जैसे, प्रत्यागामी तरंगों की रचना, विस्पंदन, तरंग समूह, व्यतिकरण, विवर्तन इत्यादि। इस इकाई में आप प्रत्यागामी तरंगों, विस्पंदन, तरंग समूह के बारे में पढ़ेंगे। अन्य दो विषयों यानि व्यतिकरण व विवर्तन की चर्चा इस खंड की इकाई 9 में होगी।

इस इकाई में हम लकड़ी के वाद्य यंत्रों की मूल विशेषताओं के बारे में पढ़ेंगे, विशेषतः उनके ध्वनि पैदा करने वाले भाग पर जोर दिया जाएगा।

मूलतः दो तरह की पाइप होती हैं–वासुरी व रीड़ पाइप। इनके बारे में हम इस इकाई में पढ़ेंगे। जब समान कोणीय आवृत्ति वाली (ω) समान तरंग दैर्ध्य वाली (समान तरंग सदिश और संचरण स्थिरांक) तथा समान आयाम वाली दो तरंगें विपरीत दिशाओं में बढ़ती हुई अध्यारोपित होती हैं तब प्रत्यागामी तरंगों की रचना होती है। जबकि, दो लगभग समान आवृत्ति वाली ध्वनि तरंगों के अध्यारोपित होने पर विस्पंदन की रचना होती है।

तरंग समूह, जिन्हें तरंग पिटक भी कहा जाता है, दो लगभग समान आवृत्ति वाली तरंगों के अध्यारोपण से बनते हैं। तरंग समूह की धारणा क्वान्टम यांत्रिकीय के अध्ययन के लिये अति आवश्यक है, इसके बारे में हम बाद में चर्चा करेंगे।

अगली इकाई में आप दो तरंगों के अध्यारोपण के बारे में पढ़ेंगे जिससे व्यतिकरण की रचना होती है। यहाँ आप दो तरंगों के व्यतिकरण के लिए आवश्यक प्रतिबंधों के बारे में पढ़ेंगे। अंत में आप तरंगों के विवर्तन के बारे में जानेंगे और विवर्तन के कुछ विशिष्ट उदाहरणों के बारे में पढ़ेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप:

- तरंगों के अध्यारोपण के सिद्धांत का वर्णन कर सकेंगे,
- प्रत्यागामी तरंगों की रचना के पीछे छिपी सभी धारणाओं की व्याख्या कर सकेंगे,
- प्रत्यागामी तरंगों के विस्पंद और प्रस्पन्द को पहचान सकेंगे,

- प्रत्यागामी तरंगों की विशेषताओं की सूची बना सकेंगे,
- तरंग समूह की रचना का वर्णन कर सकेंगे,
- तरंग वेग व तरंग दैर्ध्य के परस्पर संबंध को जानते हुए समूह वेग के मान का परिकलन करे सकेंगे,
- नियत आवृत्ति वाली दो अध्यारोपित स्वर से उत्पन्न होने वाली विस्पंदों की संख्या का परिकलन कर सकेंगे।

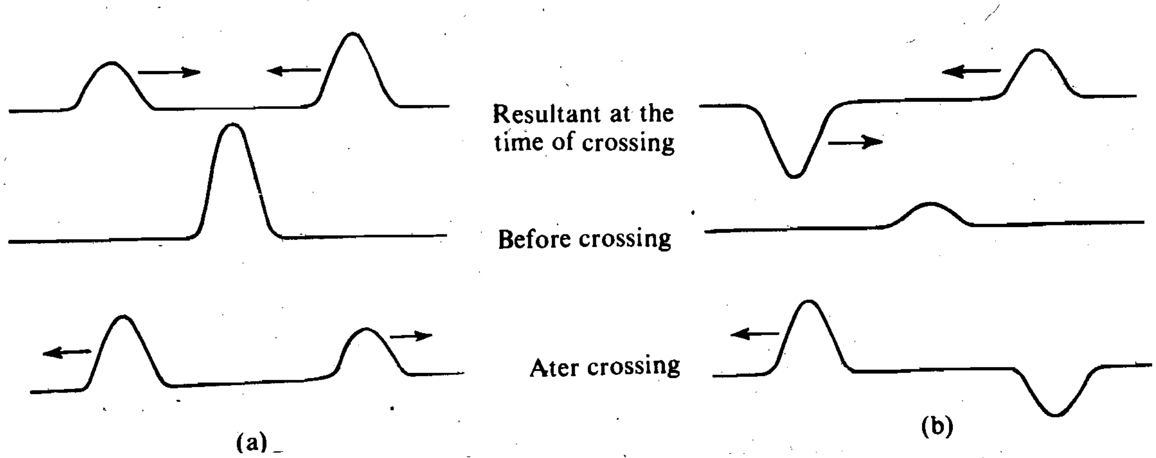
8.2 तरंगों के अध्यारोपण का सिद्धांत

खण्ड 1 की इकाई 2 में आप दो सरल आवर्त्त गतियों के अध्यारोपण के विषय में पढ़ चुके हैं। आपने देखा कि जब एक कण दो या अधिक सरल आवर्त्त गतियों से एक साथ प्रभावित होता है तो किसी भी क्षण उसका परिणामी विस्थापन व्यक्तिगत विस्थापनों का बीजीय योग होगा। इस को हम तरंगों के लिए भी विस्तृत कर सकते हैं।

दो या अधिक तरंगें नियत दिकस्थान में एक ही पथ से स्वतंत्र रूप से चंक्रम कर सकती हैं, इसका अर्थ यह है कि, एक कण का परिणामी विस्थापन किसी भी क्षण, उसको व्यक्तिगत तरंगों द्वारा दिये गये विस्थापनों का बीजीय योग होगा। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि एक कण का परिणामी विस्थापन हम केवल व्यष्टिगत तरंगों द्वारा दिये गये विस्थापनों को बीजतः जमा करके ज्ञात कर सकते हैं।

तरंगों के अध्यारोपण का एक रोचक उदाहरण है रेडियो तरंगें। आप जानते हैं कि विभिन्न रेडियो स्टेशन अपने कार्यक्रमों का प्रसारण करने के लिये विभिन्न आवृत्तियों वाले रेडियो तरंगों को उत्सर्जित करते हैं। जब ये तरंगें हमारे ग्रहण करने वाली ऐन्टेना पर पड़ती हैं तो उसमें, विभिन्न तरंगों के अध्यारोपण के कारण, बनने वाली विद्युत धारा बहुत जटिल होती है। फिर भी हम देखते हैं कि हम किसी भी केंद्र को स्वरित कर सकते हैं। अर्थात् बहुत सी तरंगों में से हम उस तरंग को चुन सकते हैं जिसे हम स्वरित करना चाहते हैं। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि बहुत सी तरंगों के अध्यारोपण से बने तरंग समूह में से हम विभिन्न तरंगें जिन्हें अध्यारोपित किया गया था अलग कर सकते हैं। यह तरंगों के व्यक्तिगत आचरण का संकेत देता है जो कि तरंगों के अध्यारोपण के सिद्धांत पर आधारित है।

अब आप, एक रस्सी पर विपरीत दिशा में चल रही दो स्पंदो के माध्यम से अध्यारोपण के सिद्धांत को दर्शा सकते हैं, जैसा कि चित्र 8.1 में दिखाया गया है। एक दूसरे को पार करने के पूर्व व उपरांत ये दोनों स्पंद एक दूसरे से पूर्णतः स्वतंत्र हैं। पार के समय स्पंद का परिणामी विस्थापन, दोनों स्पंदों के विस्थापनों का बीजीय योग होता है।



चित्र 8.1: विपरीत दिशा में चल रही दो स्पंदों का अध्यारोपण

आपने खंड 1 की इकाई 2 में दोलनों के अध्यारोपण के गणितीय आधार के विषय में पढ़ा है। यह समीकरण (2.1) की रेखिता पर आधारित है।

हम x की धनात्मक दिशा में स्थित कण, जिस पर कि दो तरंगों का स्वतंत्र रूप से प्रभाव पड़ रहा है, पर विचार करते हैं। यदि हम किसी भी क्षण t में, इन दो तरंगों के प्रभाव से $y_1(x, t)$ तथा $y_2(x, t)$ को इस कण का विस्थापन मानें तो इस कण के परिणामी विस्थापन $Y(x, t)$ को निम्नलिखित समीकरण के रूप में लिखा जा सकता है:

$$Y(x, t) = Y_1(x, t) + Y_2(x, t) \qquad (8.1)$$

आपने इस खंड की इकाई 6 में पढ़ा है कि किसी भी तरंग को हम आवश्यकतानुसार, उसके आयाम, कोणीय, आवृत्ति, तरंग सदिश तथा कला द्वारा अभिलक्षणित कर सकते हैं। अब तरंगों के इन घटकों के (समान) या भिन्न होने के आधार पर तरंगों के अध्यारोपण से उत्पन्न होने वाले विभिन्न भौतिक परिघटनाओं का आप अध्ययन करेंगे। आइए हम इनमें से कुछ परिघटनाओं पर विचार करें। **इसके लिए हम निम्नलिखित तरंगों के जोड़ों को लेते हैं।**

1. $Y_1 = a_1 \sin(\omega t - kx)$ व $y_2 = a_2 \sin(\omega t - kx)$
2. $Y_1 = a \sin(\omega t - kx)$ व $y_2 = a \sin(\omega t - kx + \phi)$
3. $Y_1 = a \sin(\omega_1 t - k_1 x)$ व $y_2 = a_2 \sin(\omega_2 t - k_2 x)$
4. $Y_1 = a \sin(\omega t - kx)$ व $y_2 = a \sin(\omega t + kx)$ (8.2)

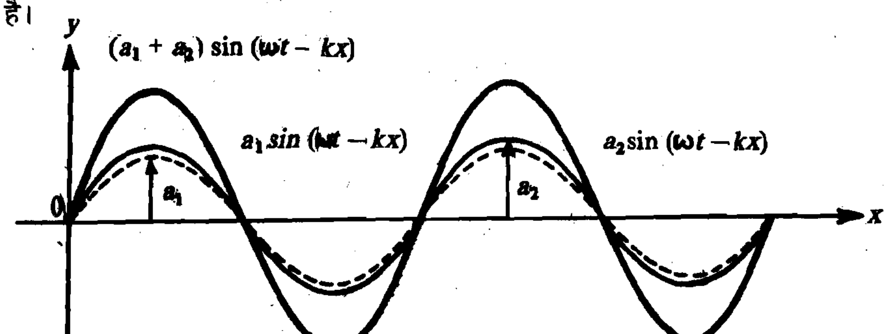
ऊपर दिये गये तरंगों के संयोजन से आप निम्नलिखित निष्कर्ष निकाल सकते हैं :

(क) स्थिति-1 में दोनों तरंगों का केवल आयाम ही भिन्न है :

अब हम ऐसी दो तरंगों के अध्यारोपण पर विचार करेंगे, जिनकी कोणीय आवृत्ति, कला व तरंग सदिश समान है परन्तु आयाम भिन्न है। यह दो तरंगें स्थिति-1 में दर्शाई गई हैं। समीकरण (8.1) का प्रयोग करते हुए हम यह अनुमान लगा सकते हैं कि तरंग को निम्नलिखित रूप में दर्शाया जा सकता है :

$$\begin{aligned} Y(x, t) &= a_1 \sin(\omega t - kx) + a_2 \sin(\omega t - kx) \\ &= (a_1 + a_2) \sin(\omega t - kx) \end{aligned} \qquad (8.3)$$

समीकरण (8.3) यह दर्शाता है कि परिणामी तरंग की आवृत्ति व कला पृथक तरंगों की आवृत्ति व कला के समान है तथा उसका परिणामी आयाम $(a_1 + a_2)$ है। यह चित्र 8.2 में दर्शाया गया है।



चित्र 8.2 : समान आवृत्ति, कला और तरंग सदिश तथा भिन्न आयाम वाली दो तरंगों का अध्यारोपण।

(ख) स्थिति-2 में दोनों तरंगों की केवल कला भिन्न है:

अब हम ऐसी दो तरंगों के अध्यारोपण पर विचार करेंगे जिनका आयाम, आवृत्ति व तरंग सदिश समान है परन्तु कला भिन्न है। आप देखेंगे कि जब ऐसी दो तरंगें अध्यारोपित होती हैं तो व्यतिकरण की परिघटना उत्पन्न होती है। आप इस परिघटना के संबंध में इस खंड की इकाई 9 में विस्तार से अध्ययन करेंगे।

(ग) स्थिति-3 में दोनों तरंगों की **आवृत्ति** ω तथा तरंग सदिश **k** भिन्न है।

अब हम ऐसी दो तरंगों के अध्यारोपण पर विचार करेंगे जिनकी आवृत्तियाँ व तरंग सदिश लगभग बराबर हैं। इस स्थिति में कालांतर के मान से प्रभावित हुए बिना तरंगों के अध्यारोपण से एक रोचक परिघटना उत्पन्न होती है जिसे विस्पंदन कहते हैं। यदि लगभग बराबर **आवृत्ति** वाली अनेक तरंगें अध्यारोपित हों तो उनसे तरंग समूह या तरंग पिटक की उत्पत्ति होती है। इससे समूह वेग आता है जो कि तरंग वेग से बिल्कुल भिन्न होता है। आप समूह वेग के विषय

(घ) स्थिति 4 में दोनों तरंगों के समीकरण में तरंग सदिश **k** के सम्मुख लगे चिन्ह भिन्न हैं। इस स्थिति में पहली तरंग $y_1 (x, t)$,x-अक्ष की धनात्मक दिशा में संचरित हो रही है जबकि दूसरी तरंग $y_2 (x, t)$,x-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में संचरित हो रही है। इसका तात्पर्य यह है कि दोनों तरंगें विपरीत दिशा में संचरित हो रही हैं। जब इस तरह की दो तरंगों का अध्यारोपण होता है तो प्रत्यागामी तरंगें उत्पन्न होती हैं। आप प्रत्यागामी तरंगों के बारे में भाग 8.3 में पढ़ेंगे।

8.3 प्रत्यागामी तरंगें

आपने अभी ऊपर वाले भाग में पढ़ा है कि जब दो समान कोणीय, आवृत्ति (यानि ω), समान तरंग दैर्ध्य (यानि समान तरंग सदिश **k**), तथा समान आयाम वाली परन्तु विपरीत दिशा में संचरित हो रही दो तरंगें अध्यारोपित होती हैं तो प्रत्यागामी तरंगों की उत्पत्ति होती है। बिल्कुल एक समान आयाम तथा तरंग दैर्ध्य वाली तरंगों को सरलता से समझने के लिये हम उनमें से एक तरंग को आपतित तरंग तथा दूसरी की एक परिसीमा से परावर्तित तरंग मान लेते हैं। आपतित तरंग का परावर्तन एक स्थिर परिसीमा से हो सकता है (जैसे दीवार से बद्ध कमानी, या औरगन पाइप का बंद सिरा) या मुक्त परिसीमा से हो सकता है (जैसे कमानी का मुक्त सिरा या औरगन पाइप का खुला सिरा)। आपने पिछली इकाई में पढ़ा है कि स्थिर परिसीमा पर विस्थापन y (x, t) सदैव शून्य रहता है व परावर्तित तरंग का चिन्ह बदल जाता है। जबकि एक मुक्त परिसीमा से परावर्तन तरंग का चिन्ह बदलता नहीं है, वह आपतित तरंग जैसा ही रहता है। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि स्थिर परिसीमा द्वारा π का कलांतर आ जाता है जब कि एक मुक्त परिसीमा पर कला में कोई परिवर्तन नहीं होता।

आइए, अब हम उस स्थिति पर विचार करें जिसमें एक मुक्त परिसीमा से परावर्तन हो रहा है। इस अवस्था में परिणामी विस्थापन निम्नलिखित समीकरण से दर्शाया जा सकता है:

$$y (x, t) = a \sin (\omega t - kx) + a \sin (\omega t + kx)$$

समीकरण (8.6) को सन्तुष्ट करने के लिए हमें निम्न परिस्थिति की आवश्यकता है

$$\frac{2\pi}{\lambda} x = m\pi$$

इसी के समरूप समीकरण (8.7) के लिये निम्न परिस्थिति की आवश्यकता है

$$\frac{2\pi}{\lambda} x = (2m + 1) \frac{\pi}{2} \qquad \text{जहां } m = 0, 1, 2.......$$

इनसे हमें अधिक विस्थापन वाले बिंदु $x = 0, \lambda/2, \lambda,.....$ पर मिलते हैं तथा न्यूनतम विस्थापन के बिंदु $x = \lambda/4, 3\lambda/4.....$ पर मिलते हैं। अधिकतम विस्थापन वाले बिंदुओं को प्रस्पंद कहा जाता है जबकि न्यूनतम विस्थापन वाले बिंदुओं को निस्पंद कहा जाता है। दो लगातार एक के बाद एक आने वाले निस्पंद या प्रस्पंद के बीच की दूरी $\lambda/2$ होती है जब कि एक निस्पंद और प्रस्पंद के बीच की दूरी $\lambda/4$ होती है (चित्र 8.3)।

उपरोक्त चर्चा से हमें ज्ञात होता है कि प्रत्यागामी तरंगें दो बिल्कुल एक सी, विपरीत दिशा में प्रगामण करती हुई प्रगामी तरंगों के अध्यारोपण से उत्पन्न होती हैं। परिणामस्वरूप हमें एक ऐसी तरंग मिलती है जो अप्रगामी तरंग होती है जिसमें विक्षोभ एक कण से दूसरे कण में हस्तगत नहीं होता। वह जगह या दिकस्थान, जहां दो तरंगें अध्यारोपित होती हैं कई भागों में बँट जाता है (चित्र 8.3)। प्रत्येक भाग का जिस बिंदु पर अंत होता है उसे निस्पंद कहते हैं, जहाँ पर कण का विस्थापन सदैव शून्य होता है।

इस समीकरण को हम निम्न प्रकार से लिख सकते हैं:

$$y (x, t) = 2a \cos kx \sin \omega t \qquad (8.5)$$

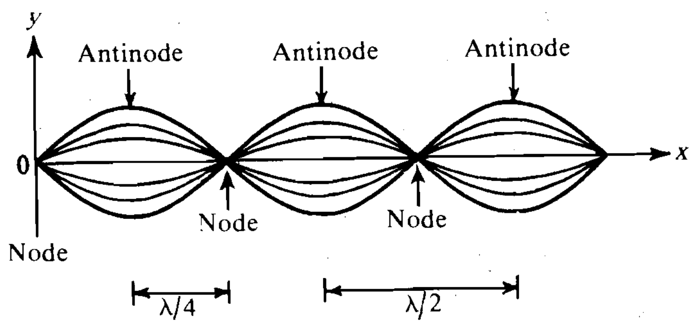
समीकरण (8.5) से हमें ज्ञात होता है कि तरंग का आयाम $2a \cos kx$ है जो स्थिर नहीं है। वह कण की स्थिति x पर निर्भर करता है (या प्रसंवादीतः परिवर्तित होता है।), परिणामी गति की आवृत्ति तथा तरंग दैर्ध्य व्यष्टिगत तरंगों की आवृत्ति व तरंग दैर्ध्य के बराबर होती है। समीकरण (8.4) का निरीक्षण करते हुए हम देखते हैं कि x-अक्ष की दिशा में विचरित कण x-अक्ष की समकोणीय दिशा में कम्पन करते हैं। कंपन कर रहे इन कणों का आयाम x-अक्ष की दिशा में विभिन्न स्थितियों पर भिन्न-भिन्न होता है। जबकि कंपन कर रहे सभी कणों का आवर्त काल बराबर होता है।

समीकरण (8.5) का निरीक्षण करते हुए हमें ज्ञात होता है कि यह किसी प्रगामी तरंग को नहीं दर्शाता है क्योंकि यहाँ पर साइन फलन का कोणांक दिकस्थान स्थिरांक x से स्वतंत्र है। इस प्रकार हम देखते हैं कि जब हमने दो ऐसी तरंगों को लिया था जो कि विपरीत दिशा में संचारित हो रही थी, परिणाम में हमें ऐसी तरंग मिली है जो कि दिकस्थान में प्रगामण नहीं करती। ऐसी तरंग जो संचारण नहीं करती उसे प्रत्यागामी तरंग कहते हैं। क्योंकि यह संचारण नहीं करती, वह अपने साथ ऊर्जा का स्थानांतरण नहीं करती। समीकरण (8.5) से यह स्पष्ट होता है कि विस्थापन $y(x, t)$ तब अधिकतम होता है जब

$$\cos kx = \cos \frac{2\pi}{\lambda} x = \pm 1$$

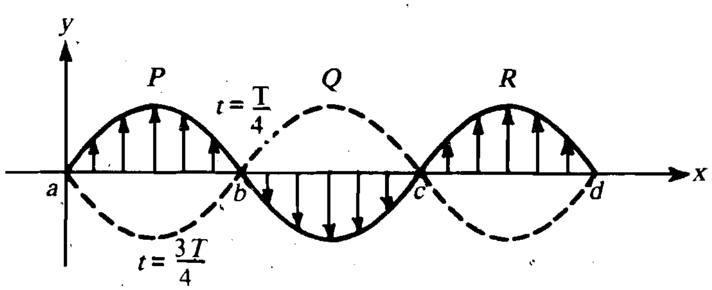
और तब न्यूनतम होता है जब

$$\cos kx = \cos \frac{2\pi}{\lambda} x = 0$$



चित्र 8.3 : प्रत्यागामी तरंग का आवरण, निस्पंद तथा प्रस्पंद को दर्शाते हुए।

इन भागों के केन्द्र बिन्दुओं में स्थित कण अधिकतम आयाम से कंपन करते हैं (इन्हें प्रस्पंद कहते हैं) निस्पंद और प्रस्पंद के बीच में स्थित कम शून्य से अधिकतम आयाम के कंपन करते हैं। यह चित्र 8.4 में दर्शाया गया है।



चित्र 8.4 : प्रत्यागामी तरंग, वाणग्रों द्वारा उन आयामों को दर्शाते हुये जिससे विभिन्न कण कंपन करते हैं।

उदाहरण के लिए कण "अ" सदैव स्थिर रहता है। कण "ब" सदैव अधिकतम आयाम वाला कंपन करता है तथा कण "स" सदैव शून्य व अधिकतम के बीच के आयाम वाला कंपन करता है जैसा कि चित्र 8.4 में दिखाया गया है।

बोध प्रश्न 1

दोनों किनारों पर बद्ध कमानी में उत्पन्न होने वाली प्रत्यागामी तरंग पर स्थित कण के विस्थापन के समीकरण का परिकलन कीजिये। कमानी का बद्धांत निस्पंद होगा या प्रस्पंद ? यदि किसी खुले किनारे वाली पाइप में प्रत्यागामी तरंगे उत्पन्न होती हैं तो किनारे पर निस्पंद होगा या प्रस्पंद होगा? आप इसका विवेचन किस प्रकार करेंगे, कि प्रत्यागामी तरंग द्वारा किसी भी प्रकार का ऊर्जा प्रवाह नहीं होता है।

8.3.1 प्रत्यागामी तरंग की गति व किसी बिंदु पर विकृति

आप जानते हैं कि किसी कण के वेग को हम हर समय की अपेक्षा विस्थापन में होने वाले परिवर्तन की दर से परिभाषित करते हैं। किसी भी प्रत्यागामी तरंग के कण के वेग का, उसके परिणामी विस्थापन $Y(x, t)$ को समय के सापेक्ष अवकलन करके x को स्थिरांक रखते हुये, परिकलन कर सकते हैं। यदि हम समीकरण (8.5) का काल के सापेक्ष में अवकलन ले तो हमें निम्न समीकरण प्राप्त होगा :

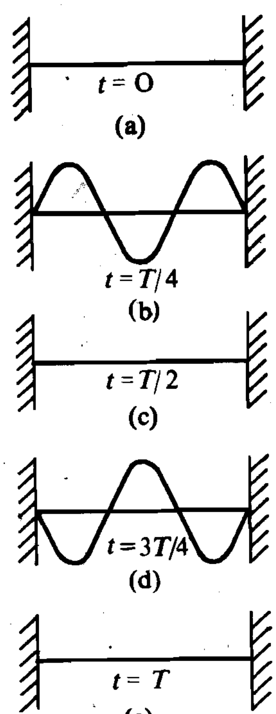
$$\text{वेग} \quad \frac{dY}{dt} = 2a\omega \cos kx \cos \omega t \qquad (8.8)$$

वेग का मान तब अधिकतम होगा जब कोसाइन kx का मान ± 1 होगा यानि उन बिंदुओं पर जहां $x = 0, \lambda/2 ..... n\lambda/2$ के बराबर होगा (समीकरण 8.6 तथा उसके बाद दिये गये विवेचन पर विचार करें) वेग न्यूनतम (शून्य) तब होगा जब कोसाइन kx का मान शून्य होगा यानि उन बिंदुओं पर जहां $x = \lambda/4, 3\lambda/4.....(2m+1)\lambda/4$ के बराबर होगा। इसका अर्थ यह है कि वेग का मान प्रस्पंद पर अधिकतम होता है, जहां पर किसी विस्थापन का मान अधिकतम होता है। वेग का मान निस्पंद पर न्यूनतम होता है (शून्य के बराबर) जहां पर कि विस्थापन का मान भी शून्य होता है। प्रस्पंद व निस्पंद के बीच के बिंदुओं पर वेग का मान प्रस्पंद पर अधिकतम होता है तथा धीरे-धीरे कम होता हुआ निस्पंद पर शून्य हो जाता है। चित्र 8.4 में वाणाग्रो की लंबाई प्रत्यागामी तरंग के कणों के वेग को दर्शाती है।

प्रत्यागामी तरंग के कण की विकृति का परिकलन प्रत्यागामी परिणामी आयाम यानि $Y(x, t)$ के x के सापेक्ष में अवकलन द्वारा, समय को स्थिर रखते हुये हम कर सकते हैं। यदि हम समीकरण (8.5) को x के सापेक्ष में अवकलन करें तो हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होगा:

$$\text{विकृति,} \quad \frac{dY}{dx} = -2ak \sin kx \sin \omega t \qquad (8.9)$$

आप यह दिखा सकते हैं कि निस्पंद जहाँ विस्थापन तथा वेग का मान शून्य होता है, स्थित कण की विकृति अधिकतम होती है। यह चित्र 8.4 में भी दर्शाया गया है। निस्पंद पर स्थित कणों पर विपरीत दिशा में गतिमान कणों द्वारा खिचांव पड़ता है। प्रस्पंद पर, जहाँ विस्थापन व वेग का मान अधिकतम होता है, विकृति न्यूनतम होती है। चित्र 8.4 को पुन: देखते हुये, हमें पता चलता है कि प्रस्पंद पर स्थिति कण सदैव अपने साथ वाले कणों की दिशा में ही गतिमान होते हैं जिससे प्रस्पंद पर स्थित कणों की विकृति बहुत कम होती है।



चित्र 8.5 : दोनों किनारों पर बद्ध धागे में उत्पन्न होने वाली प्रत्यागामी तरंगें। एक **आवर्तकाल** के अंतर्गत विभिन्न समयों पर धागे के आकार को दर्शाया गया है।

प्रत्यागामी तरंगों में कण कई मार्गों जैसे P, Q व R में विभाजित हो जाते हैं जैसा कि चित्र 8.4 में दर्शाया गया है। एक भाग के सभी कण सदैव एक ही दिशा में गतिमान होते हैं। जब भाग P के कण ऊपर की ओर गतिमान होते हैं तब भाग Q के कण नीचे की ओर गतिमान होते हैं अर्थात् किन्हीं भी दो निकटतम भागों के कण विपरीत दिशा में गतिमान होते हैं।

किसी भी भाग के सभी कण चरम अवस्था में एक साथ ही पहुँचते हैं तथा साम्यस्थिति से भी एक साथ ही गुजरते हैं। यह चित्र 8.5 में दर्शाया गया है। यह सब इसलिए संभव होता है क्योंकि इन सभी कणों का आवर्तकाल T बराबर होता है पर वेगमान भिन्न होता है। जिन कणों को ज्यादा दूरी तय करनी पड़ती है उनका वेगमान अधिक होता है तथा जिनको कम दूरी तय करनी पड़ती है उनका वेगमान कम होता है।

अब व्यष्टिगत कण पर आते हुये हम देख सकते हैं कि उसका वेग कब महत्तम तथा कब शून्य होता है। समीकरण (8.8) को निम्न प्रकार से लिखते हुए

$$\frac{dY}{dt} = 4\pi a \cos \frac{2\pi}{\lambda} \cos 2\pi\omega t$$

$$= \frac{4\pi a}{T} \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \quad \cos \frac{2\pi t}{T}$$

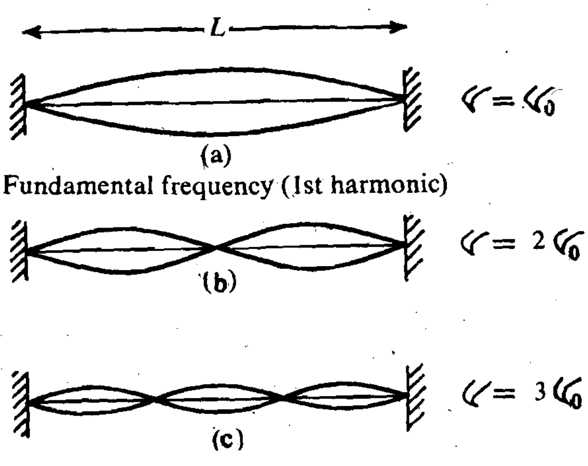
आप देखते हैं कि कण का वेग $t = T/4$ तथा $3T/4$ के लिये शून्य होता है तथा $t = 0$, $T/2$ व $T/1$ के लिए महत्तम होता है। तथापि प्रत्येक आवर्तकाल के अंतर्गत मध्य के कणों का वेग तब महत्तम होता है जब वह साम्यावस्था से गुजरते हैं तथा तब शून्य होता है जब वह चरमावस्था पर होते हैं। अब अगले भाग में आप प्रत्यागामी तरंगों में संनाद उत्पन्न करने वाली परिस्थितियों के बारे में पढ़ेंगे।

8.3.2 प्रत्यागामी तरंगों में आवर्त्त संनाद

सभी तार वाले वाद्य यंत्र प्रत्यागामी तरंगों की परिघटना का प्रयोग करते हैं। एक दोनों सिरों पर बद्ध धागे द्वारा कुछ निर्धारित तरंग दैर्ध्य वाली प्रत्यागामी तरंगों की रचना हो सकती है।

यदि धागे की लंबाई L हो तो इस धागे पर संभव प्रत्यागामी तरंगों की तरंग दैर्ध्य सबसे लंबी तरंग दैर्ध्य से शुरू करते हुये निम्न होंगी:

$2L, L, 2/3\ L$....... इत्यादि (चित्र 8.6 देखें)



चित्र 8.6 : एक दोनों सिरों पर बद्ध, लंबाई वाले धागे पर अनुमत प्रत्यागामी तरंगें।

यह तरंग दैर्ध्य निम्नलिखित संबंधों द्वारा धागे के दोलन की आवृत्ति निर्धारित करती है:

$$\lambda \nu = v$$

यहां v धागे में अनुपस्थ तरंग का वेग है, इसको निम्न संबंध द्वारा दर्शाया गया है:

$$V = \sqrt{\frac{T}{M}}$$

जहां T धागे पर लगा तनाव है तथा M धागे की इकाई लम्बाई की संहति है।

हम कंपन की न्यूनतम आवृत्ति ν_0 को मूल आवृत्ति कहते हैं। इसे हम निम्न प्रकार से दर्शाया जाता है:

$$\nu_0 = \frac{v_t}{\lambda} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{M}}$$

दूसरी आवृत्तियों को अधिछवि कहा जाता है तथा यह मूल आवृति ν_0 के समाकल गुणांक होते हैं (चित्र 8.6 देखें)।

मूल आवृत्ति को पहला संनाद भी कहते हैं। पहला अधिछवि जिसकी आवृति $\nu = 2\nu_0$ होती है दूसरा संनाद कहलाता है, दूसरा जिसकी आवृत्ति $\nu = 3\nu_0$ होती है, तीसरा संनाद कहलाता है, इत्यादि।

प्रत्यागामी तरंगों के सिद्धांत पर आधारित वाद्य यंत्र हैं बांसरी, रीड इत्यादि। स्वर विशेषता तथा पूर्ण रूप से ध्वनि को निर्धारित करने वाले मूल तत्व निम्नलिखित हैं:

1. कंपन या शोर का स्रोत
2. अभ्यांतर व्यास का आकार व नाप, तथा
3. अंगुलि द्वारा प्रयोग में आने वाले छेदों का नाप व स्थिति।

लकड़ी के वाद्य यंत्र जिनमें हवा भरी हो (woodwind) के स्वर की विशेषता, भौतिक व वाद्यिक अनुभव के संयोग पर निर्भर करती है। भौतिक दृष्टि से वाद पेटी में हवा को दबाव लगाकर बंद किया हुआ होता है। इस समय दबाव को रखने के लिये एक बहुत बड़े जैलाशय की आवश्यकता होती है, जब कि अंगुलियों से निस्पंद के विभिन्न संयोगों को बजाया जा रहा हो। उपरोक्त वाद्यों में एक सिरा खुला होता है, जिससे इन्हें खुले सिरे वाली ओरगन पाइप कहा जाता है। ओरगन पाइप का बंद सिरा स्थिर परिसीमा की तरह होता है तथा खुला सिरा मुक्त परिसीमा की तरह होता है। बंद सिरे पर सदैव निस्पंद होता है तथा खुले सिरे पर सदैव प्रस्पंद होता है।

एक सिरे से बंद पाइप का मूल तरंग दैर्ध्य निम्न होता है:

$$\lambda = 4L$$

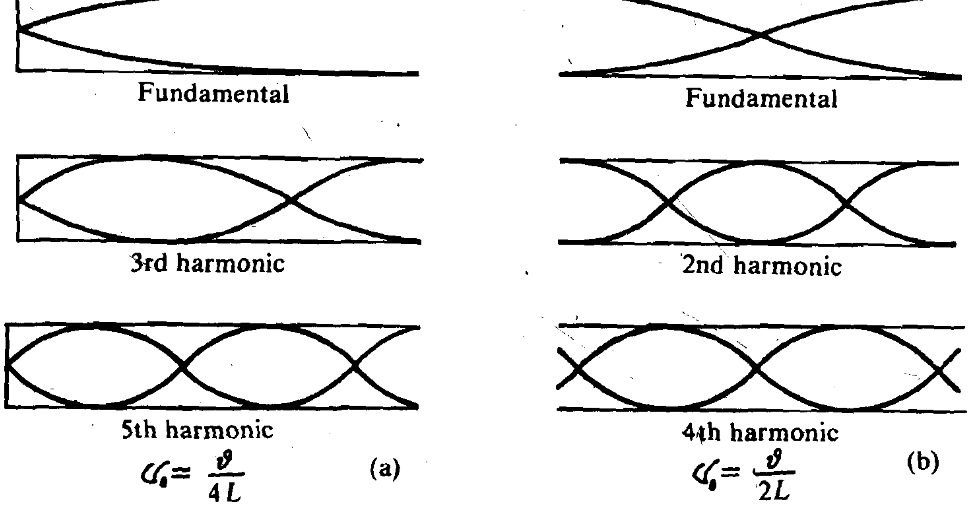
इसलिये मूल आवृत्ति को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं:

$$\nu_0 = \frac{v}{4L}$$

इस तरह की नली में समाक संनाद नहीं होते (चित्र 8.7 देखें)। दोनों सिरों से खुली नली के लिये मूल तरंग दैर्ध्य निम्न होगी:

$$\lambda = 2L$$

तभी मूल आवृत्ति $\nu_0 = \dfrac{v}{2L}$ होगी।



चित्र 8.7 : ओरगन पाइप में अनुदैर्घ्य प्रत्यागामी तरंगों के कंपन (अ) एक सिरा बंद (ब) दोनों सिरे खुले :

बोध प्रश्न 2

क) एक प्यानों का एक मीटर लंबा धागा दोनों सिरो में बद्ध है। इसकी इकाई लम्बाई की संहति .015 kg/m है। एक $\nu = 220$ Hz आवृत्ति वाले मूल स्वर को बजाने के लिये इसका प्रयोग किया जाता है। धागे पर लगाये जाने वाले तनाव का परिकलन कीजिये।

ख) एक मीटर लंबी, एक सिरे से बंद ओरगन पाइप के मूल विभा की आवृत्ति का आंकलन कीजिये।

8.3.3 प्रत्यागामी तरंगों की विशेषताएँ

पिछले भाग में हमने प्रत्यागामी तरंगों की उन विशेषताओं का विवेचन किया है जिनके कारण वह प्रगामी तरंगों से भिन्न हैं। क्या आप प्रत्यागामी तरंगों की विशेषताओं के बारे में कुछ लिख सकते हैं? ऐसा करने के बाद आप, अपने जवाब की तुलना निम्नलिखित से कीजिये :

1. प्रत्यागामी तरंगें प्रगामी नहीं होती।
2. प्रत्येक कण का आयाम बराबर नहीं होता। यह प्रस्पंदों पर महत्तम तथा निस्पंदों पर शून्य होता है। इनके बीच में यह प्रस्पंद से धीरे-धीरे कम होता हुआ निस्पंद पर शून्य हो जाता है।
3. दो क्रमागत निस्पंदों या दो क्रमागत प्रस्पंदों के बीच की दूरी प्रत्यागामी तरंगों की तरंग दैर्ध्य से आधा होता है। माध्यम खंड़ों में विभाजित हो जाता है तथा प्रत्येक भाग की लंबाई तरंग दैर्ध्य के आधे के बराबर होती है।
4. दो क्रमागत निस्पंदों के अंतर्गत आने वाले सभी कणों की कला समान होती है यानि यह कण महत्तम व न्यूनतम विस्थापन वाली अवस्था तथा साम्यावस्था में एक साथ पहुंचते हैं। एक भाग के कणों की कला संलग्न दूसरे भाग के कणों की कला के विपरीत होती है।
5. निस्पंदों पर कणों का वेग शून्य होता है। परस्पंदों पर कणों का वेग महत्तम होता है। इन दोनों के बीच में स्थित कणों का वेग प्रस्पंद से धीरे कम होता हुआ निस्पंद पर आ कर शून्य हो जाता है।

8.4 तरंग समूह व समूह वेग

अभी तक हमने दो बिल्कुल एक समान तरंगों के अध्यारोपण पर विचार किया है। आइये अब हम देखें कि जब दो लगभग बराबर कोणीय आवृत्ति ω_1 व ω_2 वाली तरंगों का अध्यारोपण होता है, तो क्या होता है।

स्थिति III की अनावश्यक गणितीय जटिलताओं से बचने के लिये हम दोनों तरंगों के आयाम के बराबर रखते हैं। इस प्रकार की दो तरंगों के अध्यारोपण को निम्न प्रकार से दर्शाया जा सकता है :

$$\begin{aligned} Y(x,t) &= a\sin(\omega_1 t - k_1 x) + a\sin(\omega_2 t - k_2 x) \\ &= 2a\sin\left[\frac{(\omega_1+\omega_2)t-(k_1+k_2)x}{2}\right] \\ &= \quad \cos\left[\frac{(\omega_1-\omega_2)t-(k_1-k_2)x}{2}\right] \end{aligned} \tag{8.11}$$

यदि ω_1 व ω_2 तथा k_1 व k_2 लगभग बराबर हो तो हम लिख सकते हैं कि

$$\omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega \quad \text{व} \quad k_1 - k_2 = \Delta k$$

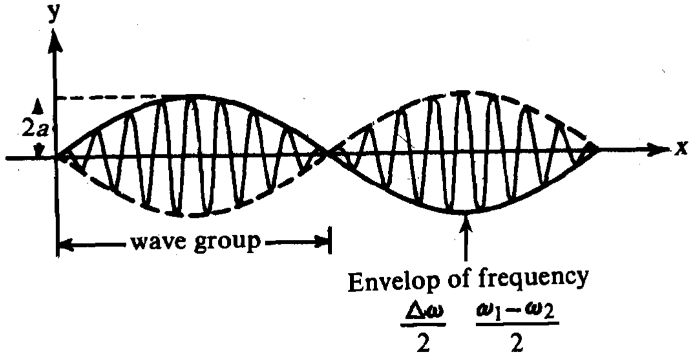
आगे निम्न लिखते हुए

$$\omega_{av} = \frac{\omega_1+\omega_2}{2} \quad \text{तथा} \quad K_{av} = \frac{k_1+k_2}{2}$$

समीकरण (8.1) को निम्न रूप में लिखा जा सकता है

$$Y(x,t) = 2a\sin(\omega_{av}t - kx)\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\ t - \frac{\Delta k}{2}\ k\right) \tag{8.12}$$

आइए अब हम देखें कि समीकरण (8.12) द्वारा निरूपित नयी तरंग कैसी दिखती है। पहली बात, इस तरंग का आयाम व्यष्टिगत तरंगों के आयाम से दो गुणा होता है। दूसरी बात यह दो हिस्सों में बनी होती है। शीघ्र परिवर्तित होने वाला भाग (साइन भाग) की आवृत्ति दो घटक तरंगों की आवृत्तियों का माध्य होता है। धीरे से परिवर्तित (यानि साइन भाग) होने वाले भाग की आवृत्ति, दोनों आवृत्तियों में अंतर का आधा होता है। यह भाग शीघ्र परिवर्तित होने वाले भाग पर आवरण की तरह बन जाता है जैसा कि चित्र 8.8 में दिखाया गया है।



चित्र 8.8 : लगभग बराबर आवृत्तियों ω_1 तथा ω_2 वाली दो तरंगों का अध्यारोपण।

चित्र 8.8 से यह स्पष्ट होता है कि अध्यारोपण के परिणामस्वरूप समूहों या खंडों की उत्पत्ति होती है, जो तरंग समूह (या तरंग पिटक) कहलाते हैं। तरंग समूह जिस वेग से आता है, उसी वेग वह व्यष्टिगत तरंग या परिणामी तरंग के वेग से भिन्न हो सकता है। तरंग समूह के वेग को समूह वेग कहते हैं। कोणीय आवृति तथा तरंग सदिश यह निम्नलिखित सम्बन्ध द्वारा दर्शाया गया है :

$$v_g = \frac{\Delta\omega/2}{\Delta k/2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

यदि एक समूह में कई घटक तरंगें हों, जिनकी कोणीय आवृत्ति ω_1 तथा ω_2 के अंतर्गत हो (जहाँ ω_1 तथा ω_2) तब हम समूह वेग v_g को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं:

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}$$

यहाँ $d\omega$ तथा dk को दर्शाते हैं (अधिकतम तथा न्यूनतम के बीच का अन्तर)।

यहाँ $d\omega$ तथा dk तरंग समूह को बनाने वाली घटक तरंगों की कोणीय आवृत्ति तथा संचरण नियतांक के विस्तार (अधिकतम तथा न्यूनतम के बीच का अन्तर) को दर्शाते हैं।

परिणामी अध्यारोपित तरंग का वेग (जिसे कला वेग भी कहते हैं) समीकरण (8.12) का प्रयोग करते हुए, हमें निम्न समीकरण प्राप्त होता है:

$$v_p = \frac{\omega_{av}}{k_{av}}$$

यदि व्यष्टिगत तरंगों का वेग समान हो, यानि

$$\frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2} = v$$

तब

$$v_p = \frac{\omega_1+\omega_2}{k_1+k_2}$$

यानि समूह वेग, कला वेग के बराबर है।

समूह वेग, भौतिक में अधिक मूल राशि है क्योंकि समूह वेग वाली तरंग के साथ ऊर्जा स्थानांतरण भी होता है। समूह तथा कला वेग के संबंध को हम निम्न प्रकार से लिख सकते हैं:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kv)}{dk}$$

जिसे हल करने पर हमें निम्न समीकरण प्राप्त होती है

$$v_g = v + k\frac{dv}{dk}$$

यदि हम लिखें

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

तब $$dk = -\frac{2\pi}{\lambda}\ d\lambda \qquad (8.15)$$

समीकरण (8.15) में इसका प्रयोग करते हुए हमें निम्न समीकरण प्राप्त होता है:

$$v_g = v + \frac{2\pi}{\lambda}\quad \frac{dv}{(-2\pi/\lambda^2 d\lambda)}$$

$$= v - \lambda\, dv/d\lambda \qquad (8.16)$$

इससे हमें समूह तथा कला वेग के बीच एक और संबंध प्राप्त होता है। परिणामी तरंग की तरंग दैर्ध्य निम्न होगी:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

तथा अन्वालोपी तरंग की तरंग दैर्ध्य निम्न होगी

$$\lambda_e = \frac{2\pi}{\Delta k/2} = \frac{4\pi}{\Delta k}$$

क्योंकि Δk, k की तुलना में बहुत कम है

इसलिए $\lambda_e >> \lambda$

यदि λ_1 व λ_2 घटक तरंगों की तरंग दैर्ध्य हो तो यह सरलता से सिद्ध किया जा सकता है कि

$$\frac{\lambda_e}{2} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

इससे हमें तरंग समूह की लंबाई प्राप्त होती है। चित्र 8.9 से हमें ज्ञात होता है कि तरंग समूह की लंबाई अन्वालोपी तरंग की तरंग दैर्ध्य से आधी होती है यानि वह $\lambda_e/2$ के बराबर होती है।

समूह व कला वेगों के बीच के अंतर को दर्शाने के लिए हम गहरे पानी में उत्पन्न होने वाली तरंगों के खास उदाहरण पर विचार करते हैं, जिन्हें गुरूत्व तरंग कहते हैं। ये तरंगें बहुत अधिक परिक्षिप्त होती हैं। इनका कला वेग इनके तरंग दैर्ध्य की वर्गानुपाती होती है। यानि

$$v_p = c\lambda^{1/2}$$

या

$$v_p = c_1 k^{-1/2} \quad (\text{क्योंकि } k = \frac{2\pi}{\lambda})$$

यहाँ नया स्थिरांक $c_1 = c\sqrt{2\pi}$

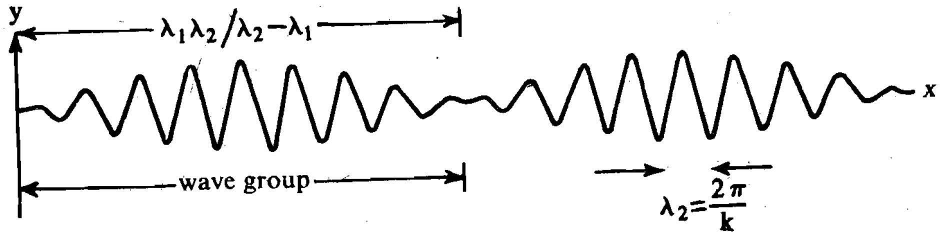
इसलिए $v_p = \omega/k$

$$\omega = c_1 k^{1/2}$$

ω को k के सापेक्ष में अवकलित करने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है।

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\ c_1 k^{-1/2} = v_p$$

अर्थात् गुरूत्व तरंग का समूह वेग उसके कला वेग का आधा होता है। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि इन तरंगों में घटक तरंग शीर्ष पूरे समूह में अधिक तेजी से चलते हैं।



चित्र 8.9 : तरंग समूह तथा उनका विस्तार

बोध प्रश्न 3

एक तरंग का किसी माध्यम में कला वेग निम्न प्रकार से निरूपित है :

$$v = c_1 + c_2 \lambda$$

जहाँ c_1 तथा c_2 स्थिरांक है। इसका समूह वेग क्या होगा?

8.5 विस्पंदन

हमने ऊपर देखा है कि दो लगभग बराबर कोणिय आवृत्तियों ω_1 तथा ω_2 वाली तरंगों के अध्यारोपण से तरंग समूहों की उत्पत्ति होती है। आपने यह देखा कि चित्र 8.8 व चित्र 8.99 में हमने परिणामी विस्थापन $y(x, t)$ को दूरी x के सापेक्ष में ग्राफ खींचा। इसे हम दिकस्थान में अध्यारोपण कह सकते हैं। यहाँ हमने समय को स्थिर माना है। अब हम एक और प्रकार के अध्यारोपण पर विचार करते हैं, जहां हम $y(x, t)$ को t के सापेक्ष में ग्राफ खीचेंगें और इसे हम समय में अध्यारोपण कह सकते हैं। यहां हम x को स्थिर मानते हैं।

ध्वनि तरंगों के समय में अध्यारोपण से विस्पंदन की रोचक परिघटना से उत्पन्न होता है। विस्पंदन तेज ध्वनियां होती हैं, जो नियमित समय अंतराल के बाद सुनाई देती हैं, जो अध्यारोपित होने वाली दो तरंगों की **आवृत्तियों** के अंतर पर निर्भर करती है। विस्पंदन अधिकतर संगीतकारों द्वारा उनके वाद्यों को समस्वरित करने के लिये प्रयोग किया जाता है।

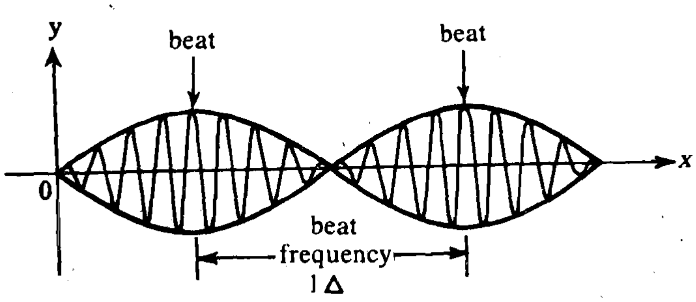
आइए, अब हम, लगभग समान कोणीय आवृत्तियों ω_1 व ω_2 समान आयाम a तथा एक ही दिशा में अग्रसर होने वाली दो तरंगों पर विचार करें, जैसा कि हम ने पिछले भाग में किया था। हम समीकरण (8.10) में x को, $x = 0$ पर स्थिर करते हैं। यह $x = 0$ पर खडें तरंगों को गुजरते हुये देखने वाले निरीक्षक के समान है। वह निम्नलिखित परिणामी तरंग के रूप का निरीक्षण करेगा :

$$Y(x, t) = Y(o, t) = [a \sin(\omega_1 t) + a\sin(\omega_2 t)]$$

भाग 8.4 में चर्चित पिछली स्थिति की भांति समीकरण (8.18) दर्शाता है कि, परिणामी तरंग का आयाम किसी एक बिंदु पर स्थिर नहीं होता, वह समय के साथ परिवर्तित होता रहता है। इसकी कोणीय आवृत्ति $\omega_{av} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ होती है। इसका आयाम $\cos\left(\frac{\Delta\omega_t}{2}\right)$ पद की उपस्थिति के कारण, शून्य व $2a$ के बीच में परिवर्तित होता रहता है। यह पद, साइन पद के आवरण की भांति क्रिया करता है।

यदि ω_1 व ω_2 लगभग बराबर हों तो हमें $\Delta\omega$ बहुत कम होगा। इस स्थिति में परिणामी तरंग का आयाम बहुत धीरे परिवर्तित होता है। इस तरंग के आवृत्ति बढ़ते व घटने से विस्पंदन की उत्पत्ति होती है या नियमित समय अंतराल के बाद तेज ध्वनियां सुनाई देती हैं।

विस्पंदन आयाम के अधिकतम होने पर सुनाई देता है (चित्र 8.10 देखें)। ऐसा इसलिए होता है क्योंकि ध्वनि तीव्रता आयाम के वर्ग के अनुक्रमानुपाती होती है। कोणीय आवृत्ति, $\Delta\omega/2$ से जुड़ी हुई ऊर्जा एक आर्वत में दो बार अधिकतम होता हैं। इस तरह विस्पन्द की आवृत्ति घटक आवृत्तियों के अंतर $(\omega_1 - \omega_2)$ के बराबर होता है। आवृत्तियों ν_1 और ν_2 की व्यन्जन में विस्पंदन आवृत्ति $\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2 = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$ दो क्रमागत विस्पंदनों के बीच के समय अंतराल को विस्पन्द कहते हैं (चित्र 8.10 देखें)।



चित्र 8.10 : लगभग समान आवृत्तियों वाली दो तरंगों के अध्यारोपण से उत्पन्न होने वाला विस्पंदन

बोध प्रश्न 4

जब एक पियानो पर 560 हर्टज आवृत्ति वाले द्विभुज द्वारा कोई स्वर बजाया जाता है तो हर सेकिंड में 6 विस्पंदन सुनाई देते हैं। स्वर की आवृत्ति ज्ञात कीजिये।

8.6 सारांश

1. जब एक ही दिकस्थान से गुजरने वाली दो तरंगें एक दूसरे पर अध्यारोपित हों तो किसी भी बिंदु पर परिणाम विस्थापन, व्यष्टिगत विस्थापनों के बीजीय योग के बराबर होता है।
2. दो समान आयाम, आवृत्ति व तरंग दैर्ध्य वाली तरंगें, जो विपरीत दिशा में बढ़ रही हों तथा दो बिंदुओं के बीच में सीमित हों, के अध्यारोपण से प्रत्यागामी तरंगों की उत्पत्ति होती है।
3. प्रत्यागामी तरंगों में, शून्य व अधिकतम विस्थापन वाले बिंदुओं को क्रमशः निस्पंद व प्रस्पंद कहते हैं। दो क्रमागत निस्पंदों या प्रस्पंदों के बीच की दूरी, प्रत्यागामी तरंग की आधी तरंग दैर्ध्य के बराबर होती है।
4. दोनों अनुप्रस्थ तथा अनुदैर्ध्य प्रत्यागामी तरंगों के कंपन की विधा भिन्न हो सकती है।
5. दो लगभग समान आवृत्ति वाली समान दिशा में निर्देशित तरंगों के अध्यारोपण से तरंग समूहों व विस्पंदों की उत्पत्ति होती है।
6. एक सेकिंड में उत्पन्न होने वाले विस्पंदनों की संख्या, दोनों तरंगों की आवृत्तियों के अंतर के बराबर होती है।
7. जिस वेग से एक तरंग समूह बढ़ता है उसे समूह वेग कहते हैं। यह तरंग वेग के बराबर होता है जब दोनों घटक तरंगों का वेग बराबर हो अन्यथा यह तरंग वेग से भिन्न होता है।
8. दो घटक तरंगों की तरंग दैर्ध्य का अंतर जितना कम होगा, तरंग समूह की लंबाई उतनी ही अधिक होगी।

8.7 अंत में कुछ प्रश्न

1. एक धागे पर दो बिंदुओं का निरीक्षण किया जाता है जबकि उस पर से एक प्रगामी तरंग गुजर रही है। यह बिंदु $x_1 = 0$ व $x_2 = 1$ m पर स्थित है। दोनों बिंदुओं की अनुप्रस्थ गति निम्न प्रकार से दर्शायी जाती है:

   $y_1 = 0.2 \sin 3\pi t$ and $y_2 = 0.2 \sin (3\pi t + \frac{\pi}{8})$

क) हर्टज में आवृत्ति क्या होगी?
ख) तरंग दैर्ध्य क्या होगी?
ग) तरंग किस गति से बढ़ेगी?

2. पचास स्वरित्र द्विभुज को बढ़ती हुई आवृत्ति के अनुसार इस प्रकार क्रमबद्ध किया गया है कि कोई भी दो क्रमागत द्विभुज को एक साथ बनाये जाने पर, एक सेकिंड में 5 विस्पंदन उत्पन्न होते हैं। यदि आखिरी द्विभुज पहले वाले के संनादी हैं तो पहले वाले की आवृत्ति का परिकलन कीजिये। (एक स्वर को दूसरे का ओक्टव कहते हैं जब उसकी आवृत्ति दूसरे की आवृत्ति से दुगुनी हो)।

3. एक बंद नली 25 cm लंबी, जब ऑक्सीजन से पूरी भरी होती है तो एक दिये हुये स्वरित्र द्विभुज से अनुनाद करती है। ऐसी बंद नली की लंबाई ज्ञात कीजिये जो हाइड्रोजन से भारी होने पर भी उसी स्वरित्र से अनुवाद करे। [ध्वनि वेग = 320 m/s तथा हाइड्रोजन में ध्वनि वेग = 1280 m/s]

4. एक 'd' परमाणु **अन्तालय** वाले क्रिस्टल में अनुप्रस्थ तरंग का कर्ला वेग (v) निम्नलिखित है :

$$v = C \frac{\sin kd/2}{kd/2}$$

जहां C स्थिरांक है। प्रमाणित कीजिये कि इसका समूह वेग $C \cos kd/2$ होगा।

8.8 बोध प्रश्न के हल

बोध प्रश्न 1

क्योंकि बद्ध सिरे से परावर्तन होने पर π कलांतर हो जाता है, प्रत्यावर्तित तरंग को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :

$$y_2 = a \sin (\omega t + kx)$$

इससे हमें निम्न परिणामी विस्थापन y (x, t) प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= a \sin (\omega t - kx) - a \sin (\omega t + kx) \\ &= -2a \sin kx \cos \omega t \\ &= A \cos \omega t \end{aligned}$$

जहां $A = -2d \sin kx$

बद्ध सिरे पर सदैव निस्पंद होता है क्योंकि वहां पर विस्थापन शून्य होता है। खुले सिरों वाली पाइप में सिरे पर सदैव प्रस्पंद होता है। एक धनात्मक x दिशा में निर्देशित आपतित तरंग तथा एक ऋणात्मक x दिशा में निर्देशित प्रत्यावर्तित तरंग से एक प्रत्यागामी तरंग बनती है। प्रत्येक तरंग अपने साथ एक बराबर ऊर्जा विपरीत दिशा में ले जाती है। इसलिए परिणामी ऊर्जा बहाव सदैव शून्य होता है।

2. (क) मूल विभा की तरंग **दैर्ध्य**:

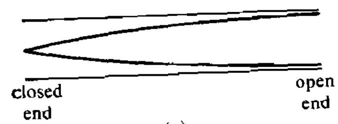
$$\lambda = 2L = 2 \times 1\,\text{m} = 2\,\text{m}$$

तरंग का वेग

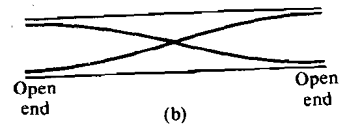
$$v = 220\ \text{Hz} \times 2\ \text{m}$$
$$= 440\ \text{m/s}$$

$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ से

$$T = v^2/\mu = (440\ \text{m/s})^2 \times 0.015\ \text{kg/m}$$
$$= 2.9 \times 10^3\ \text{N}$$



(a)



(b)

(ख) मूल विधा की तरंग दैर्घ्य

$$\lambda = 4L = 4 \times 1\,\text{m} = 4\,\text{m}$$

आवृत्ति $\nu = \dfrac{v}{\lambda} = \dfrac{350\,\text{m/s}}{4\,\text{m}} = 87.5$ हर्टज $\simeq 88$ हर्टज

नलि को करने से पिच, 3 के गुणांक से बढ़ जाता है जिस से अगले संनाद की आवृतियां $\nu = 3 \times 88 = 264$ **हर्टज होती हैं।।**

3. हम जानते हैं कि

$$v_g = v - \lambda \frac{du}{d\lambda}$$

प्रश्न में आने वाली तरंग के लिए $\dfrac{du}{d\lambda} = C^2$

ऊपर दिये गये समीकरण में इसका प्रयोग करते हुये

$$v_g = C_1 + C_2\lambda - \lambda C_2 = C_1$$

4. यदि हम स्वर की आवृत्ति को मानें, तो

$$6 = [560 - \nu]$$
$$\nu = 554 \text{ हर्टज या } 566 \text{ हर्टज}$$

इस स्थिति में हम स्वर की आवृत्ति बिना निश्चित स्थिति से नहीं ज्ञात की जा सकती। इसका मान इन दोनों में से एक होगा।

अंत में कुछ प्रश्नों के उत्तर

1. (अ) $\nu = 1.5$ हर्टज

(ब) $\lambda = \dfrac{16}{16n\text{-}1}$ m, n = 1, 2, 3..... निर्देशित तरंग के लिये

$= \dfrac{16}{16n\text{-}1}$ m, n = 0, 1, 2, 3..... निर्देशित तरंग के लिये

(द) $U = +8/5$ m/s etc
$V = -24$ m/s etc

2. पहले स्वर की आवृत्ति को n मान लें
तब दूसरे द्विभुज की आवृत्ति होगी $= n+5$
तीसरे द्विभुज की आवृत्ति होगी $= n+5+5 = n+10$
चौथे द्विभुज की आवृत्ति होगी $= n+5+5+5 = n+15 = n + (4\text{-}1)\,5$
पांचवें द्विभुज की आवृत्ति होगी $= n+(5\text{-}1)5 = n+20$
इस प्रकार पचासवें द्विभुज की आवृति होगी

$$= n + (50-1) \times 5$$
$$= n + 245$$

क्योंकि पचासवें द्विभुज की आवृत्ति 2n है इसलिये

$$n + 245 = 2n$$

तथापि $n = 245$ हर्टज,

3. पहली नली के लिये मूल आवृत्ति

$$\nu_1 = \frac{v_0}{4l_1}$$

जहां v_0 हाइड्रोजन में ध्वनि वेग है तथा l_1 इसकी पहली नली की लंबाई है। दूसरी नली के लिए मूल आवृति

$$\nu_2 = \frac{V_1}{4l_2}$$

जहां V_1, v_0, हाइड्रोजन में ध्वनि वेग है तथा l_2 दूसरी नली की लम्बाई है। क्योंकि दोनों नलियों एक ही आवृत्ति पर अनुवाद करती हैं, इसलिये

$$\nu_1 = \nu_2 \text{ या } \frac{v_0}{4l_1} = \frac{V_1}{4l_2}$$

$$\therefore l_2 = \frac{V_1}{v_0} \times l_1$$

v_h, v_0 *तथा* l_1 के मान कों प्रस्थापित करने पर

$$l_2 = \frac{1280\,\text{ms}^{-1}}{320\,\text{ms}^{-1}} \times 25\text{ cm}$$
$$= 100\text{ cm}$$

4. समूह वेग

$$\nu_g = \frac{d\omega}{dk}$$

तथा

$$\omega = k\,\nu$$

हम जानते हैं

$$\omega = C\,\frac{\sin(kd/2)}{kd/2} = k\nu$$
$$= kC\frac{\sin kd/2}{kd/2}$$
$$= \frac{2C}{d}\sin kd/2$$

या

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{2C}{d}\cos\left(\frac{kd}{2}\right)\frac{d}{2}$$

या

$$v_g = C\cos(kd/2)$$