इकाई 7 दो माध्यमों की परिसीमा पर तरंगें

इकाई की रूपरेखा

7.1 प्रस्तावना
उददेश्य
7.2 तरंगाग्र संकल्पना तथा हाइगन्स संरचना
तरंगों का परावर्तन
तरंगों का अपवर्तन
7.3 परावर्तन तथा पारगमन आयाम गुणांक
अनुप्रस्थ तरंगें
अनुदैर्ध्य तरंगें
7.4 परावर्तन तथा पारगमन ऊर्जा गुणांक
7.5 डाप्लर का सिद्धांत
ध्वनि स्रोत गतिमान तथा प्रेक्षक स्थिर
ध्वनि स्रोत स्थिर तथा प्रेक्षक गतिमान
ध्वनि स्रोत तथा प्रेक्षक दोनों गतिमान
7.6 प्रघाती तरंगे
7.7 सारांश
7.8 अंत में कुछ प्रश्न
7.9 हल और उत्तर

7.1 प्रस्तावना

इकाइ 6 में आप तरंग गति की मूल विशेषताओं के बारे में पढ़ चुके हैं। आपने तनित तार और तरल पदार्थों में ध्वनि के संदर्भ में तरंग संचरण का अध्ययन किया। अब आप यह पूछ सकते हैं कि यदि कोई तरंग एक दीवार से बंधी तार पर आपतित हो तो क्या होगा? आप जानते हैं कि तरंग ऊर्जा दीवार में संचरण नहीं करेगी और तरंग वहां रुक भी नहीं सकती। तब तरंग ऊर्जा कहां जाएगी? ऐसी स्थिति में तरंग उल्ट दिशा में तार के अनुदिश गति करती है और हम कहते हैं कि तरंग परावर्तित हो गई है।

आपने किसी बड़े हॉल या पहाड़ियों में ध्वनि परावर्तन का अनुभव गूँज के रूप में अवश्य किया होगा। आपने किनारे से जल (समुद्र) तरंगों के परावर्तन को भी देखा होगा। मुँह देखने वाले शीशे में प्रकाश का परावर्तन तो सर्वसामान्य उदाहरण है। पराश्रव्य तरंगों का परावर्तन पृथ्वी के गर्त में पैट्रोलियम तेल और खनिजों की खोज, समुद्री यातायात तथा सोनार के प्रचलन के लिए उत्तरदायी है। विद्युत-चुंबकीय तरंगों का परावर्तन वायुयान संसूचना में रडार की कार्यप्रणाली का संचालन करता है। आयनोस्फ़ीयर द्वारा रेडियो तरंगों का परावर्तन ही एक स्थान से दूसरे स्थान पर संकेत परागमन संभव होता है तथा संचार साधनों में महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है।

मान लीजिए की भिन्न-भिन्न प्रति इकाई संहति की दो डोर (या तार) आपस में जुड़ी हैं। आप इस बात से तो सहमत होंगे की इनकी परिसीमा न तो दृढ़ है और न ही दोनों माध्यमों के गुण समान हैं। तो आपतित तरंग का क्या होगा? ऐसी स्थिति में ऊर्जा का कुछ अंश दूसरी रस्सी (तार) में पारगत हो जाता है तथा शेष भाग पहली डोरी में वापस लौट जाता है। इसी प्रकार जब कोई तरंग दो माध्यमों के सीमान्त पृष्ठ पर पहुंचती है तो उसका कुछ अंश पहले माध्यम में परावर्तित हो जाता है तथा शेष भाग दूसरे माध्यम में पारगत हो जाता है। जब जल की गहराई अचानक बदल जाती है तो जल पृष्ठ पर संचरित तरंगे आंशिक रूप से परावर्तित होती हैं। हमारे वायुमंडल में आपतित दृश्य प्रकाश माध्यम के घनत्व में परिवर्तन के कारण आंशिक रूप से परावर्तित होता है। मानव शरीर में विभिन्न घनत्व के ऊत्तकों के अंतरापृष्ठों पर पराध्वनिक तरंगों के आंशिक परावर्तन के कारण अल्ट्रासाउंड की चिकित्सा निदान में महत्वपूर्ण भूमिका है।

क्या इसका तात्पर्य यह है कि तरंगें कभी भी पूर्ण रूप से परावर्तित नहीं होतीं। यदि यह सत्य होता तो हम लैंस की कार्यविधि कभी नहीं समझ सकते थे जो कि देखने की प्रक्रिया और वातावरण से हमारे संबंध का मूल कारण है। आपने सूर्योदय और सूर्यास्त के समय सूर्य की छवि को देखा होगा। ऐसा वायुमंडल में प्रकाश के अपवर्तन के कारण होता है।

अनुभाग 7.2 तथा 7.3 में आप हाइगन्स संरचना और प्रतिबाधा संकल्पना का उपयोग कर देखेंगे कि जब कोई तरंग दो माध्यमों की सीमान्त पृष्ठ पर पहुंचती है तो इसका तरंगदैर्ध्य बदल जाता है परन्तु आवृत्ति अचर रहती है। लेकिन दैनिक जीवन में ऐसी अनेक स्थितियां हैं जहां तरंग की आवृत्ति भी बदल जाती है। इसे **डाप्लर प्रभाव** कहते हैं। इसे आप अनुभाग 7.5 में पढ़ेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- तरंगाग्र की व्याख्या कर सकेंगे
- किसी भी स्रोत के लिए तरंगाग्र की संरचना कर सकेंगे
- हाइगन्स संरचना का इस्तेमाल करते हुए परावर्तन और अपवर्तन की विवेचना कर सकेंगे
- परावर्तन और पारगमन आयाम गुणांकों को परिकलित कर सकेंगे
- जब स्रोत अथवा प्रेक्षक गति में हों तो ध्वनि की आभासी आवृत्ति की परिकलना कर सकेंगे।

7.2 तरंगाग्र संकल्पना तथा हाइगन्स संरचना

आइए जल की सतह पर होने वाले तरंग संचरण पर विचार करें। यदि आप अपनी अंगुली को बार-बार पानी में डालें तो आप देखेंगे कि शिखाओं और गर्त की माला सी निकलती रहती है। इसका अर्थ यह हुआ कि सभी दिशाओं में तरंगें संचरित होती हैं। किसी निश्चित समय पर गर्त या शिखा गोलाकार होती है। **सम-कला बिंदुओं के बिंदुपथ को तरंगाग्र कहते हैं।** तरंगाग्र की आकृति स्रोत पर निर्भर करती है। बिंदु स्रोत से उत्पन्न तरंग के तरंगाग्र गोलीय होते हैं। जल की-सतह जैसी द्विविम आकृति पर तरंगाग्र वृत्ताकार होते हैं। यदि कोई स्रोत लम्बी स्लिट के रूप में हो तो तरंगाग्र बेलनाकार होंगे। बिंदु अथवा स्लिट से अधिक दूरी पर तरंगाग्र समतल दिखाई देते हैं। तरंगाग्र की संरचना को समझने के लिए हम हाइगन्स संरचना का उपयोग करते हैं।

हाइगन्स का अनुकरण करते हुए हम निम्नलिखित कल्पनाएं करते हैं:

(i) तरंगाग्र का प्रत्येक बिंदु स्वयं तरंग स्रोत की भांति व्यवहार करता है तथा द्वितीयक तरंगिकाएं (secondary wavelets) निकालता है जो कि उस माध्यम में सभी दिशाओं में तरंग के वेग से आगे बढ़ते हैं।

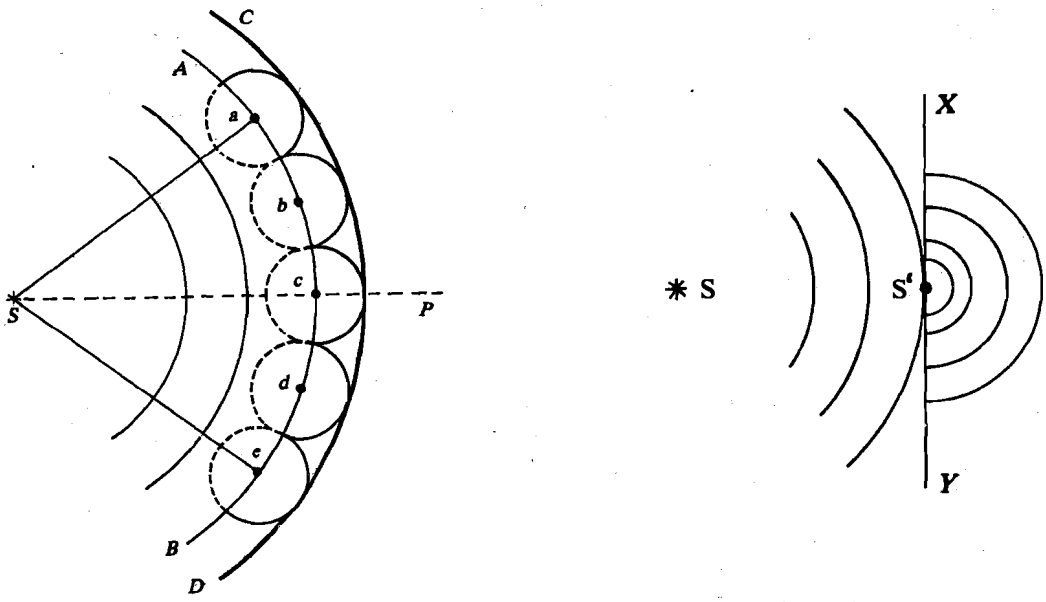
(ii) नया तरंगाग्र द्वितीयक तरंगिका के अग्राग्र आवरण से प्राप्त होता है।

(iii) समदैशिक (isotropic) माध्यम में तरंगें सभी दिशाओं में बराबर ऊर्जा संचरित करती हैं।

यदि S ध्वनि (या प्रकाश) का स्रोत हो, जैसा कि चित्र 7.1 में दिखाया गया है, तो t समय के पश्चात् AB समतल में माध्यम के सभी कण सम-कला में कंपन करते हैं क्योंकि ये सभी कण स्रोत से समान दूरी पर हैं और S से निर्गत कोई भी विक्षोभ उसी क्षण इन कणों तक पहुंच जाता है।

हाइगन्स संरचना के अनुसार AB प्राथमिक तरंगाग्र (primary wavefront) है। इस तरंगाग्र पर प्रत्येक बिंदु, जैसे कि a, b, c इत्यादि द्वितीयक स्रोत की भांति व्यवहार करते हैं। इन द्वितीयक स्रोतों से सभी दिशाओं में तरंगें संचरित होती हैं जिन्हें इन बिंदुओं के सापेक्ष वृत्त खींच कर दिखाया गया है। यदि किसी समय इनको स्पर्श करने वाले उभयनिष्ठ आवरण खींचा जाये तो इस प्रकार बना तरंगाग्र **द्वितीयक तरंगाग्र** कहलाता है।

संक्षेप में इसका अर्थ यह है कि स्रोत S से सभी दिशाओं में तरंगिकाएं निकलती हैं। इन तरंगिकाओं का आवरण प्राथमिक तरंगाग्र की भांति व्यवहार करता है। इस प्राथमिक तरंगाग्र



चित्र 7.1 (a) हाइगन्स तरंगाग्र की संरचना (b) द्वितीयक स्त्रोत का चित्रण

पर प्रत्येक बिंदु द्वितीयक तरंगिका के स्रोत का कार्य करता है। इन द्वितीयक तरंगिकाओं का आवरण द्वितीयक तरंगाग्र होता है। इस द्वितीयक तरंगाग्र के प्रत्येक बिंदु से पुनः तरंगिकाएं निकलती हैं जिनसे और तरंगाग्र बनते हैं। जब तक तरंग माध्यम में संचरित होती है यह प्रक्रिया चलती रहती है। (S से विकसित) विक्षोभ के संचरण की दिशा (SP) को किरण कहते हैं। किरण सदैव प्रसारी तरंगाग्र के लम्बवत होती है।

हाइगन्स की संरचना को समझने के लिए आप कल्पना करें कि बिंदु स्रोत एक खाली गोले के केन्द्र पर स्थित है। इस गोले की बाह्य सतह प्राथमिक तरंगाग्र की भांति कार्य करती है। यदि इस गोले को बड़ी त्रिज्या के एक अन्य खाली गोले में रख दिया जाए तो बड़े गोले की बाह्य सतह द्वितीयक तरंगाग्र की तरह व्यवहार करेगी। यदि इस गोले को फिर से और बड़ी त्रिज्या के गोले में बंद कर दिया जाए तब बाह्यतम गोले की सतह द्वितीयक तरंगाग्र बन जाती है। इसके लिए अंदर वाले गोले की सतह प्राथमिक तरंगाग्र का कार्य करती है। द्विविम में प्राथमिक तथा द्वितीयक तरंगाग्र संकेन्द्री वृत्त होते हैं, जिन्हें चित्र 7.1 (क) तथा 7.1 (ख) में दिखाया गया है।

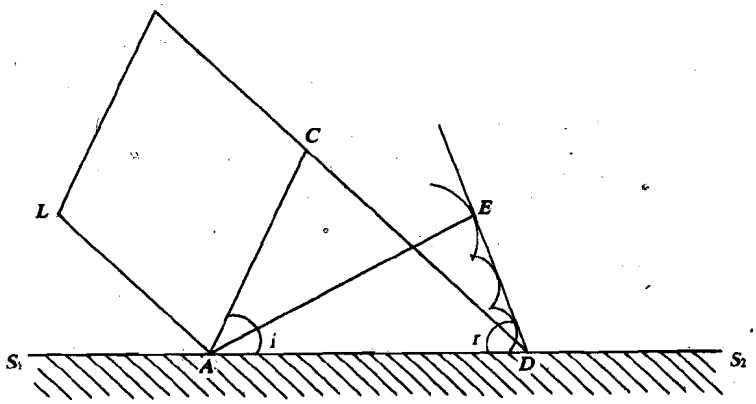
द्वितीयक स्रोतों के बनने की हाइगन्स की अवधारणा को चित्रात्मक रूप में भी समझा जा सकता है। यदि स्रोत से उत्सर्जित तरंगों के पथ में हम कोई स्क्रीन XY (जिसमें एक छोटा-सा छिद्र हो) को S' पर रख दें तो S' द्वितीयक स्रोत की भांति व्यवहार करता है (चित्र 7.1 ख)। इससे स्क्रीन के दूसरी ओर तरंगें उत्सर्जित होंगी। ये तरंगें S' से इस प्रकार फैलती हैं जैसे कि यह एक मूल स्रोत हो।

आप अपने स्कूल-पाठ्यक्रम में तरंगों के परावर्तन तथा अपवर्तन के बारे में पढ़ चुके हैं। जब वायु जैसे एक माध्यम में संचरित होती हुई तरंगें दूसरे माध्यम के सीमा पृष्ठ पर पहुंचती हैं तभी ये परिघटनाएं घटित होती हैं। मान लीजिए कि हम किसी रज्जु के एक सिरे को किसी दीवार से बांधते हैं और दूसरे सिरे को हिला कर एक स्पन्द (pulse) उत्पन्न करते हैं। आप यह देखेंगे कि स्पन्द सिरे से परावर्तित होती है। इसी प्रकार आप पानी के बेसिन में रिपल्स के परावर्तन का अध्ययन कर सकते हैं। आप यह जानकर आश्चर्य चकित होंगे कि प्रकाश सहित सभी तरंगों के लिए परावर्तन (अपवर्तन) के नियम एक ही हैं। आओ अब हम हाइगन्स के तरंग सिद्धांत के आधार पर तरंगों के परावर्तन तथा अपवर्तन का अध्ययन करें।

7.2.1 तरंगों का परावर्तन

चित्र 7.2 को देखें। इसमें LM समतल तरंगाग्र का वह भाग है जो चिकने परावर्तक पृष्ठ S_1S_2 की ओर बढ़ रहा है। इस तल पर यह तरंगाग्र सर्वप्रथम बिंदु A को स्पर्श करता है तथा इसके पश्चात् बिन्दु D की ओर उत्तरोत्तर बिन्दुओं पर आपतित होता है। यदि तरंग का वेग v हो तो तरंगाग्र पर स्थित बिन्दु M बिन्दु L की अपेक्षा परावर्तक तल पर $t = \frac{DC}{v}$ समय देर से पहुंचेगा। हाइगन्स के नियमानुसार परावर्तक तल पर प्रत्येक बिन्दु द्वितीयक तरंगिकाओं को उत्सर्जिक करता है। तथा इन तरंगिकाओं के आवरण से **परावर्तित तरंगाग्र** प्राप्त होता है। क्या आप परावर्तित तरंगाग्र का पता लगा सकते हैं? हम

देखते हैं कि जिस समय D विक्षोभित होता है उस समय A से उत्सर्जित तरंगिका $\frac{DC}{v}$ समय तक विकसित हो चुकी होती है तथा E तक पहुंच जाती है यानी $AE=DC$ इस तरंगिका को दर्शाने के लिए हम A को केन्द्र बिन्दु लेकर AE त्रिज्या की चाप लगाते हैं। इसी प्रकार हम A और D के मध्यवर्ती बिन्दुओं से भी कई अन्य वृत्त खींच सकते हैं। बिन्दु D से इन वृत्तों पर खींची गई स्पर्शज्या परावर्तित तरंगाग्र को परिभाषित करते हैं।



चित्र 7.2 : तरंग परावर्तन के लिए हाइगन्स की संरचना

चित्र 7.2 से यह स्पष्ट है कि Δs ACD तथा DEA सर्वांगसम हैं। अतः

$$\angle CAD = \angle ADE$$

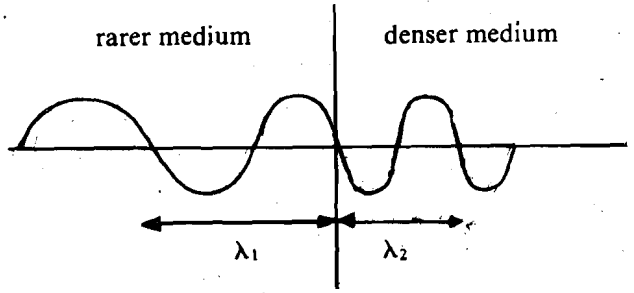
या $$\angle i = \angle r \qquad (7.1)$$

इसका अर्थ यह है कि आपतन कोण तथा परावर्तन कोण बराबर हैं। इसके अतिरिक्त आप यह भी देखेंगे कि आपतित तथा परावर्तित किरणें एवं आपतन बिन्दु पर अभिलंब कागज के तल में हैं।

इस संदर्भ में यह कहना आवश्यक है कि परावर्तित तरंगाग्र की कला में π का परिवर्तन हो जाता है। वास्तव में यह हर ऐसी गतिमय तरंग के लिए सत्य है जो विरल माध्यम (वायु) से सघन माध्यम (जल) के सीमान्त पृष्ठ पर परावर्तित होती है लेकिन इसका विलोम सदैव सत्य नहीं होता।

7.2.2 तरंगों का अपवर्तन

जब कोई तरंग दो माध्यमों की परिसीमा पर आपतित होती है तो इसका कुछ अंश परावर्तित हो जाता है तथा शेष भाग पारगत हो जाता है। इसका अध्ययन करने के लिए आप भिन्न-भिन्न प्रति इकाई लंबाई की संहति वाली एक मोटी तथा दूसरी पतली रज्जुओं को जोड़ दें। इकाई 6 में आप पढ़ चुके हैं कि किसी तरंग की चाल माध्यम के घनत्व के व्युत्क्रमानुपाती होती है। अर्थात् जब कोई तरंग विरल माध्यम से सघन माध्यम की ओर गति करती है तो उसकी चाल बढ़ जाती है परन्तु आवृत्ति वही रहती है। चित्र 7.3 में तरंग अपवर्तन को दिखाया गया है।



$\lambda_1 > \lambda_2$
$v_1 > v_2$

चित्र 7.3 : तरंग अपवर्तन में तरंग का तरंगदैर्ध्य परिवर्तन

मान लो कि किसी विरल माध्यम में ν आवृत्ति की तरंग की चाल तथा तरंगदैर्ध्य क्रमशः v_r एवं λ_r हैं। सघन माध्यम के सीमा पृष्ठ पर अपवर्तन के पश्चात् मान लीजिए कि इसकी चाल तथा तरंगदैर्ध्य क्रमशः v_d एवं λ_d हैं। गणितीय रूप से ये राशियां निम्न संबंध द्वारा जुड़ी हैं

$$\frac{v_r}{\lambda_r} = \frac{v_d}{\lambda_d} \qquad (7.2)$$

यह संबंध जल, वायु तथा रज्जुओं में तरंग संचरण के लिए एक समान मान्य है।

हाइगन्स के नियम के आधार पर आप अपवर्तन के नियमों को भी सत्यापित कर सकते हैं। लेकिन आप यह मानेंगे कि हाइगन्स की विधि मूलतः ज्यामितीय है और इसे तभी इस्तेमाल किया जा सकता है जब तरंग पार्थक्य पृष्ठ पर परावर्तित या अपवर्तित होती है। अब आप यह पूछ सकते हैं कि क्या हम इस विधि को भिन्न-भिन्न प्रति एकक लम्बाई की संहति की दो रज्जुओं में आंशिक परावर्तन तथा अपवर्तन के अध्ययन के लिए कर सकते हैं? यद्यपि सैद्धांतिक रूप में हम ऐसा कर तो सकते हैं परन्तु यह अध्ययन माध्यम प्रतिबाधा के पदों में करना अधिक सरल होता है। इसके लिए हम प्रायः परावर्तन तथा पारगमन आयाम गुणांकों की परिकलना करते हैं। आओ अब इस परिकलना की विधि सीखें।

7.3 परावर्तन तथा पारगमन आयाम गुणांक

इकाई 6 से आपको याद होगा कि हर माध्यम तरंग संचरण में प्रतिबाधा उत्पन्न करता है। यह प्रतिबाधा माध्यम के गुणों पर निर्भर करती है। आप यह जानना चाहेंगे कि माध्यमों की परिसीमा पर प्रतिबाधा के आकस्मिक परिवर्तन के कारण तरंगों की क्या अनुक्रिया होती है? इस रोचक प्रश्न का उत्तर पहले हम अनुप्रस्थ तरंग संचरण के लिए देंगे।

7.3.1 अनुप्रस्थ तरंगें

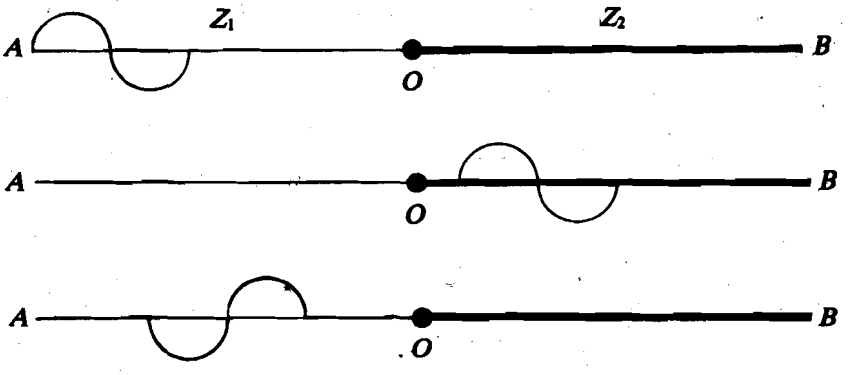
आइए असमान प्रति इकाई संहति की दो रज्जुओं AO तथा OB (जिन पर समान तनाव बल T लगा है) में तरंग संचरण का अध्ययन करें। मान लीजिए कि उनके अभिलक्षणिक प्रतिबाधाएं Z_1 तथा Z_2 हैं। धनात्मक x-दिशा में गतिमय तरंग बिन्दु O पर आंशिक रूप से परावर्तित हो जाती है तथा शेष भाग पारगत हो जाता है। आपतित, परावर्तित तथा पारगत तरंगों में कणों के विस्थापनों को निम्न व्यंजकों द्वारा व्यक्त किया जा सकता है:

$$y_i(x, t) = a_i \sin(\omega_0 t - k_1 x) \qquad (7.3)$$

$$y_r(x, t) = a_r \sin(\omega_0 t + k_1 x) \qquad (7.4)$$

तथा

$$y_{tr}(x, t) = a_{trl} \sin(\omega_0 t - k_2 x) \qquad (7.5)$$



चित्र 7.4: असमान प्रति इकाई संहति की रज्जुओं में अनुप्रस्थ तरंगें

यहां विस्थापनों तथा आयामों के पदांक i, r तथा tr क्रमशः आपतित, परावर्तित तथा पारगत तरंगों को दर्शाते हैं। आप देखेंगे कि इन तरंगों की कोणीय आवृत्ति में कोई अन्तर नहीं आता। इसके अतिरिक्त आपतित तथा परावर्तित तरंगों को एक ही संचरण संख्या द्वारा निरुपित किया गया है परन्तु यह पारगत तरंग की संचरण संख्या से भिन्न है। क्या आप इसका कारण

जानते हैं? इसका कारण यह है कि माध्यम के घनत्व के परिवर्तन के कारण तरंग की चाल में परिवर्तन हो जाता है। आप यह भी देखेंगे कि हमने परावर्तित तरंग के लिए $k_1 x$ से पहले धनात्मक चिन्ह इस्तेमाल किया है। इसका कारण यह है कि यह तरंग ऋणात्मक x-दिशा में गति कर रही है।

परावर्तन तथा पारगमन नियतांकों को भौतिक अर्थ देने के लिए हमें सीमान्त प्रतिबंधों (boundary conditions) पर भी विचार करना होगा। *दो माध्यमों के परिसीमा पृष्ठ पर सत्यापित शर्तों को सीमान्त प्रतिबंध कहते हैं।* पारगत तरंगों के लिए कण विस्थापन तथा सीमापृष्ठ के एक ओर तनाव बल का अनुप्रस्थ घटक, आपतित तथा परावर्तित तरंगों के विस्थापनों एवं तनाव बल के अनुप्रस्थ घटकों के योग के बराबर है। अतः सीमान्त प्रतिबंध इस प्रकार हैं :

(i) $x = 0$ परिसीमा पृष्ठ के निकट दांई तथा बांई ओर कणों के विस्थापन समान होते हैं। इसका अर्थ यह है कि कणों के वेग $\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$ भी समान होंगे।

(ii) तनाव बल का अनुप्रस्थ घटक – $T \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$ भी परिसीमा पृष्ठ के सामीप्य दोनों ओर समान होते हैं। इन प्रतिबंधों से यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$y_i(x,t)\Big|_{x=0} + y_r(x,t)\Big|_{x=0} = y_{tr}(x,t)\Big|_{x=0} \tag{7.6}$$

तथा

$$-T\frac{\partial y_i}{\partial x}\Big|_{x=0} + T\frac{\partial y_r}{\partial x}\Big|_{x=0} = -T\frac{\partial y_{tr}}{\partial x}\Big|_{x=0} \tag{7.7}$$

समीकरण (7.3) (7.4) तथा (7.5) के आधार पर हम समीकरण (7.6) में लिखे प्रतिबंध को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$a_i \sin \omega_0 t = a_{tr} \sin \omega_0 t$$

या

$$a_i + a_r = a_{tr} \tag{7.8}$$

इसी प्रकार समीकरण (7.7) में अभिव्यक्त प्रतिबंध से हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है:

$$a_i k_1 T \cos \omega_0 t - a_r k_1 T \cos \omega_0 t = a_{tr} k_2 T \cos \omega_0 t$$

या

$$k_1 T(a_i - a_r) = k_2 T a_{tr} \tag{7.9}$$

हम जानते हैं कि

$$k_1 T = \frac{2\pi T}{\lambda_1} = \frac{2\pi\nu}{v_1} T = 2\pi\nu m_1 v_1 = 2\pi\nu Z_1$$

यहां Z_1 प्रथम माध्यम द्वारा तरंग संचरण को उत्पन्न प्रतिबाधा है। इस परिणाम पर पहुंचने के लिए हमने समीकरण (6.22) तथा (6.36) का उपयोग किया है। इसी प्रकार आप लिख सकते हैं कि

$$k_2 T = 2\pi\nu Z_2$$

यहां Z_2 दूसरे माध्यम द्वारा तरंग संचरण के लिए उत्पन्न प्रतिबाधा है।

इन परिणामों की सहायता से हम समीकरण (7.9) को निम्न रूप में लिख सकते हैं।

$$2\pi\nu Z_1 (a_i - a_r) = 2\pi\nu Z_2 a_{tr}$$

या

$$Z_1 (a_i - a_r) = Z_2 a_{tr} \tag{7.10}$$

समीकरण (7.8) तथा (7.10) से हम $\frac{a_r}{a_i}$ तथा $\frac{a_{tr}}{a_i}$ तथा के अनुपातों की परिकलना कर

सकते हैं। इन अनुपातों से हमें परिसीमा पृष्ठ पर आपतित आयाम के परावर्तित तथा पारगत अंश प्राप्त होते हैं। इन अंशों को प्राय: परावर्तन तथा पारगमन आयाम नियतांक कहते हैं। इन्हें हम R_{12} तथा T_{12} द्वारा व्यक्त करेंगे:

$$R_{12} = \frac{a_r}{a_i} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{7.11}$$

तथा

$$T_{12} = \frac{a_{tr}}{a_i} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \tag{7.12}$$

इन समीकरणों से हम देखते हैं कि परावर्तन तथा पारगमन आयाम नियतांक केवल माध्यमों की प्रतिबाधा पर ही निर्भर करते हैं। आइए अब हम समीकरण (7.11) तथा (7.12) के आशयों पर विचार करें:

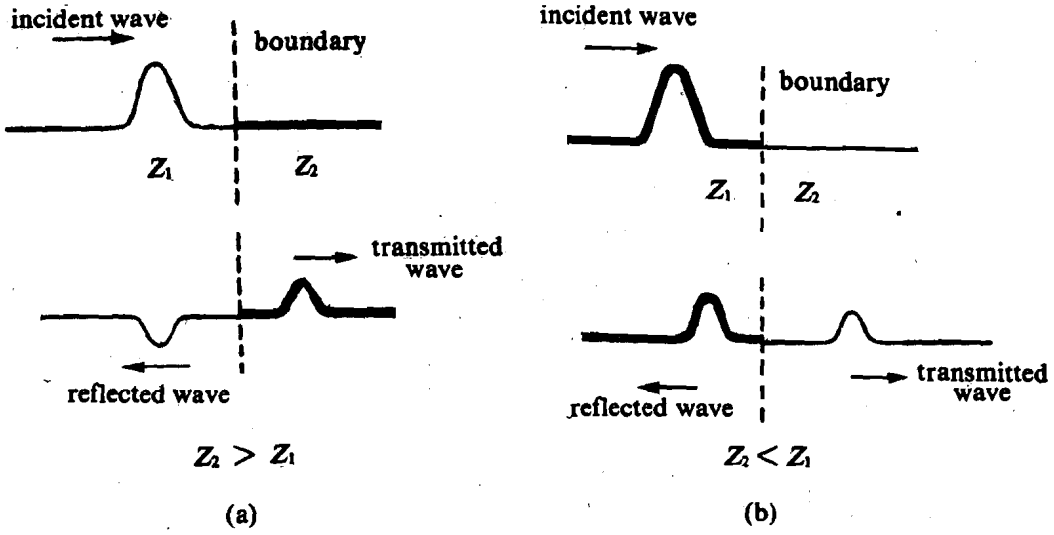
(i) मान लो कि रज्जु किसी दीवार से बंधी है। इसका अर्थ यह हुआ कि दूसरा माध्यम बहुत सघन है तथा $Z_2 = \infty$ इस स्थिति में $R_{12} = -1$ तथा $T_{12} = -0$. इस परिणाम का आशय यह है कि $a_r = -a_i$ तथा $a_{tr} = 0$, यानि परावर्तित तरंग का आयाम आपतित तरंग के आयाम के बराबर है तथा पारगत तरंग उत्सर्जित नहीं होती। अत: हम कह सकते हैं कि जब आपतित तरंग सघन माध्यम से परावर्तित होती है तो इसकी कला में π का परिवर्तन हो जाता है।

(ii) जब $Z_2 > Z_1$ होता है, अर्थात् दूसरी रज्जु (माध्यम) सघन है तब R_{12} ऋणात्मक ही रहेगा जिसका आशय यह है कि परिवर्तन के पश्चात् आपतित तरंग की कला में π का परिवर्तन तो होता है लेकिन आपतित किरण का आंशिक भाग परावर्तित तथा शेष भाग पारगत होता है।

(iii) जब $Z_2 < Z_1$ होता है तो R_{12} धनात्मक होगा। इसका अर्थ यह है कि परावर्तन के पश्चात् तरंग की कला में कोई परिवर्तन नहीं होता। इस स्थिति में भी आपतित तरंग परावर्तित तथा पारगत तरंगों में बंट जाती है।

(iv) जब $Z_1 = Z_2$ है तब $R_{12} = 0$ इसका आशय यह है कि कोई परावर्तित तरंग नहीं है। इस स्थिति में $T_{12} = 1$ तथा $a_{tr} = a_i$, यानि पारगत तरंग का आयाम आपतित तरंग के आयाम के बराबर है।

उपरोक्त (i)-(iii) कथनों से यह स्पष्ट हो जाता है कि जब विरल (कम प्रतिबाधा) माध्यम में गतिमय तरंग किसी सघन (अधिक प्रतिबाधा) के माध्यम की परिसीमा पर पहुंचती है तो परावर्तित तरंगों की कला में आपतित तरंग की अपेक्षा π का परिवर्तन हो जाता है। लेकिन यदि सघन माध्यम में गतिमय तरंग विरल माध्यम की परिसीमा पर पहुंचती है तो आपतित तरंग की कला में कोई परिवर्तन नहीं होता। इसके अतिरिक्त आप यह भी देखेंगे कि T_{12} सदैव धनात्मक रहता है जिससे यह पता चलता है कि पारगत तरंग की कला में कभी कोई परिवर्तन नहीं आता। इन परिणामों को चित्र 7.5 में दिखाया गया है।



चित्र 7.5: परावर्तित एवं पारगत तरंगें जब आपतित तरंग (a) न्यून प्रतिबाधा माध्यम से प्रबल प्रतिबाधा माध्यम में संचरित होती है तथा (b) विलोम स्थिति में।

समीकरण (6.36 a, b) से आपको ज्ञात है कि यदि तनाव निश्चित रहे तो सघन माध्यम में तरंग वेग कम होता है। इस परिणाम की सहायता से क्या आप उपर्युक्त विवेचन और अनुभाग 7.2.1 में दिए गए विवेचन में कोई तालमेल बैठा सकते हैं? क्या ये दोनों स्थितियां संगत नहीं हैं? इससे यह भी स्पष्ट हो जाता है कि ध्वनि तरंग, जल तरंग, रज्जु पर संचरित तरंग तथा प्रकाश तरंग एक ही सिद्धांत का पालन क्यों करती हैं?

कथन (iv) से हम यह भी देखते हैं कि यदि $Z_1 = Z_2$ हो अर्थात् दोनों रज्जु एक ही पदार्थ की बनी हैं तो माध्यमों के बीच कोई परिसीमा ही नहीं होती। यही कारण है कि इस दशा में कोई परावर्तन नहीं होता।

बोध प्रश्न 1

m_1 तथा m_2 (= 4 m_1) रेखीय घनत्व की दो रज्जु आपस में जुड़ी हैं तथा उन पर समान तनाव बल लगा है। अनुप्रस्थ तरंग के परावर्तन तथा पारगमन आयाम गुणांक परिकलित कीजिए।

7.3.2 अनुदैर्ध्य तरंगें

अनुदैर्ध्य तरंगों के परावर्तन तथा पारगमन का अध्ययन करने के लिए आप अनुप्रस्थ तरंगों के लिए प्रयुक्त विधि अपना सकते हैं। मान लो कि कोई तरंग Z_1 तथा Z_2 प्रतिबाधाओं वाले माध्यमों की परिसीमा पर आपतित होती हैं। अनुप्रस्थ तरंगों की भांति आप आपतित, परावर्तित तथा पारगत अनुदैर्ध्य तरंगों के विस्थापनों को समीकरण (7.3), (7.4) तथा (7.5) द्वारा अभिव्यक्त कर सकते हैं। अनुदैर्ध्य तरंगों के लिए सीमान्त प्रतिबन्ध इस प्रकार है:

(i) परिसीमा पृष्ठ पर कण-विस्थापन ψ (x, t) अविरत रहता है। अर्थात् परिसीमा के सामीप्य दोनों ओर ψ (x, t) के मान एक ही हैं।

(ii) परिसीमा के सामीप्य दोनों ओर आधिक्य दाब भी समान हैं।

उपरोक्त सीमान्त प्रतिबंधों की सहायता से आप सिद्ध कर सकते हैं कि परावर्तित तथा पारगत अनुदैर्ध्य तरंगों के लिए भी अनुप्रस्थ तरंगों की भांति आयाम गुणांक समीकरण (7.11) तथा (7.12) द्वारा व्यक्त किये जा सकते हैं (अंत के प्रश्न 5 में आपको ऐसा करने के लिए कहा गया है।

7.4 परावर्तन तथा पारगमन ऊर्जा गुणांक

हम जानते हैं कि प्रगामी तरंगें एक स्थान से दूसरे स्थान पर ऊर्जा स्थानांतरण करती हैं। अत: एक रोचक बात यह है कि जब कोई तरंग भिन्न-भिन्न प्रतिबाधाओं के माध्यमों की परिसीमा पर पहुंचती है तो उसकी ऊर्जा कैसे प्रभावित होती है? पहले की भांति हम अनुदैर्ध्य तथा अनुप्रस्थ तरंगों पर ही विचार करेंगे।

इकाई 6 में आप पढ़ चुके हैं कि जब m प्रति इकाई लंबाई संहति की कोई तार आयाम a तथा कोणीय आवृत्ति ω_0 से कम्पन करती है तब उसकी कुल ऊर्जा

$$E = \frac{1}{2} ma^2\omega_0^2 \qquad (7.13)$$

यदि तरंग की चाल v है तो रज्जु में संचरित ऊर्जा की दर ज्ञात करने के लिए हम ऊर्जा के व्यंजक को तरंग वेग से गुणा करते हैं। इस प्रकार हमें यह व्यंजक प्राप्त होता है:

$$P = \frac{1}{2} ma^2\omega_0^2 v$$

अब अनुभाग 7.3.1 में विवेचित अनुप्रस्थ तरंगों पर विचार करें। आपतित तरंगों द्वारा परिसीमा पृष्ठ पर पहुंचायी गई ऊर्जा की दर

$$P_i = \frac{1}{2} m_i a_i^2 v_i \omega_0^2 = \frac{1}{2} Z_1 a_i^2 \omega_0^2 \qquad (7.14)$$

इसी प्रकार, परावर्तित तथा पारगत तरंगों द्वारा परिसीमा पृष्ठ से ऊर्जा संचारित करने की दरें

$$P_r = \frac{1}{2} Z_1 \omega_0^2 a_r^2 \quad (7.15)$$

तथा

$$P_{tr} = \frac{1}{2} Z_2 \omega_0^2 a_{tr}^2 \quad (7.16)$$

समीकरण (7.8) तथा (7.10) की सहायता से हम a_r तथा a_{tr} को a_i के पदों में लिख सकते हैं। परिणामी व्यंजक को समीकरण (7.15) तथा (7.16) में प्रतिस्थापित करने पर आप देखेंगे कि

$$P_r = \frac{1}{2} Z_1 \omega_0^2 \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 - Z_2} \right)^3 a_i^2 \quad (7.17)$$

तथा

$$P_{tr} = \frac{1}{2} Z_2 \omega_0^2 \left(\frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)^2 a_i^2 \quad (7.18)$$

इन परिणामों को परावर्तन तथा पारगमन ऊर्जा गुणांक R_E तथा T_E ज्ञात करने के लिए इस्तेमाल किया जा सकता है :

$$R_E = \frac{\text{सीमांत पृष्ठ पर ऊर्जा के परावर्तन की दर}}{\text{सीमांत पृष्ठ पर आपतित ऊर्जा की दर}} = \frac{P_r}{P_i} = \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{(Z_1 + Z_2)^2} \quad (7.19)$$

तथा

$$T_E = \frac{\text{सीमांत पृष्ठ पर परागत ऊर्जा दर}}{\text{सीमांत पृष्ठ पर आपतित ऊर्जा दर}} = \frac{P_{tr}}{P_i} = \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \quad (7.20)$$

समीकरण (7.19) से हम देखते हैं कि यदि Z_1 और Z_2 बराबर हों (यह तभी संभव है जब $T_1 m_1 = T_2 m_2$ तो $R_E = 0$ होगा। अर्थात् प्रतिबाधा सुमेलन होने पर ऊर्जा परावर्तन नहीं होता। प्रतिबाधा सुमेलन ऊर्जा पारगमन में बहुत महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। दूर दराज तक ऊर्जा ले जाने वाली केबिलों को भलीभांति सुमेलित किया जाता है। अन्यथा परावर्तन के कारण ऊर्जा की काफी मात्रा व्यर्थ नष्ट हो जाएगी। इसी प्रकार जब हम ध्वनि ऊर्जा को लाउडस्पीकर से कमरे में स्थानांतरित करना चाहते हैं तब भी हम प्रतिबाधा सुमेलन करते हैं। जब प्रकाश तरंगें वायु से कांच के लैंस में गति करती हैं तो भी हम यह चाहते हैं कि उनमें परावर्तन न हो क्योंकि इससे तीव्रता कम हो जाती है।

बोध प्रश्न 2

सिद्ध कीजिए कि जब कोई अनुप्रस्थ तरंग Z_1 तथा Z_2 अभिलक्षणिक प्रतिबाधाओं के दो माध्यमों के परिसीमा पृष्ठ पर पहुंचती है तो ऊर्जा संरक्षित रहती है।

अनुदैर्ध्य तरंगों के लिए हम ऊर्जा स्थानांतरण प्रायः उनकी तीव्रता के पदों में परिकलित करते हैं। इकाई 6 से आपको याद होगा कि किसी गैसीय माध्यम में ध्वनि तरंगों की तीव्रता

$$I = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega_0^2 v = 2\pi^2 \nu^2 a^2 Z$$

यहां Z माध्यम प्रतिबाधा है। अतः आपतित, परावर्तित, तथा पारगत तरंगों की तीव्रताएं आप निम्न व्यंजकों द्वारा लिख सकते हैं:

$$I_i = 2\pi^2 \nu^2 a_i^2 Z_1 \quad (7.22)$$

$$I_r = 2\pi^2 \nu^2 a_r^2 Z_1 \quad (7.23)$$

तथा

$$I_{tr} = 2\pi^2 \nu^2 a_{tr}^2 Z_2 \quad (7.24)$$

इन समीकरणों की सहायता से आप सरलतापूर्वक सिद्ध कर सकते हैं कि परावर्तन तथा पारगमन ऊर्जा गुणांक

$$R_E = \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \qquad (7.25)$$

तथा

$$T_E = \frac{I_{tr}}{I_i} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \qquad (7.26)$$

आप देखेंगे कि ये संबंध वही हैं जो कि अनुप्रस्थ तरंगों के लिए प्राप्त हुए थे। इसका अर्थ यह हुआ कि अनुप्रस्थ तरंगों वाले निष्कर्ष अनुदैर्घ्य तरंगों के लिए भी मान्य हैं।

बोध प्रश्न 3

ध्वनि तरंगें जल-स्टील सीमांत पृष्ठ पर आपतित होती है। सिद्ध कीजिए कि ऊर्जा का 86% अंश परावर्तित होता है। जल तथा स्टील क्रमशः 1.43×10^6 $Nm^{-3}s$ तथा 3.9×10^7 Nm^{-3} प्रतिबाधायें उत्पन्न करते हैं।

7.5 डाप्लर का सिद्धांत

अब तक हमने केवल ऐसी स्थितियों की विवेचना की जिनमें तरंगदैर्घ्य तथा तरंग वेग में ही परिवर्तन होता है और आवृत्ति अचर रहती है। क्या आप ऐसी किसी स्थिति से परिचित हैं जहां तरंग की आवृत्ति परिवर्तित होती है या परिवर्तित होती हुई दिखाई पड़ती है? इस प्रसंग में हम आपको एक घटना बताते हैं: प्रसिद्ध भौतिक वैज्ञानिक डब्ल्यू.एल. ब्रैग एक बार कार चलाकर ले जा रहे थे और उन्होंने लाल बत्ती रहते चौराहा पार कर लिया। इसके लिए उनका चालान कर दिया गया। ब्रैग का मैजिस्ट्रेट से जो वार्तालाप हुआ उसका वर्णन इस प्रकार है:

मैजिस्ट्रेट : आपने लाल बत्ती क्यों पार की?

ब्रैग : श्रीमान मुझे तो हरी बत्ती दिखाई दी थी।

मैजिस्ट्रेट : आपको अपनी गाड़ी की किस चाल पर लाल बत्ती हरी दिखाई देगी?

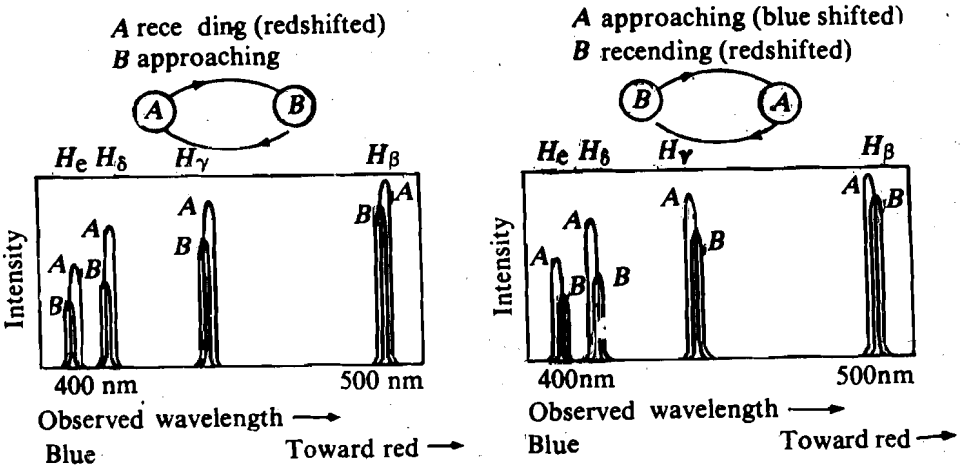
ब्रैग : (कुछ परिकलन के बाद) जब गाड़ी दो अरब किलोमीटर प्रति घंटे की चाल से चल रही हो।

मैजिस्ट्रेट : अच्छा! तो आपको अंधाधुंध गाड़ी चलाने के लिए जुर्माना किया जाता है।

इस वार्तालाप से यह पता चलता है कि प्रेक्षक तथा स्रोत के वेग के कारण आवृत्ति में परिवर्तन आ जाता है। आप सभी ने चलती हुई रेल की सीटी तो सुनी होगी। जब रेल आपकी तरफ आती है तो आपको कैसा महसूस होता है? ध्वनि का तारत्व (pitch) बढ़ता हुआ महसूस होता है परन्तु जैसे/जैसे इंजन हमसे दूर होता जाता है तारत्व घटता हुआ प्रतीत होता है। इसी प्रकार आपने राजमार्ग पर खड़े होकर अपनी ओर आते हुए सामान से भरे ट्रक से उच्च तारत्व की आवाज "आ आ आ आ" सुनी होगी। जैसे-जैसे ट्रक आपसे दूर होता जाता है तो उसका तारत्व अकस्मात् कम होने लगता है और आवाज "आ आ ई ई ऊ ऊ" के रूप में सुनाई पड़ती है। प्रेक्षक तथा स्रोत में सापेक्ष गति के कारण आवृत्ति के परिवर्तन के आभास को डाप्लर प्रभाव कहते हैं।

जब ध्वनि स्रोत, श्रोता की ओर आता है या श्रोता स्रोत की ओर जाता है या दोनों एक दूसरे के निकट आते हैं तो आभासी आवृत्ति ध्वनि स्रोत से उत्पन्न वास्तविक आवृत्ति से अधिक प्रतीत होती है। इसी प्रकार जब ध्वनि स्रोत, श्रोता से दूर जाता है या श्रोता स्रोत से दूर जाता है या दोनों एक दूसरे से दूर जाते हैं तो आभासी आवृत्ति ध्वनि के स्रोत से उत्पन्न आवृत्ति से कम प्रतीत होती है।

डाप्लर प्रभाव के बहुत से उपयोग हैं। शरीर के गतिमय तंतुओं द्वारा अल्ट्रासाउंड परावर्तन में हुए डाप्लर विस्थापन से खून के बहाव को मापा जाता है। इसे प्रायः प्रसुति चिकित्सक गर्भ में शिशु के दिल की धड़कनों की जानकारी के लिए इस्तेमाल करते हैं। क्या आप जानते हैं कि यह कैसे होता है? जैसे ही दिल की मांस पेशियों में धड़कन होती है परावर्तित अल्ट्रासाउंड



चित्र 7.6: द्विताराओं में हाइड्रोजन के अणुओं द्वारा उत्सर्जित प्रकाश तरंग ब्रह्मांड गति की द्योतक है।

(पराध्वनिक) तरंग आपतित तरंगों के सापेक्ष डाप्लर विस्थापित हो जाती है। इसी प्रकार सोनार में भी जहाज के सापेक्ष पनडुब्बी का वेग ज्ञात करने के लिए डाप्लर प्रभाव का इस्तेमाल किया जाता है।

विद्युत-चुंबकीय तरंगों में भी डाप्लर प्रभाव दृष्टिगोचर होता है। वायुयान संचालन में रडार की कार्य प्रणाली उच्च आवृत्ति की रेडियों तरंगों के गतिमय वायुयान से परावर्तन के कारण होने वाले डाप्लर विस्थापन पर आधारित होती है। तारों के प्रकाश के डाप्लर विस्थापन से ही तारकीय गति का अध्ययन संभव हो पाया है। जब हम किसी स्पेक्ट्रोग्राफ में तारों के प्रकाश को देखते हैं तो स्पेक्ट्रम में हमें कई लाइनें दिखाई पड़ती हैं। तुलना करने पर पता चलता है कि ये लाइने उसी तत्व की संगत रेखाओं के सापेक्ष थोड़ी सी विस्थापित होती हैं। यह विस्थापन प्रायः स्पेक्ट्रम के लाल-सिरे की ओर होता है तथा इसका कारण तारे का दिष्ट रेखा के अनुदिश गतिमान होना है। चित्र 7.6 में द्विताराओं निकाय में हाइड्रोजन अणु के लिए डाप्लर विस्थापन दिखाया गया है। (आकाश गंगाओं में प्रकाश का डाप्लर विस्थापन इस बात का प्रमाण है कि हमारा ब्रह्मांड फैल रहा है।)

ध्वनि तरंगों के लिए डाप्लर प्रभाव का अध्ययन करने के लिए हमें निम्नलिखित परिस्थितियों पर विचार करना होगा:

(i) क्या स्रोत गतिमान है या प्रेक्षक गतिमान है अथवा दोनों गति में हैं?

(ii) क्या गति स्रोत तथा श्रोता की दिष्ट दिशा में है या उसके सापेक्ष किसी कोण पर?

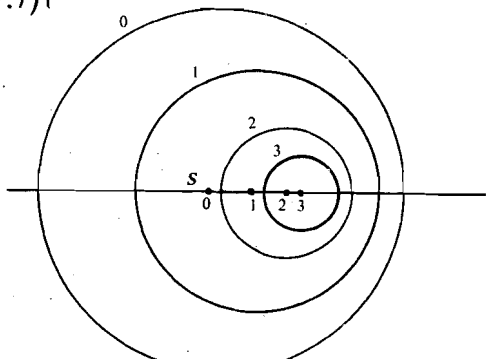
(iii) क्या माध्यम का वेग ध्वनि संचरण की दिशा में है अथवा उसके विपरीत?

(iv) क्या स्रोत का वेग ध्वनि के वेग से अधिक है?

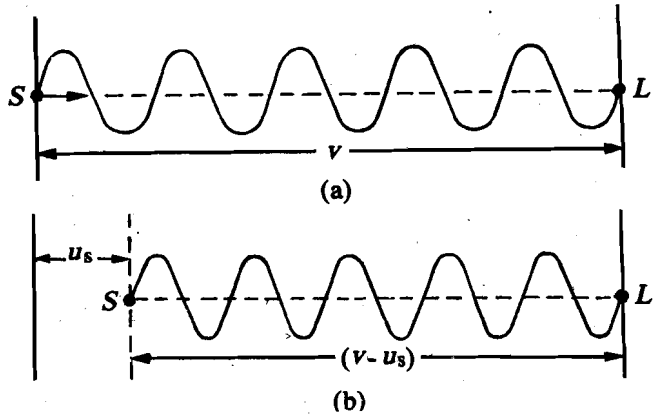
अब हम इनमें से कुछ सम्भावनाओं पर विचार करेंगे।

7.5.1 ध्वनि स्रोत गतिमान तथा प्रेक्षक स्थिर

मान लीजिए कि स्रोत ν आवृत्ति तथा λ तरंगदैर्ध्य की ध्वनि उत्पन्न कर रहा है। इस स्रोत से निकली ध्वनि तरंगें गोलीय तरंगाग्र के रूप में माध्यम में अग्रसर होती हैं। जब स्रोत का वेग ध्वनि के वेग से कम होता है तो तरंगाग्र एक दूसरे के अन्दर निहित रहते हैं। उत्तरोत्तर तरंगाग्रों के बीच की दूरी गति के अनुदिश न्यूनतम तथा उसके विपरीत दिशा में अधिकतम होती है (चित्र 7.7)।



इसी स्थिति को तरंग संख्या के रूप में चित्र 7.8 में निरूपित किया गया है। हम देखते हैं कि यदि उत्पन्न ध्वनि की चाल v है और यदि स्रोत स्थिर हो तो एक सैकिंड में तरंगें v लम्बाई ग्रहण करती हैं। एक सैकिंड के पश्चात् जब स्रोत श्रोता की ओर u_s दूरी तक चला जाता है तो वही तरंगें $(v-u_s)$ लंबाई में संकुचित हो जाती हैं, जैसा कि चित्र **7.8** में दिखाया गया है।



चित्र 7.8: गतिमान स्त्रोत होने पर तरंगों का सघन

परिवर्तित तरंगदैर्ध्य

$$\lambda' = \frac{v-u_s}{\nu}$$

अतः श्रोता द्वारा सुनी गई आभासी आवृत्ति

$$\nu' = \frac{v}{\lambda'} = \nu \frac{v}{v-u_s} \qquad (7.27)$$

यदि स्रोत, श्रोता से दूर जाता है (ध्वनि संचरण की दिशा के विपरीत) तब u_s ऋणात्मक होगा। ऐसी स्थिति में समीकरण (7.27) निम्नलिखित रूप ले लेता है :

$$\nu' = \nu \frac{v}{v-u_s} \qquad (7.28)$$

बोध प्रश्न 4

एक मनुष्य रेल की पटरी के समीप खड़ा है। राजधानी एक्सप्रैस उसकी ओर 70 कि.मी. प्रति घंटा की चाल से आ रही है। उस मनुष्य को सीटी की आभासी आवृत्ति 700 Hz प्रतीत होती है। सीटी की वास्तविक आवृत्ति परिकलित कीजिए। वायु में ध्वनि की चाल 350 ms^{-1} है।

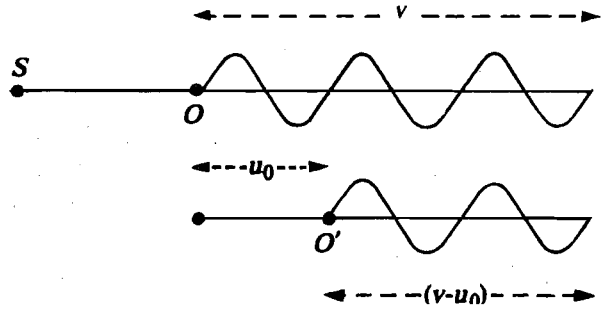
7.5,2 ध्वनि स्रोत स्थिर तथा प्रेक्षक गतिमान

यदि प्रेक्षक स्थिर है तो उसके पास से गुजरती हुई तरंगों के खंड की लम्बाई v होगी तथा उसमें v तरंगें होंगी। लेकिन यदि प्रेक्षक u_0 चाल से गति करता है तो एक सैकिंड के बाद वह L पर होगा तथा उसे लगेगा कि एक सैकिंड में उसके पास से $v-u_0$ लंबाई के खंड में निहित तरंगें गुजरेंगी। अतः उसके लिए आभासी आवृत्ति

$$\nu' = \frac{v-u_0}{\lambda} = \nu \frac{v-u_0}{v} \qquad (7.29)$$

यदि श्रोता, स्रोत की ओर गति करता है तो u_0 ऋणात्मक होगा तथा आभासी आवृत्ति का व्यंजक निम्न रूप ले लेता है:

$$\nu' = \nu \frac{v-u_0}{v} \qquad (7.30)$$



चित्र 7.9: प्रेक्षक गतिमान हो तो तरंग प्राप्ति

7.5.3 ध्वनि स्रोत तथा प्रेक्षक दोनों गतिमान

जब स्रोत तथा श्रोता दोनों गतिमान हों तथा एक दूसरे के निकट आ रहे हों तब हमें-समीकरण (7.27) तथा (7.29) के परिणामों को संयोजित करना होगा। स्रोत की गति के कारण तरंगदैर्ध्य में परिवर्तन हो जाता है। श्रोता की गति के कारण तरंगों की संख्या में परिवर्तन हो जाता है। ऐसी स्थिति में आभासी आवृत्ति

$$\nu' = \frac{\text{तरंगों के खंड की लंबाई}}{\text{घटी हुई तरंगदैर्ध्य}} = \left(\frac{v-u_0}{v-u_s}\right) \qquad (7.31)$$

अब आप यह पूछ सकते हैं : जब स्रोत श्रोता के निकट या श्रोता, स्रोत की ओर समान वेग से आते हैं तो क्या आभासी आवृत्ति में कोई परिवर्तन होता है? समीकरण (7.31) से हमें पता चलता है कि इन स्थितियों में आभासी आवृत्ति भिन्न होगी।

विद्युत-चुंबकीय तरंगों के लिए समीकरण (7.31) को संसोधित करना पड़ता है। ध्वनि के लिए u_0 तथा u_s को माध्यम के सापेक्ष मापा जाता है। इसका कारण यह है कि माध्यम ही तरंग वेग के मान को निश्चित करता है। लेकिन विद्युत-चुंबकीय तरंगों के संचरण के लिए माध्यम की आवश्यकता ही नहीं होती तथा इनका वेग स्रोत अथवा श्रोता के सापेक्ष सदैव समान रहता है। अतः इन तरंगों के लिए हमें स्रोत तथा श्रोता की सापेक्ष गति पर ही विचार करना होगा। यदि श्रोता के सापेक्ष स्रोत की चाल u_s हो तथा $u_s << v$ हो तो समीकरण (7.31) को इस प्रकार भी लिख सकते हैं:

$$\nu' = \nu \left(\frac{v}{v-u_s}\right)$$

$$= \nu \left(1-\frac{u_s}{v}\right)^{-1} \qquad (7.32)$$

द्विपद विस्तार करने पर तथा (u_s/v) में प्रथम श्रेणी के पदों को ही रख कर आभासी आवृत्ति के लिए हमें निम्न व्यंजक प्राप्त होता है:

$$\nu' = \nu \left(1-\frac{u_s}{v}\right) \qquad (7.33)$$

वायुयान संचालन प्रणाली में हम u_s को हवाई जहाज के उपगमन वेग (approach velocity) से दुगुना लेते हैं। इसका कारण यह है कि रडार द्वारा भेजी गई विद्युत-चुंबकीय तरंगें वायुयान द्वारा परावर्तित होकर पुनः रडार तक पहुंचती हैं।

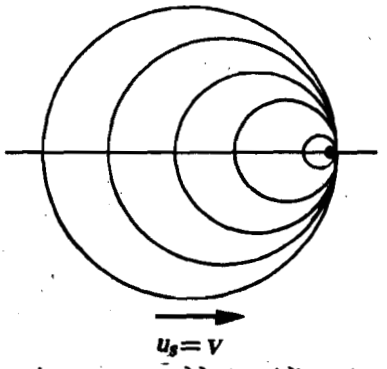
बोध प्रश्न 5

कोई स्थिर प्रेक्षक देखता है कि एक तारे से उत्सर्जित 4000 Å की स्पैक्ट्रमी रेखा अपनी सामान्य स्थिति में लाल-सिरे की ओर 100 Å से स्थनांतरित हो जाती है। दृष्टि रेखा के अनुदिश तारे की चाल की परिकलना कीजिए। प्रकाश की चाल = $3 \times 10^8 ms^{-1}$.

7.6 प्रघाती तरंगें

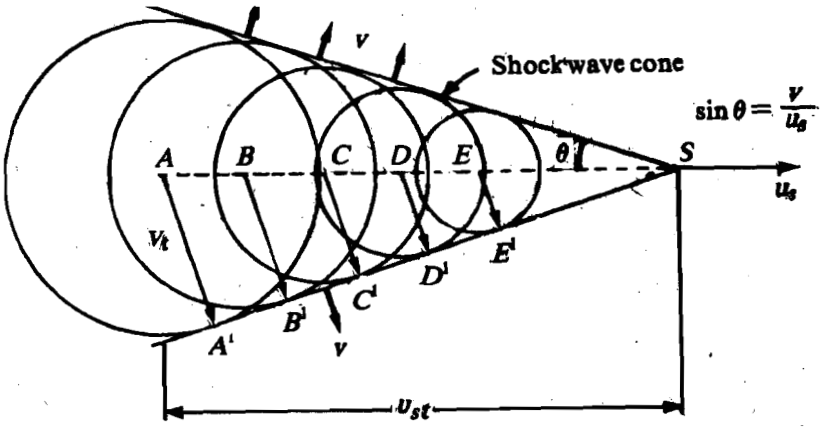
अभी तक हमने केवल ऐसी स्थितियों पर विचार किया है जहां ध्वनि का वेग स्रोत के वेग से अधिक होता है। समीकरण 7.31 से यह पता चलता है कि जैसे-जैसे u_s का मान बढ़ाता है डाप्लर विस्थापित आवृत्ति भी बढ़ाती जाती है तथा $u_s \subset v$ पर तो आपसारित ही हो जाती है। इसका क्या अर्थ है? जब स्रोत और तरंग चाल समान होते हैं तब अग्र दिशा में उत्सर्जित तरंग-शिखर स्रोत के सामने बड़े आयाम के रूप में एकत्र हो जाते हैं, जैसा कि चित्र 7.10 में दिखाया गया है।

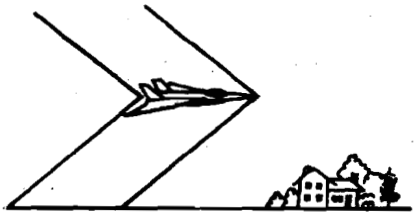
अब आप जानना चाहेंगे कि जब पराध्वनिक वायुयान जैसे स्रोत का वेग ध्वनि तरंगों की गति से अधिक हो जाता है तब होता है? इस प्रश्न का उत्तर जानने के लिए आइए चित्र 7.7 जैसे तरंग - चित्रामं बनायें।



चित्र 7.10: स्त्रोत और तरंग चाल समान होने पर तरंगों का पुंज संचन

कल्पना कीजिए कि स्रोत $t = 0$ पर बिंदु A पर है। t समय के बाद A पर उत्सर्जित तरंगें vt त्रिज्या के गोले पर होंगी। चूंकि $u_s > v$, स्रोत द्वारा तय की गई दूरी AS ध्वनि तरंगों द्वारा तय की गई दूरी से अधिक है। अतः उत्तरोत्तर बिन्दुओं B, C, D, E आदि पर उत्सर्जित तरंगें रेखा $A'S$ पर होंगी तथा यहां वृत्त सर्वाधिक संकुचित होते हैं। इस प्रकार ध्वनि तरंगें एक शंकु, जिसका आधा कोण $\sin\theta = \frac{v_t}{u}$ है, के अन्दर एकत्र हो जाती है जैसा कि चित्र 7.11 में दिखाया गया है। इस शंकु के बाहर कोई ध्वनि तरंगें





चित्र 7.11: (a) ध्वनि वेग से तेज चाल से गतिमान स्त्रोत द्वारा जनित प्रघाती तरंगें
(b) पराध्वनिक वायुमान द्वारा उत्पन्न किया गया ध्वनि बून

नहीं होती। ध्वनि तरंगों का वेग शंकु की सतह के लम्बवत होता है। जब यह शंकु प्रेक्षक तक पहुंचता है तब उससे अचानक एक बड़े आयाम की तरंग, जिसे **प्रघाती तरंग** कहते हैं, के आगमन का पता लगता है। पराध्वनिक वायुयान द्वारा उत्पन्न की गई प्रघाती तरंगों को **ध्वनि बूम** भी कहते हैं क्योंकि इसमें दो मुख्य प्रघाताग्र बनते हैं। एक वायुयान के मुख पर तथा दूसरे इसकी पूंछ पर होता है जैसा कि चित्र 7.11 में दिखाया गया है। प्रबल तीव्रता का बूम खिड़की के शीशों तक को तोड सकता है या किसी भवन को नुकसान भी पहुंचा सकता है।

प्रघाती तरंगें एक से बड़ी मैक संख्या वाले गतिमय स्रोत द्वारा रिफिल कुण्ड में भी उत्पन्न हो सकती हैं। यदि कोई नौका तरंगों की चाल से तेज चलती है तो भी आप प्रघाती तरंगें बनती हुई देख सकते हैं।

7.7 सारांश

- सम-कला बिंदुओं को जोड़ने वाले रेखा पथ को तरंगाग्र कहते हैं। तरंगाग्र का आकार स्रोत की प्रकृति पर निर्भर करता है।
- हाइगन्स के अनुसार तरंगाग्र पर प्रत्येक बिंदु द्वितीयक तरंगिका के नये स्रोत के रूप में कार्य करता है। ये तरंगिकायें माध्यम में तरंग की चाल से सभी दिशाओं में गति करती हैं।
- जब एक माध्यम में संचरित तरंगें भिन्न प्रतिबाधा वाले दूसरे माध्यम के परिसीमा पृष्ठ पर पहुंचती हैं तो इनका कुछ अंश परावर्तित तथा शेष भाग पारगत हो जाता है। इनके परावर्तन तथा पारगमन आयाम गुणांक निम्न व्यंजकों द्वारा व्यक्त किये जाते हैं:

$$R_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

तथा

$$T_{12} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

- जब कम प्रतिबाधा के माध्यम में गतिमान तरंग उच्च प्रतिबाधा वाले माध्यम के सीमान्त पृष्ठ पर परावर्तित होती है तब उसकी कला में π का परिवर्तन होता है।
- ध्वनि तरंगों के स्रोत तथा प्रेक्षक (श्रोता) के बीच सापेक्ष गति के कारण ध्वनि की आभासी आवृत्ति वास्तविक आवृत्ति से भिन्न होती है। इसे **डाप्लर प्रभाव** कहते हैं। डाप्लर विस्थापित आवृत्ति (जब प्रेक्षक तथा स्रोत एक दूसरे के निकट आते हैं) निम्न व्यंजक द्वारा व्यक्त की जाती है:

$$\nu' = \nu \frac{v - u_0}{v - u_s}$$

7.8 अंत में कुछ प्रश्न

1. हाइगन्स संरचना के आधार पर सिद्ध कीजिए की

$$\mu_{12} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin i}{\sin r}$$

2. वायु में संचरित एक ध्वनि तरंग पानी की सतह पर लम्बवत् आपतित होती है। ध्वनि तरंग के परागत और आपतित आयामों के अनुपात की गणना कीजिए। ρ = 1.29 kg m^{-3} एवं वायु तथा जल में ध्वनि की चाल क्रमशः 350 ms^{-1} तथा 1500 ms^{-1} हैं।
3. कोई रस्सी एक साथ लिपटी हुई एक जैसी कई लरों से बनी एक रस्सी किसी जगह से घिस जाती है तथा केवल उसकी एक लर रह जाती है (चित्र 7.12) जब रस्सी पर बल लगता है तो उसमें संचरित 1.0 cm आयाम की तरंग एक लर की रस्सी में 0.45 cm आयाम की तरंग के रूप में परावर्तित होती है। रस्सी में कुल कितनी लरें हैं?

चित्र 7.12: जीर्ण रस्सी

4. एक गतिमय कार 500 Hz आवृत्ति के स्थिर स्रोत के पास से $20 ms^{-1}$ वेग से गुजरती है। इन दोनों में निकटतम दूरी 20 m है। चालक द्वारा सुनी गई आभासी आवृत्ति की दूरी के फलन के रूप में परिकलना कीजिए यदि $v = 340 ms^{-1}$ है।
5. अनुदैर्ध्य तरंगों के लिए सीमान्त प्रतिबंधों का इस्तेमाल करके परावर्तन तथा पारगमन गुणांकों की परिकलना कीजिए।

7.9 हल और उत्तर

1. हमें ज्ञात है कि प्रतिबाधा, तनाव तथा प्रति इकाई लम्बाई संहति में निम्न सम्बंध होता है

$$Z = \sqrt{mT}$$

दी गई रज्जुओं के लिए

$$Z_1 = \sqrt{m_1 T} \text{ तथा } Z_2 = \sqrt{m_2 T}$$

अत:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \frac{1}{2}$$

अत: समीकरण (7.11) तथा (7.12) से हम यह देखते हैं कि परावर्तन तथा पारगमन आयाम गुणांक

$$R_{12} = \frac{a_r}{a_i} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(Z_1/Z_2) - 1}{(Z_1/Z_2) + 1} = \frac{(½) - 1'}{(½) + 1} = -\frac{1}{3}$$

तथा

$$T_{12} = \frac{a_t}{a_i} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{2Z_1/Z_2}{(Z_1/Z_2) + 1} = \frac{2}{3}$$

R_{12} में ऋणात्मक चिन्ह का अर्थ यह है कि पार्थक्य पृष्ठ पर तरंग की कला में π का परिवर्तन होता है।

2. समीकरण (7.14) से हम यह जानते हैं कि परिसीमा पर ऊर्जा के पहुंचने की दर

$$P_1 = \frac{1}{2} Z_1 \omega_0^2 a_i^2$$

इसी प्रकार परावर्तित तथा पारगत तरंगों द्वारा परिसीमा से ऊर्जा दूसरे माध्यम में ले जाने की दर

$$P_2 = \frac{1}{2} Z_1 \omega_0^2 a_r^2 + Z_2 \omega_0^2 a_t^2$$

a_r तथा a_t के व्यंजकों को समायोजित करने पर आप देखेंगे कि

$$P_2 = \frac{1}{2} Z_1 \omega_0^2 \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 a_r^2 + \frac{1}{2} Z_2 \omega_0^2 \left(\frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}\right)^2 a_t^2$$

$$= \frac{1}{2} Z_1 \omega_0^2 \left[\left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 + \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_1)^2}\right] a_t^2$$

$$= \frac{1}{2} Z_1 \omega_0^2 a_t^2$$

आप देखेंगे कि पार्थक्य पृष्ठ पर ऊर्जा के पहुंचने की दर परावर्तित तथा पारगत तरंगों द्वारा इस पृष्ठ से ऊर्जा संचरण की दर के योग के बराबर है। अतः हम कह सकते हैं कि इस प्रक्रिया में ऊर्जा का संरक्षण होता है।

3. परावर्तन ऊर्जा गुणांक

$$R_E = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 = \left[\frac{(1.43 - 39) \times 10^6 \text{ Nm}^{-3}\text{s}}{(1.43 - 39) \times 10^6 \text{ Nm}^{-3}\text{s}}\right]^2 = \left(-\frac{37.57}{40.43}\right)^2 = 0.86$$

इसका अर्थ यह है कि जब जल-स्टील पार्थक्य पृष्ठ पर ध्वनि तरंगें आपतित होती हैं तो केवल 86% ऊर्जा परावर्तित होती है।

4. समीकरण (7.27) से हम जानते हैं कि

$$\nu' = \nu \left(\frac{v}{v - u_s}\right)$$

पदों को पुनः व्यवस्थित करने पर हम लिख सकते हैं कि

$$\nu = \nu' \left(\frac{v - u_s}{v}\right)$$

यहां $v = 350\,\text{ms}^{-1}$, $\nu = 700$ Hz तथा $u_s = 72\,\text{km/h}^{-1} = 20\,\text{ms}^{-1}$ है

अतः

$$\nu = \left(\frac{350\,\text{ms}^{-1} - 20\,\text{ms}^{-1}}{350\,\text{ms}^{-1}}\right) \times 700 \text{ Hz}$$

$$= 600 \text{ Hz}$$

5. चूंकि तरंगदैर्ध्य बढ़ता है इसलिए हम यह कह सकते हैं कि तारा दिष्ट रेखा के अनुदिश प्रेक्षक से दूर जा रहा है। इसका अर्थ यह हुआ कि आवृत्ति कम हो जाती है। प्रकाश के लिए समीकरण (6.28) को इस्तेमाल करके हम लिख सकते हैं कि

$$\nu' = \nu \left(\frac{c}{c + u_s}\right)$$

$$= \nu \left(1 + \frac{u_s}{c}\right)^{-1}$$

$$= \nu \left(1 - \frac{u_s}{c}\right) \quad \text{यदि } u_s << c.$$

चूंकि $\nu = \frac{c}{\lambda}$, आप लिख सकते हैं कि

$$\frac{1}{\lambda'} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{u_s}{c}\right)$$

या

$$u_s = \frac{c}{\lambda'}(\lambda' - \lambda)$$

यहां $\lambda' = 4100$ Å, $\lambda = 4000$ Åतथा $c = 3 \times 10^8\,\text{ms}^{-1}$ हैं।

अतः

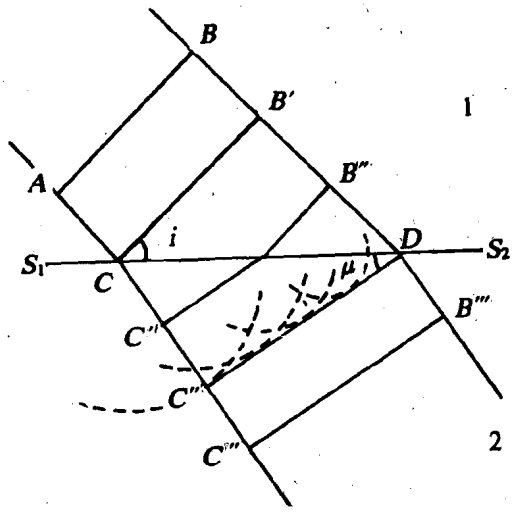
$$u_s = \frac{3 \times 10^8\,\text{ms}^{-1}}{4100 \text{ Å}} \times (100 \text{ Å})$$

$= 7.3 \times 10^6\ ms^{-1}$

$= 7.3 \times 10^3\ kms^{-1}$

अंत के प्रश्न

1. चित्र 7.13 पर विचार कीजिए। AB एक तरंगाग्र के उस भाग को प्रदर्शित करता है जो वायु तथा जल जैसे दो माध्यमों को पृथक करने वाले पार्थक्य पृष्ठ S_1S_2 की ओर बढ़ रहा है। मान लीजिए कि माध्यम 1 तथा माध्यम 2 में तरंग चालें क्रमशः v_1 तथा v_2 हैं।



चित्र 7.13: अपवर्तन नियमों के लिए हाइगन्स संरचना

तरंगाग्र सर्वप्रथम C पर पहुंच कर D की ओर उत्तरोत्तर बिंदुओं की ओर बढ़ता है। तरंगाग्र पर स्थित बिंदु B, *पार्थक्य पृष्ठ पर स्थित* बिंदु D पर और बिंदु A के C पर पहुंचने के $t (= B'D/v_1)$ समय के बाद पहुंचता है। S_1 S_2 के प्रत्येक बिंदु से दूसरे माध्यम में द्वितीयक तरंगिका v_2 चाल से विकसित होने लगती हैं। जब D विक्षोभित होता है तब C से तरंगिका t समय तक विकसित हो चुकी होती है तथा इसकी त्रिज्या

$$C\,C'' = \frac{B'D}{v_1}\,v_2$$

इस तरंगिका को आप बिंदु C को केन्द्र मान कर $C\,C''$ त्रिज्या की चाप द्वारा दर्शा सकते हैं। इस चाप पर D से $D\,C''$ स्पर्शज्या खींचिए। यदि आप इस प्रक्रिया को C तथा D के बीच अन्य बिंदुओं के लिए दोहराएंगे तो आप देखेंगे कि DC'' उन सभी के लिए सर्वनिष्ठ स्पर्शज्या है। अतः DC'' **अपवर्तित तरंगाग्र** को प्रदर्शित करता है। $\Delta s\ CB'D$ तथा $CC''D$ से आप लिख सकते हैं कि

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{BD/CD}{CC''/CD} = \frac{BD}{CC''} \qquad \text{(ii)}$$

परिणाम (i) की सहायता से हम इस व्यंजक को निम्न रूप में लिख सकते हैं:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} = \text{अचर} \qquad \text{(iii)}$$

अतः हम कह सकते हैं कि आपतित कोण की ज्या तथा अपवर्तित कोण की ज्या का अनुपात तरंगचालों के अनुपात के बराबर है तथा अचर है। इस स्थिरांक को पहले माध्यम के सापेक्ष दूसरे माध्यम का **अपवर्तनांक** कहते हैं। इसे μ_{12} द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

ध्वनि के लिए यदि प्रथम माध्यम वायु तथा द्वितीय माध्यम जल हो तो

$$\mu_{12} = 0.23$$

तथा प्रकाश के लिए

$$\mu_{12} = 1.33$$

2. यहां $\rho_1 = 1.29\ \text{kg m}^{-3}$, $\rho_2 = 1000\ \text{kg m}^{-3}$, $v_1 = 350\ \text{m s}^{-1}$ तथा $v_2 = 1500\ \text{m s}^{-1}$ हैं।

चूंकि ध्वनि तरंगें अनुदैर्ध्य होती हैं, समीकरण (7.12) से हम देखते हैं कि

$$\frac{a_t}{a_i} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{2(Z_1 / Z_2)}{(Z_1/Z_2) + 1} \qquad \text{(i)}$$

चूंकि $Z = \rho v$, हम लिख सकते हैं कि

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\rho v_1}{\rho v_2} = \frac{(1.29\ \text{kg m}^{-3}) \times (350\ \text{ms}^{-1})}{(1000\ \text{kg m}^{-3}) \times (1500\ \text{ms}^{-1})} = 3.01 \times 10^{-4}$$

इस परिणाम को (i) में इस्तेमाल करने पर हम देखते हैं कि

$$\frac{a_t}{a_i} = \frac{2 \times (3.01 \times 10)}{(1 + 3.01 \times 10^{-4})} = 6.02 \times 10^{-4}$$

3. समीकरण (7.11) से हम जानते हैं कि

$$x = \frac{a_t}{a_i} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 - Z_2} = \frac{(Z_1/Z_2 - 1)}{(Z_1/Z_2 + 1)}$$

तनित रज्जु के लिए प्रतिबाधा $\sqrt{m}$ के समानुपाती होती है। अतः हम लिख सकते हैं कि

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$

$$\therefore \quad x = \frac{\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} - 1}{\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} + 1}$$

मान लीजिए कि पहले भाग में n लरें है तब

$$x = \frac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n} + 1}$$

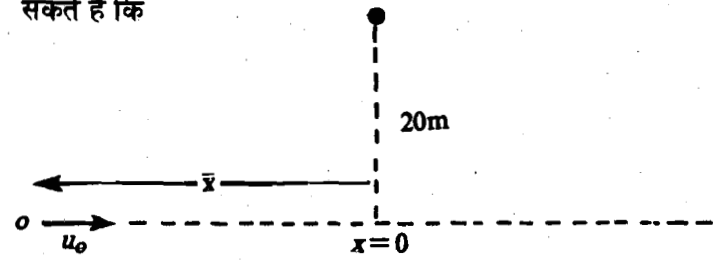
इस समीकरण से n का मान निकालने पर हम देखते हैं कि

$$\sqrt{n} = \frac{1 + x}{1 - x} = \frac{1.45}{0.55}$$

अत:

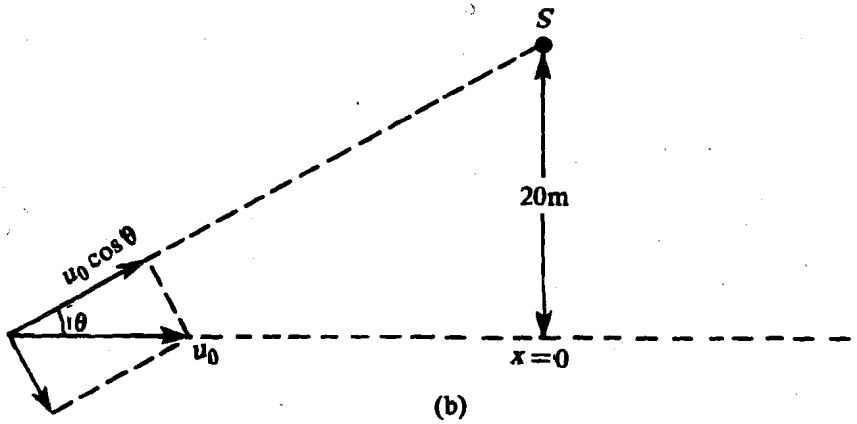
$$n = \left(\frac{1.45}{0.55}\right)^2 = 6.76 = 7$$

4. इस स्थिति में कार ध्वनि के स्रोत की ओर अग्रसर नहीं हो रही (चित्र 7.14a) तथा हमें स्रोत के अनुदिश वेग के घटक को ज्ञात करना है। चित्र 7.14b की सहायता से आप लिख सकते हैं कि



(a)

चित्र 7.14: (a) जब प्रेक्षक की गति स्त्रोत गति के अनुदिश नहीं है



(b)

(b) डाप्लर विस्थापन के लिए उत्तरदायी स्त्रोत के वेग का घटक

$$u_0 \cos\theta = u_0 \frac{x}{\sqrt{x^2+400}} = (200\ \text{ms}^{-1}) \frac{x}{\sqrt{x^2+400}}$$

तथा दूरी के फलन के रूप में डाप्लर विस्थापित आवृत्ति

$$\nu'(x) = \nu \frac{\sqrt{v + u_0 \cos\theta}}{v}$$

$$= (500\ \text{Hz}) \times \left(1 + 0.06 \frac{x}{\sqrt{x^2+400}}\right)$$

आप इसे $-100 \leq x \leq 100$ अंतराल में x के फलन के रूप में आरेखित कर सकते हैं। $x = 0$ पर कार तरंग के लम्बवत् गति कर रही है तथा जिस समय कार उस बिन्दु से गुजरती है तो चालक को सही आवृत्ति 500 Hz सुनाई पड़ती है।

5. आपतित, तरावर्तित तथा पारगत तरंगों के लिए कण विस्थापन का व्यंजक इस प्रकार है:

$$\psi_i(x, t) = a_i \sin(\omega_0 t - k_1 x) \quad \text{(i)}$$

$$\psi_r(x, t) = a_r \sin(\omega_0 t + k_1 x) \quad \text{(ii)}$$

तथा $$\psi_{tr}(x, t) = a_{tr} \sin(\omega_0 t - k_2 x) \quad \text{(iii)}$$

इस स्थिति के लिए परिसीमा प्रतिबंध इस प्रकार है:

1. परिसीमा पर कण विस्थापन $\psi(x, t)$ अविरत रहता है अर्थात् परिसीमा $x = 0$ के परिवेश में दोनों ओर ψ के मान समान हैं।
2. सामान्य से अधिक दाब परिसीमा के परिवेश में दोनों ओर समान है। प्रथम प्रतिबंध का अभिप्राय है कि

$$a_i + a_r = a_{tr} \quad \text{(iv)}$$

अनुदैर्ध्य तरंगों के लिए $\Delta p = -E \frac{\partial \psi}{\partial x}$ होता है जहां E प्रत्यास्थता है। हम जानते हैं कि $E = \gamma p_0$ तथा p_0 सामान्य दाब है। हम देखते हैं कि p_0 दोनों ओर से कट जाता है तथा दूसरे प्रतिबंध का अभिप्राय है कि

$$\left.\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right|_{x=0} + \left.\frac{\partial \psi_r}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial \psi_{tr}}{\partial x}\right|_{x=0} \quad \text{(v)}$$

समीकरण (v) से हम लिख सकते हैं कि

$$-a_i k_1 \cos\omega_0 t + a_r k_1 \cos\omega_0 t = -a_{tr} k_2 \cos\omega_0 t$$

या

$$k_1 (a_i - a_r) = k_2 a_{tr} \quad \text{(vi)}$$

हम जानते हैं कि

$$k_1 = \frac{\omega_0}{v_1}$$

इसे $\rho_1 v_1$ से गुणा करने पर हम देखते हैं कि

$$k_1 = \frac{\omega_0}{\rho_1 v_1^2} \times \rho_1 v_1 = \frac{\omega_0 Z_1}{\gamma p_0}$$

क्योंकि $Z_1 = \rho_1 v_1$ तथा $v_1 = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_1}}$

इसी प्रकार आप यह दिखा सकते हैं कि

$$k_2 = \frac{\omega_0 Z_2}{\gamma p_0}$$

इन परिणामों को (vi) में इस्तेमाल करने पर हम देखते हैं कि

$$\frac{\omega_0 Z_1}{\gamma p_0}(a_i - a_r) = \frac{\omega_0 Z_2}{\gamma p_0} a_{tr}$$

अथवा

$$Z_1 (a_i - a_r) = Z_2 a_{tr} \qquad \text{(vii)}$$

आप देखेंगे कि आपतित, परावर्तित तथा पारगत आयामों में संबंध बताने वाले व्यंजक (vi) तथा (vii) अनुप्रस्थ तरंगों के समान हैं। इसलिए परावर्तन तथा पारगत आयाम स्थिरांक भी अनुप्रस्थ तरंगों के व्यंजकों द्वारा व्यक्त किए जा सकते हैं।