इकाई 3 अवमंदित सरल आवर्त्त गति

इकाई की रूपरेखा

3.1 प्रस्तावना

इकाई 1 में आप यह पढ़ चुके हैं कि सरल आवर्त्त गति एक सार्वत्रिक परिघटना है। अब आप यह भी जान चुके हैं कि आदर्श स्थिति में समय के सापेक्ष में सरल आवर्त्त दोलक की संपूर्ण ऊर्जा अचर बनी रहती है और दोलक का विस्थापन, एक साइन वक्र को दर्शाता है। इससे यह अर्थ निकलता है कि यदि इस प्रकार की व्यवस्था को एक बार गति में लाने पर वह हमेशा के लिए निरंतर दोलन जारी रखेगी। इस प्रकार के दोलनों को मुक्त (Free) अथवा अनवमंदित (Undamped) दोलन कहा जाता है। क्या इस वास्तविक जगत में आप किसी ऐसे भौतिक तंत्र को जानते हैं जिससे अवमंदन न होता हो। शायद किसी ऐसे भौतिक तंत्र का अस्तित्व नहीं है जिसमें अवमंदन न होता हो। ~~आपने~~ यह अवश्य देखा होगा कि जब किसी झूले, एक सरल अथवा मरोड़ी लोलक तथा एक कमानी के द्रव्यमान तंत्र को दोलन करने के लिए छोड़ दिया जाए तो उनका दोलन धीरे-धीरे समाप्त हो जाता है। इसी प्रकार एक एल सी परिपथ में अथवा निलंबित कुंडली वाले गैल्वनोमीटर में आवेश के दोलन का आयाम धीरे-धीरे कम होता जाता है। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि प्रत्येक दोलन तंत्र की ऊर्जा में समय के साथ कमी होती जाती है। अब प्रश्न यह उठता है कि यह ऊर्जा कहां चली जाती है ? इसका उत्तर देने के लिए हम यहां ध्यान देंगे कि जब भी कोई पिंड किसी माध्यम में दोलन करता है तो उसे अपनी गति में प्रतिरोध का अनुभव होता है। इसका अर्थ हुआ कि अवमंदन बल अपना प्रभाव डालता है। यह अवमंदन बल स्वयं पिंड के अंदर और आस-पास के माध्यम (वायु अथवा द्रव) के कारण भी उत्पन्न हो सकता है। अवमंदन बलों के विरुद्ध दोलन तंत्र द्वारा किए गए कार्य के कारण तंत्र की ऊर्जा का क्षय होता है। जैसा कि दोलनी पिंड की ऊर्जा अवमंदन को दूर करने में खर्च हो जाती है। लेकिन कुछ इंजीनियरिंग तंत्रों में हम जानबूझकर अवमंदन लाते हैं। इसका एक सपरिचित उदाहरण है ब्रेक — जिसमें हम घर्षण को बढ़ा देते हैं ताकि वाहन की गति थोड़े समय में कम हो जाये। आम तौर पर अवमंदन के कारण ऊर्जा की व्यर्थ में हानि होती रहती है, इसलिए हमारी पूरी कोशिश होती है कि अवमंदन को कम से कम किया जाए।

अक्सर हमें किसी तंत्र के दोलनों को बनाए रखने की आवश्यकता होती है। इसके लिए हमें तंत्र को बाह्य, स्रोत से ऊर्जा प्रदान की जाती है जिससे कि अवमंदन के कारण ऊर्जा में जो हानि होती हो उसकी पूर्ति की जा सके। इस प्रकार के दोलनों को *प्रणोदित दोलन* (Forced Oscillations) कहा जाता है। अगली इकाई में आप इस प्रकार के दोलनों के विभिन्न पहलुओं के बारे में पढ़ेंगे।

इस इकाई में आप अवमंदित सरल आवर्त्त दोलक की गति का समीकरण स्थापित करना और उसे हल करना सीखेंगे। अवमंदन को लघुगणकीय ह्रास, शिथिलता काल और गुणता कारक के रूप में अभिव्यक्त किया जा

सकता है। और आप यहां पर लघुगणकीय ह्रास एक चक्र में शक्ति ह्रास और गुणता कारक के व्यंजकों की संगणना करना सीखेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन कर लेने के बाद आप इस योग्य हो सकेंगे कि आप :

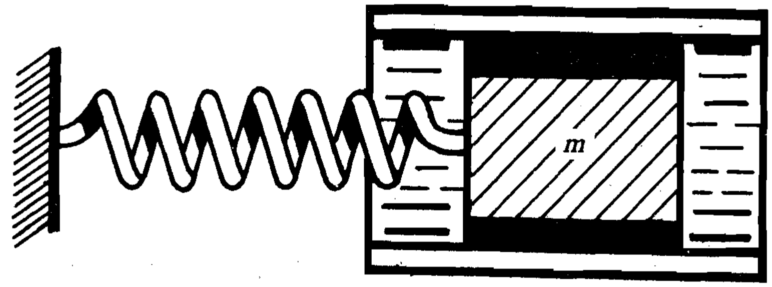
- अवमंदित सरल आवर्त्त दोलन का अवकल समीकरण प्राप्त कर सकें और उसे हल कर सकें।
- दोलन के आयाम, ऊर्जा और आवर्त्त काल पर अवमंदन के प्रभाव का विशलेषण कर सकें।
- दुर्बलतः अवमंदित, क्रांतिकतः अवमंदित और प्रवबलतः अवमंदित तंत्रों में भेद कर सकें।
- एक दोलन में क्षयित शक्ति के समीकरण प्राप्त कर सकें।
- अवमंदित दोलक का शिथिलता काल और गुणता कारक ज्ञात कर सकें।
- विभिन्न भौतिक तंत्रों में अनुरूपता प्रदर्शित कर सकें।

3.2 अवमंदित दोलक का अवकल समीकरण

अवमंदित दोलक (Damped Oscillator) की गति के बारे में विचार करते समय हमारे मन में कुछ इस प्रकार के प्रश्न उठ सकते हैं : क्या समीकरण (1.2) को यहां भी लागू किया जा सकता है ? यदि नहीं, तो उस समीकरण में क्या परिवर्तन करने की आवश्यकता है ? परिमाणात्मक रूप में (Quantatively) अवमंदित गति का निर्धारण किस प्रकार किया जाएगा ? इस सभी प्रश्नों का उत्तर जानने के लिए हमें फिर से इकाई 1 के कमानी द्रव्यमान (Spring-Mass) तंत्र पर विचार करना होगा। मान लीजिए द्रव्यमान एक श्यान माध्यम (Viscous Medium), जैसे स्नेहित वेलन (Lubricated Cylinder), में क्षैतिजतः स्थिति में गतिमान है जैसा कि आकृति 3.1 में दिखाया गया है। गति में होने पर द्रव्यमान पर एक घर्षण (Drag) बल लगता है जिसे हम F_d से प्रकट करते हैं। अब प्रश्न यह उठता है कि इस अवमंदन बल के परिमान (Magnitude) के बारे में आप किस प्रकार जानकारी प्राप्त कर सकते हैं ? प्रायः परिमाण का ठीक-ठीक मान ज्ञात करना कठिन होता है । फिर भी अपने अनुभव से हम इसका एक तर्कसंगत आकल (Estimate) ज्ञात कर सकते हैं। उदाहरण के तौर पर, बहुत ही कम आयाम (Amplitude) वाले दोलनों के लिए हम स्टोक्स-नियम के अनुसार अवमंदन बल को प्रस्तुत कर सकते हैं। अर्थात् हम F_d को वेग के समानुपाती ले सकते हैं और उसे इस प्रकार लिख सकते हैं

एक वस्तु जो किसी श्यान माध्यम में मुक्त रूप से गिर रही है, पर लग रहा बल $F_d = 6\pi\eta\, r v$ है। इसे हम स्टाक का नियम कहते हैं। यहाँ पर η श्यानता गुणांक है और r वस्तु का अर्धव्यास है (यहाँ पर वस्तु को गोलाकार माना गया है) और v इसका वेग है।

$$F_d = -\gamma v$$



चित्र 3.1: अवमंदित कमानी-द्रव्यमान तंत्र

ऋण के चिह्न से यह पता चलता है कि अवमंदन बल गति का विरोध कर रहा है। और अनुपातिकता अचर (Constant of proportionality) γ को *अवमंदन गुणंक* (Damping Co-efficient) कहा जाता है। संख्यात्मक रूप में यह बल प्रति एककं वेग के बराबर होता है और इसे

$$\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{ms}^{-1}} = \frac{\mathrm{kg\,ms}^{-2}}{\mathrm{ms}^{-1}} = \mathrm{kg\,s}^{-1}$$

में मापा जाता है।

अब हम अवमंदित सरल आवर्त्त दोलक की दोलनी गति का अवकल समीकरण (Differential Equation) प्राप्त करेंगे। इसके लिए आइए हम अक्ष को कमानी की लम्बाई की दिशा में लें। हम अक्ष ($x = 0$) के मूल

बिन्दु को द्रव्यमान की साम्यावस्था स्थिति (Equilibrium Position) मान लेते हैं। मान लीजिए (कमानी द्रव्यमान तंत्र के) द्रव्यमान अनुदैर्ध्य (Longitudinally) खींचा गया है और फिर छोड़ दिया गया है। ऐसा करने पर वह अपनी साम्यावस्था स्थिति से हट जाता है। इस समय कमानी-द्रव्यमान तंत्र पर निम्नलिखित बल लग रहे होते हैं :

(i) प्रत्यानयन बल (Restoring Force) $-kx$ जहां k कमानी गुणक (Spring Constant) हैं और

(ii) अवमंदन बल : γv जहाँ $v = \dfrac{dx}{dt}$ दोलक का तात्कालिक वेग (Instantenous Velocity) है। इससे यह अर्थ निकलता है कि अवमंदित सरल आवर्त्त दोलक के गति समीकरण में प्रत्यानयन बल और अवमंदन बल का समावेश अवश्य होना चाहिए। अतः इस स्थिति में समीकरण (1.2) को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} \tag{3.2}$$

पदों को व्यवस्थित रूप में लिखने पर और m से भाग देने पर अवमंदित दोलक का गति-समीकरण निम्न रूप का हो जाता है।

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \tag{3.3}$$

जहाँ $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ (पहले की तरह) और $2b = \dfrac{\gamma}{m}$ (आपने इस बात की ओर अवश्य ध्यान दिया होगा कि अवमंदन के पद में गुणक 2 लगा दिया गया है जिससे कि इस समीकरण के हल के लिए एक उपयुक्त व्यंजक (Expression) प्राप्त हो सके। अचर b की विमाएँ (Dimensions)

$$\frac{\text{बल}}{\text{वेग} \times \text{द्रव्यमान}} = \frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}M} = T^{-1} \text{ हैं।}$$

अतः इसका मात्रक s^{-1} है जो कि वही है जो कि ω_0 का है।

आपने ध्यान दिया होगा कि समीकरण (1.3) की तरह समीकरण (3.3) अचर गुणांकों वाला एक रैखिक द्विकोटि का समघात अवकल समीकरण (Homogenous Differential Equation) है। यदि अवमंदन न हो, तो समीकरण (3.3) का दूसरा पद शून्य हो जाएगा और तब इस तरह प्राप्त समीकरण का व्यापक हल (General Solution) समीकरण (1.5) से प्राप्त हो जाएगा अर्थात् $x = A\cos(\omega_0 t + \phi)$ इसके विपरीत यदि अवमंदन बल तो हो पर प्रत्यानयन बल न हो तो समीकरण (3.3) का तीसरा पद शून्य हो जाएगा। तब इस तरह प्राप्त समीकरण का व्यापक हल $x(t) = Ce^{-2bt} + D$ से प्राप्त हो जाएगा, जहां C और D अचर है। आप इस कल्पित किए गए हल को समीकरण (3.3) में प्रतिस्थापित करके प्राप्त कर सकते हैं। इससे यह अर्थ निकलता है कि प्रत्यानयन बल के न होने पर विस्थापन में चरघातांकीय रूप (Exponentially) में कमी आती है। इस तरह हम यह मान् लेते हैं कि समीकरण (3.3) का हल उस दोलनी गति को निरूपित करेगा जिसके आयाम में समय के साथ कमी आती जाती है।

3.3 अवकल समीकरण के हल

अब प्रश्न यह उठता है कि किस प्रकार अवमंदन का प्रभाव दोलन के आयाम पर पड़ता है ? इसके लिए हमें समीकरण (3.3) को हल करना होता है जबकि उसमें प्रत्यानयन बल और अवमंदन बल दोनों ही मौजूद हों व्यापक हल में, चरघातांकी पद और सरल आवर्त्ती पद दोनों ही होने चाहिए। अतः आइए हम निम्न रूप का एक हल लें

$$x = a\exp(\alpha t) \tag{3.4}$$

जहाँ a और α अज्ञात अचर हैं।

समीकरण (3.4) को समय के सापेक्ष दो बार अवकलित करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$\frac{dx}{dt} = a\alpha\exp(\alpha t)$$

और

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\,\alpha^2 \exp(\alpha t)$$

इन व्यंजकों को समीकरण (3.3) में प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है

$$(\alpha^2 + 2b\,\alpha + \omega_0^2)\, a \exp(\alpha t) = 0 \qquad (3.5)$$

यह समीकरण हमेशा लागू हो, इसके लिए या तो $a = 0$ जो तुच्छ (Trival) है, या

$$\alpha^2 + 2b\,\alpha + \omega_0^2 = 0 \qquad (3.6)$$

यह समीकरण α में द्विघात समीकरण (Quadratic Equation) है। मान लीजिए इसके दो मूल α_1 और α_2 हैं । तब,

$$\alpha_1 = -b + (b^2 - \omega_0^2)^{1/2} \qquad (3.7\ \text{क})$$

और

$$\alpha^2 = -b - (b^2 - \omega_0^2)^{1/2} \qquad (3.7\ \text{ख})$$

समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

हैं।

इन मूलों से दोलक की गति निर्धारित हो जाती है। स्पष्ट है कि α की विभाएँ वही होती हैं जो कि प्रतिलोम समय की विभाएँ हैं। क्या इसका ज्ञान आपको $\exp(\alpha t)$ के रूप को देखकर नहीं होता।

इस तरह, हम यह पाते हैं कि समीकरण (3.3) के दो संभव हल हैं

$$x_1 = a_1 \exp[-\{b - (b^2 - \omega_0^2)^{1/2}\}t]$$

और

$$x_2 = a_2 \exp[-b\,\{b + (b^2 - \omega_0^2)^{1/2}\}t] \qquad (3.8)$$

क्योंकि समीकरण (3.3) रैखिक हैं, इसलिए इस पर अध्यारोपण का नियम लागू होता है। अतः x_1 और x_2 का अध्यारोपण करने पर व्यापक हल प्राप्त हो जाता है

$$x(t) = \exp(-bt)\,[a_1 \exp(b^2 - \omega_0^2)^{1/2} t\ ] + a_2 \exp[-(b^2 - \omega_0^2)^{1/2} t] \qquad (3.9)$$

ध्यान दीजिए कि जब b, ω_0 से कम, के बराबर या से अधिक होता है तो राशि $(b^2 - \omega_0^2)$ क्रमशः ऋणात्मक, शून्य अथवा धनात्मक होती है। अतः निम्नलिखित तीन संभावनाएँ होती हैं।

i) यदि $b < \omega_0$ तो हम कहते हैं कि तंत्र अल्प अवमंदित (Under Damped) है।

ii) यदि $b = \omega_0$ तो तंत्र क्रांतिकतः अवमंदित (Critically Damped) है।

iii) यदि $b > \omega_0$ तो तंत्र अधिक अवमंदित (Over Damped) है।

इन प्रतिबंधों में से प्रत्येक से एक अलग हल प्राप्त होता है जो एक विशेष व्यवहार को निर्धारित करता है। हम इन हलों की चर्चा उनके महत्व के अनुसार करेंगे।

3.3.1 प्रबल अवमंदन (Heavy Damping)

जब गति प्रतिरोध बहुत अधिक होता है तब तंत्र को प्रबल अवमंदित निकाय कहा जाता है। क्या आप व्यवहारिक रुचि वाले प्रबल अवमंदित तंत्र का एक उदाहरण दे सकते हैं ? किसी ट्रेन के माल डिब्बों को जोड़ने वाली कमानियों से एक अति महत्वपूर्ण प्रबल अवमंदित तंत्र प्राप्त होता है। भौतिकी के प्रयोगशाला में, श्यान माध्यम (Viscous Medium) में लोलक के कंपन (Vibrations) और निलंबित गैल्वेनोमीटर (Dead Beat Galvanometer) की कुंडली की गति प्रबल अवमंदित तंत्र के उदाहरण हैं।

गणितीय रूप में कोई तंत्र प्रबल अवमंदित तंत्र तब होता है जबकि $b > \omega_0$ इस स्थिति में राशि $\sqrt{b^2 - \omega_0^2}$ धनात्मक होगी। यदि हम

$$\beta = \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$$

मान लें तो समीकरण (3.9) द्वारा दिया गया अवमंदित दोलक का व्यापक हल यह हो जाता है

$$x(t) = \exp(-bt)\,[a_1 \exp(\beta t) + a_2 \exp(-\beta t)] \qquad (3.10)$$

यह समीकरण एक अदोलनी प्रकृति को निरूपित करता है। इस प्रकार की गति को रुद्धदोल (Dead Beat) कहा जाता है। इस स्थिति में वास्तविक विस्थापन प्रारंभिक प्रतिबंधों से प्राप्त होता है। आइए हम यह मान लें कि शुरू में दोलन अपनी साम्यावस्था में है अर्थात् $x = 0$ पर $t = 0$, तब इसे हम एक झटका देते हैं जिससे

कि इसका वेग v_0 हो जाता है अर्थात् $t = 0$ पर $v = v_0$ तब समीकरण (3.10) से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$a_1 + a_2 = 0$$

और

$$-b(a_1 + a_2) + \beta(a_1 - a_2) = v_0$$

इन समीकरणों को हल करने पर

$$a_1 = -a_2 = \frac{v_0}{2\beta}$$

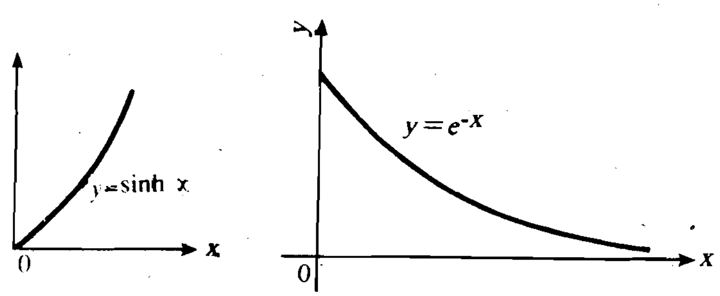
प्राप्त होता है। इन परिणामों को समीकरण (3.10) में प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित हल प्राप्त होता है

$$x(t) = \frac{v_0}{2\beta} \exp(-bt)\,[\exp(\beta t) - \exp(-\beta t)]$$

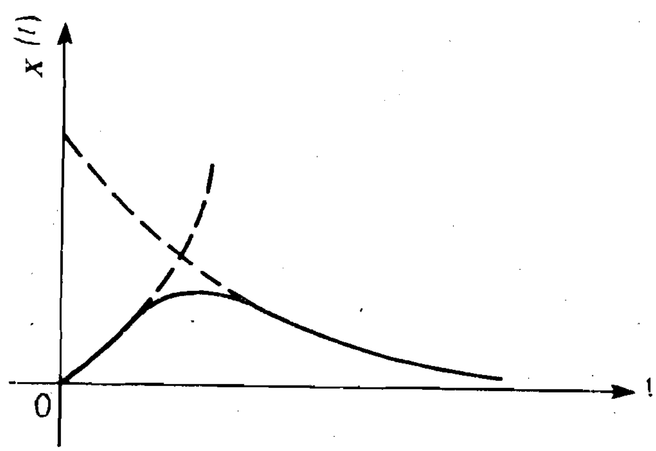
$$= \frac{v_0}{\beta} \exp(\beta t) \sinh \beta t \qquad (3.11)$$

जहाँ $\dfrac{[\exp(\beta t) - \exp(-\beta t)]}{2}$

अतिपरवलयिक साइन फलन (Hyperbolic Function) है। समीकरण (3.11) से यह स्पष्ट है कि $x(t)$ बढ़ते क्रम में (Increasing) अतिपरवलयिक फलन और क्षय मान (Decaying) चरघातांकी फलन के गुणन से प्राप्त हो जाता है। इन्हें आकृति 3.2 क में अलग-अलग आलेखित किया गया है। आकृति 3.2 ख में उस प्रबल अवमंदित तंत्र के समीकरण (3.11) को आलेखित किया गया है जबकि उसे अपनी साम्यावस्था से यकायक क्षुब्ध कर दिया गया हो। यहाँ आप यह ध्यान दीजिए कि प्रारंभ में समय के साथ विस्थापन में वृद्धि होती है। पर तुरंत चरघातांकी पद का प्रभाव अधिक हो जाता है और तब विस्थापन धीरे-धीरे कम होने लगता है।



चित्र 3.2 क: चरघातांकी क्षय और अतिपरवलयिक फलन



चित्र 3.2 ख : अधिक अवमंदित तंत्र से समीकरण (3.11) का आलेख

3.3.2 क्रांतिक अवमंदन (Critical Damping)

आपने यह अवश्य देखा होगा कि जब कोई कार सड़क के किसी उभरे स्थान से होकर जाती है तो कार ऊपर-नीचे उछलने लगती है जिससे उसमें बैठे व्यक्तियों को उछाल का अनुभव होता है। इस उछाल को कम करने के लिए अवमंदित बल का प्रयोग करना चाहिए जिससे कि कार तुरंत पुनः साम्यावस्था में आ जाए। इसके लिए हम क्रांतिकतः अवमंदित आघात अवशोषियों (Shock Absorbers) का प्रयोग करते हैं। सूचक तथा निलंबित, गैल्वेनोमीटर जैसे अभिलेखन यंत्रों में भी, जो अचानक आवेग (Impulse) का अनुभव करते हैं, क्रांतिक अवमंदन उपयोगी होता है। इसमें गैल्वेनोमीटर के सूचक (सूई) को कम से कम समय में सही स्थिति में आ जाना होता है और बिना किसी दोलन के रुक सके। इसी प्रकार प्रक्षेप गैल्वेनोमीटर की कुंडली को तुरंत शून्य विस्थापन की स्थिति में आ जाना होता है।

गणितीय रूप में हम किसी तंत्र को क्रांतिकतः अवमंदित तब कहते हैं जबकि b तंत्र की प्राकृतिक आवृत्ति (Natural Frequency) के बराबर हो इससे यह अर्थ निकलता है कि $b^2 - \omega_0^2 = 0$ जिससे कि समीकरण (3.9) निम्न रूप का हो जाता है

$$x(t) = (a_1 + a_2)\exp(-bt)$$

$$= a \exp(-bt) \tag{3.12}$$

आइए अब हम यह याद करें कि सरल आवर्त्त गति के अवकल समीकरण के हल में दो स्वेच्छ अचर (Arbitrary Constants) होते हैं जिन्हें प्रारंभिक प्रतिबंध लगाकर नियत कर दिया जाता है। पर, यहां समीकरण (3.12) में केवल एक अचर हैं। अतः यह एक संपूर्ण हल (Complete Solution) नहीं है। यहां यह जान लेना आवश्यक है कि ऐसा क्यों होता है। ऐसा होने का कारण यह कि α वाले द्विघात समीकरण (3.6) के मूल बराबर हैं। अतः समीकरण (3.9) के दो पदों से समान समय प्राप्त होता है जिसकी वजह से ये दो पद एक पद के रूप में आ जाते हैं। यह सरलता से सत्यापित किया जा सकता है कि इस स्थिति में समीकरण (3.3) का व्यापक हल यह होता है

$$x(t) = (p + q\,t)\exp(-b\,t) \qquad \text{(3.13 ख)}$$

जहाँ p और q अचर है। p की विमाएँ नहीं हें जो कि लंबाई की है और q की विमाएं वही होती हैं जो वेग की हैं । इन्हें प्रारंभिक प्रतिबंधों को लागू करके आसानी से ज्ञात किया जा सकता है।

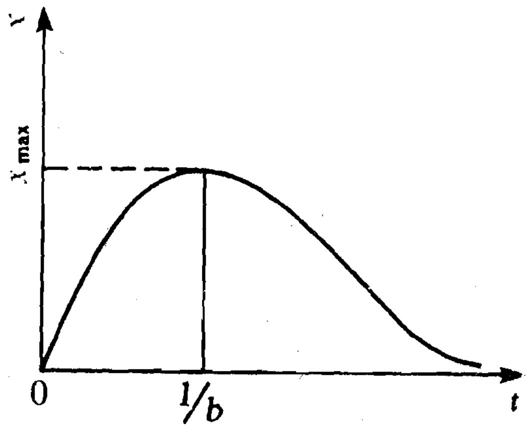
आइए अब हम यह मान लें कि यकायक आवेग देकर (निलंबित कुंडली गैल्वेनोमीटर की कुंडली को $t = 0$ पर कुछ वैद्युत आवेश दिया जाता है) तंत्र को अपनी माध्य साम्यावस्था से क्षुब्ध कर दिया गया है। अर्थात् $t = 0$ पर $x(0) = 0$ और $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = v_0$ इससे p = 0 और q = 0 प्राप्त होता है जिससे कि संपूर्ण हल को निम्नलिखित प्रकार से लिखा जा सकता है

$$x(t) = v_0 t \exp(-bt) \qquad \text{(3.13 ख)}$$

चित्र 3.3 में समीकरण (3.13ख) द्वारा निर्धारित क्रांतिकतः अवमंदित तंत्र का विस्थापतः समय ग्राफ से दिखाया गया है। अधिकतम विस्थापन पर $\frac{dx}{dt} = 0$ और $\frac{d^2x}{dt^2}$ = या < 0 यह घटना समय $t = 1/b$ पर घटित होती है :

π की तरह e भी अस्पष्ट है जिसका मान 2.718 हैं।

$$x_{\max} = v_0 t\, e^{-1} = 0.368\ \frac{v_0}{b} = 0.736\,\frac{mv_0}{\gamma}$$



चित्र 3.3 : समीकरण (3.3 (ख) से निर्धारित क्रांतिकतः अवमंदित तंत्र का विस्थापन समय ग्राफ

3.3.3 दुर्बल अथवा अल्प अवमंदन

जब $b < \omega_0$ तो इसे हम दुर्बल अवमंदन की स्थिति मानते हैं। इससे यह अर्थ निकलता है कि $(b^2 - \omega_0^2)$ एक ऋण राशि है अर्थात् $[(b^2 - \omega_0^2)^{1/2}]$ आधिकल्पित (Imaginary) राशि है। आइए इसे हम निम्न रूप में लिखें

$$(b^2 - \omega_0^2)^{1/2} = \sqrt{-1}\,(\omega_0^2 - b^2)^{1/2}$$

$$= \pm\, \mathrm{i}\,\omega_\mathrm{d}$$

जहाँ $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ और $\omega_\mathrm{d} = (\omega_0^2 - b^2)^{1/2} = \left[\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}\right]^{1/2}$ (3.14)

एक वास्तविक धनराशि (Real Positive Quantity) है। ध्यान दीजिए कि अवमंदन न होने पर (b = 0) ω_d, घटाकर ω_0 के बराबर हो जाती है। अर्थात् दोलक की प्राकृतिक आवृत्ति हो जाती है।

$\exp(\pm \mathrm{i}\, x) = \cos x \pm \mathrm{i} \sin x$

समीकरण (3.9) और समीकरण (3.14) को एक साथ लेने पर विस्थापन निम्न रूप का हो जाता है।

$$x(t) = \exp(-bt)\,[a_1 \exp(\mathrm{i}\omega_\mathrm{d} t) + a_2 \exp(-\mathrm{i}\,\omega_\mathrm{d} t)] \qquad (3.15)$$

एक आदर्श दोलक के साथ एक अवमंदित दोलक के व्यवहार की तुलना करने के लिए हमें समीकरण (3.15) को इस रूप में लिखना चाहिए जिससे कि विस्थापन ज्यावक्रीयतः (Sinusoidally) हो। इसके लिए हम संमिश्र चरघातांकी (Complex exponential) को साइन और कोसाइन फलनों के पदों में लिखते हैं।

$$x(t) = \exp(-bt)\,[a_1(\cos \omega_\mathrm{d} t + \mathrm{i} \sin \omega_\mathrm{d} t) + a_2(\cos \omega_\mathrm{d} t - \mathrm{i} \sin \omega_\mathrm{d} t)]$$

$\cos \omega_\mathrm{d} t$ और $\sin \omega_\mathrm{d} t$ के गुणांकों को इनके साथ लेने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है :

$$x(t) = \exp(-bt)\,[(a_1 + a_2) \cos \omega_\mathrm{d} t + \mathrm{i}\,(a_1 - a_2) \sin \omega_\mathrm{d} t] \qquad (3.16)$$

आइए अब हम

$$(a_1 + a_2) = a_0 \cos \phi$$

और $\quad -\mathrm{i}\,(a_1 - a_2) = a_0 \sin \phi \qquad (3.17)$

मान लें। जहां a_0 और ϕ स्वेच्छ अचर है। (3.17) से निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$a_0 = 2\sqrt{a_1 a_2}$$

और $$\tan\phi = -i\,\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \qquad (3.18)$$

दूसरे परिणाम को देखने से पता चलता है कि $\tan\theta$ एक संमिश्र राशि है। क्या इससे यह अर्थ भी निकलता है कि ϕ भी संमिश्र है ? प्रश्न यह उठता है कि संमिश्र कोण का विवेचन किस प्रकार किया जा सकता है ? इसे जानने के लिए हम निम्न सर्वसमिका (Identity)

$$\sec^2\phi = \frac{a_1 + a_2}{2\sqrt{a_1 a_2}}$$

का प्रयोग करके $\cos\phi$ को ज्ञात करते हैं । तब

$$\cos\phi = \frac{a_1 + a_2}{2\sqrt{a_1 a_2}}$$

इसका मतलब यह हुआ कि $\cos\phi$ वास्तविक है और ϕ भी वास्तविक है।

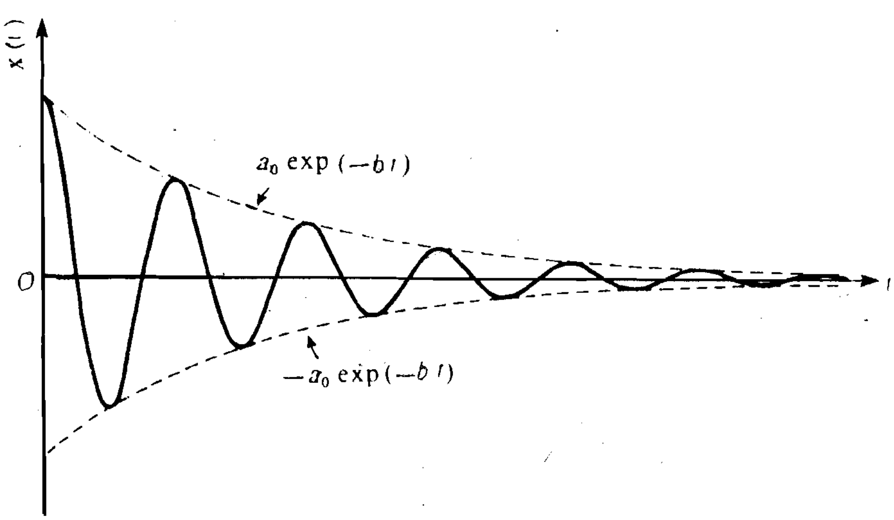
समीकरण (3.17) को समीकरण (3.16) में प्रतिस्थापित करने पर हम यह पाते हैं कि कोष्ठक के अंदर लिखा गया व्यंजक दो कोणों के योग का कोसाइन है। अतः दुर्बलतः अवमंदित दोलक ($b < \omega_0$) के लिए समीकरण (3.3) का व्यापक हल यह होगा

$$x(t) = a_0 \exp(-bt)\cos(\omega_d t + \phi) \qquad (3.19)$$

जहाँ ω_d वही है जो कि समीकरण (3.16) में दिया गया है।

यहाँ आप यह ध्यान दें कि समीकरण (3.19) द्वारा दिया गया हल जो कि पूरी गति में समान बना रहता है, आवृत्ति ω_d ज्यावक्रीय गति को निर्धारित करता है। इस गुणधर्म का ठीक-ठीक समयांतरालों में दोलकों के प्रयोग में काफी महत्व होता है। अब प्रश्न यह उठता है कि आदर्श सरल आवर्त्त गति के अनुसार आयाम में किस प्रकार परिवर्तन होता है ? आप यह देखेंगे कि b से निर्धारित दर पर आयाम में समय के साथ चरघातांकीय रूप में कमी आती जाती है। अतः हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि दुर्बलतः अवमंदित तंत्र की गति सरल आवर्त्त गति नहीं होती।

समीकरण (3.19) द्वारा निर्धारित अवमंदित दोलनी व्यवहार को चित्र 3.4 में $\phi = 0$ लेकर आलेखित किया गया है। क्योंकि कोसाइन फलन का मान +1 और −1 के बीच होता है, इसलिए विस्थापन समय वक्र $a_0 \exp(-bt)$ और $-a_0 \exp(-bt)$ के बीच स्थित होता है। इस तरह हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि अवमंदन के कारण आयाम और कोणीय आवृत्ति में कमी आने लगती है।



चित्र 3.4 : दुर्बलतः अवमंदित सरल आवर्ती दोलक का विस्थापन - समय ग्राफ

अब प्रश्न यह उठता है कि किस प्रकार अवमंदन दोलन के आवर्त्त काल (Period) को प्रभावित करता है ? इस प्रभाव का पता आप यह देखकर लगा सकते हैं कि दोलन का आवर्त्त काल निम्न होता है

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{(\omega_0^2 - b^2)} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}}}$$

जबकि $b > 0, \omega_d < \omega_0$ इससे यह अर्थ निकलता है कि आदर्श दोलित की तुलना में आवमंदित दोलित्र के कंपन का आवर्त्त काल अधिक होता है। इस परिणाम का अनुभव आपने स्वयं भी किया होगा क्योंकि अवमंदन बल गति का प्रतिरोध करता है।

बोध प्रश्न 1

एक अवमंदित कमानी द्रव्यमान तंत्र के कंपन का आयाम 200 सेकंड में 10 से घटकर 2. 5 cm हो जाता है। इस अवधि में यह 100 दोलन करता है तो आप इस तंत्र की अवमंदन सहित और अवमंदन रहित आवर्त्त कालों की तुलना कीजिए।

अभी तक हमने दुर्बल, क्रांतिक और अधिक अवमंदन के लिए अवमंदित दोलित्र से संबंधित अवकल समीकरण के हल के बारे में चर्चा की है। अब हम अपनी चर्चा केवल दुर्बलतः अवमंदित तंत्रों तक ही केन्द्रित सीमित रखेंगे।

3.4 दुर्बलत : अवमंदित दोलित्र की औसत ऊर्जा

इकाई 1 में हम अवमंदित दोलित्र की औसत ऊर्जा ज्ञात कर चुके हैं। अब प्रश्न यह उठता है कि किस प्रकार अवमंदन का दुर्बलतः अवमंदित दोलित्र की औसत ऊर्जा पर प्रभाव पड़ता है ? इस प्रश्न का उत्तर देने के संबंध में हम यह पाते हैं कि अवमंदन रहने पर समय के साथ दोलन के आयाम में कमी आती जाती है। इससे यह अर्थ निकलता है कि गति के प्रतिरोध को दूर करने में ऊर्जा का क्षय होता है। आपको याद होगा कि इकाई 1 में हम यह पढ़ चुके हैं कि किसी भी समय पर सरल आवर्त दोलित्र की संपूर्ण ऊर्जा गतिज ऊर्जा (Kinetic Energy) और स्थितिज ऊर्जा (Potential Energy) का योग होता है। हम इस परिभाषा को यहां भी लागू करके यह लिख सकते हैं

$E =$ गतिज ऊर्जा $(K.E.)$ + स्थितिज ऊर्जा (U)

$$= \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 \qquad (3.20)$$

जहाँ (dx/dt) तात्कालिक वेग को प्रकट करता है।

दुर्बलतः अवमंदित सरल आवर्त दोलित्र का तात्कालिक विस्थापन समीकरण (3.19) से प्राप्त हो जाता है :

$$x = a_0 \exp(-bt) \cos(\omega_d t + \phi)$$

इसे समय के सापेक्ष अवकलित करने पर हमें तात्कालिक वेग प्राप्त होता है :

$$\frac{dx}{dt} = v = -a_0 \exp(-bt) [b \cos(\omega_d t + \phi) + \omega_d \sin(\omega_d t + \phi)] \qquad (3.21)$$

अतः दोलित्र की गतिज ऊर्जा निम्न होगी

$$\text{गतिज ऊर्जा} = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} m a_0^2 \exp(-2bt) [b \cos(\omega_d t + \phi) + \omega_d \sin(\omega_d t + \phi)]^2$$

$$= \frac{1}{2} m a_0^2 \exp(-2bt) [b^2 \cos^2(\omega_d t + \phi) + \omega_d \sin^2(\omega_d t + \phi) + b\omega_d \sin^2(\omega_d t + \phi) \qquad (3.22 \text{ क})$$

इसी प्रकार हम यह प्राप्त कर सकते हैं कि दोलित्र की स्थितिज ऊर्जा यह है :

$$\text{स्थितिज ऊर्जा (U)} = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2$$

क्योंकि $k = m\omega_0^2$ का मान प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है

$$\text{स्थितिज ऊर्जा} = \frac{1}{2} ma_0^2\, \omega_0^2 \exp(-2bt) \cos^2(\omega_d t + \phi) \tag{3.22ख}$$

अतः किसी समय t पर दोलित्र की संपूर्ण ऊर्जा निम्न होगी

$$E(t) = \frac{1}{2} m\, a_0^2 \exp(-2bt) \left[(b^2 + \omega_0^2)\cos^2(\omega_d t + \phi) + \omega_d^2 \sin^2(\omega_d t + \phi) + b\, \omega_d \sin^2(\omega_d t + \phi)\right] \tag{3.23}$$

जब अवमंदन बहुत कम होता है, तब एक दोलन पूरा होने पर दोलन के आयाम में कोई विशेष परिवर्तन नहीं आता। अतः हम गुणक $\exp(-2bt)$ को अनिवार्य रूप में एक अचर मान सकते हैं। और, क्योंकि $<\sin^2\theta> = <\cos^2\theta> = \frac{1}{2}$ और $<\sin\theta> = 0$ इसलिए एक चक्र का औसत लेने पर दुर्बलतः अवमंदित दोलित्र की ऊर्जा यह होगी

$$<E> = \frac{1}{2} m\, a_0^2 \exp(-2bt) <[(b^2 + \omega_0^2)\cos^2(\omega_d t + \phi) + \omega_d^2 \sin^2(\omega_d t + \phi) + ...]$$

$$= \frac{1}{2}\, m\, a_0^2 \exp(-2bt) \left[\frac{b^2 + \omega_0^2}{2} + \frac{\omega_d^2}{2}\right]$$

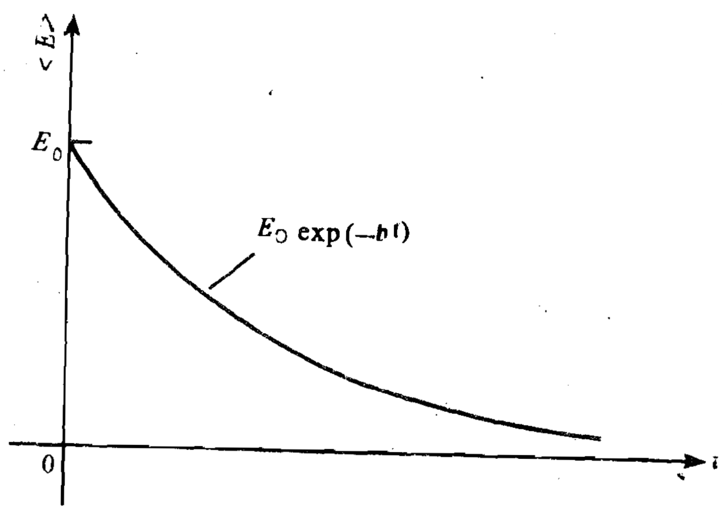
$$= \frac{1}{2} m\, a_0^2\, \omega_0^2 \exp(-2bt) \tag{3.24 क}$$

क्योंकि $b << \omega_0$ पर $\omega_d \simeq \omega_0$.

इकाई 1 से आपको याद होगा कि $E_0 = \frac{1}{2} m\, a_0^2\, \omega_0^2$ अनवमंदित दोलित्र की संपूर्ण ऊर्जा होती है। अतः हम यह लिख सकते हैं कि

$$<E> = E_0 \exp(-2\, bt) \tag{3.24 ख}$$

इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि दुर्बलतः अवमंदित दोलित्र की औसत ऊर्जा में समय के साथ चरघातांकी रूप में कमी आती जाती है। इस तथ्य को चित्र 3.5 में दिखाया गया है। समीकरण (3.24 ख) से यह भी पता चलता है कि ऊर्जा की क्षय-दर b के मान पर निर्भर करती है, b का मान जितना अधिक होगा, ऊर्जा का क्षय उतनी ही तेजी से होगा।



चित्र 3.5 : अवमंदित सरल आवर्ती दोलक की औसत ऊर्जा

3.4.1 एक चक्र में क्षयित औसत शक्ति

क्योंकि अवमंदित दोलित्र की ऊर्जा समय के साथ अचर नहीं होती, इसलिए dE/dt शून्य नहीं होगा। वास्तव में यह ऋणात्मक होती है। किसी भी समय ऊर्जा में हो रही हानि की दर से क्षयित तात्कालिक शक्ति प्राप्त हो जाती है। समीकरण (3.20) से हम यह लिख सकते हैं कि

$$\frac{dE}{dt} = P(t) = m\left[\frac{d^2x}{dt^2} + kx\right]\frac{dx}{dt}$$

इस परिणाम को समीकरण (3.2) के साथ लेने पर हमें अवमंदित दोलित्र द्वारा क्षयित शक्ति निम्नलिखित समीकरण से प्राप्त हो जाती है

$$P(t) = -\gamma \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

इस समीकरण से यह पता चलता है कि घर्षण बल के विरुद्ध किए गए कार्य की दर तात्कालिक वेग के वर्ग के अनुलोमानुपाती (Directly Proportional) होता है। समीकरण (3.21) से प्राप्त के मान को इसमें प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$P(t) = -\gamma a_0^2 \exp(-2bt)\,[b^2 \cos^2(\omega_d t + \phi) + \omega_d^2 \sin^2(\omega_d t + \phi) + b\,\omega_d \sin^2(\omega_d t + \phi)]$$

अतः एक चक्र में क्षयित औसत शक्ति यह होती है।

$$\begin{aligned} < P > &= \frac{1}{2}\gamma a_0^2 \omega^2 \exp(-2bt) \\ &= -\frac{\gamma}{m} < E > \\ &= -2b < E > \end{aligned} \qquad (3.25)$$

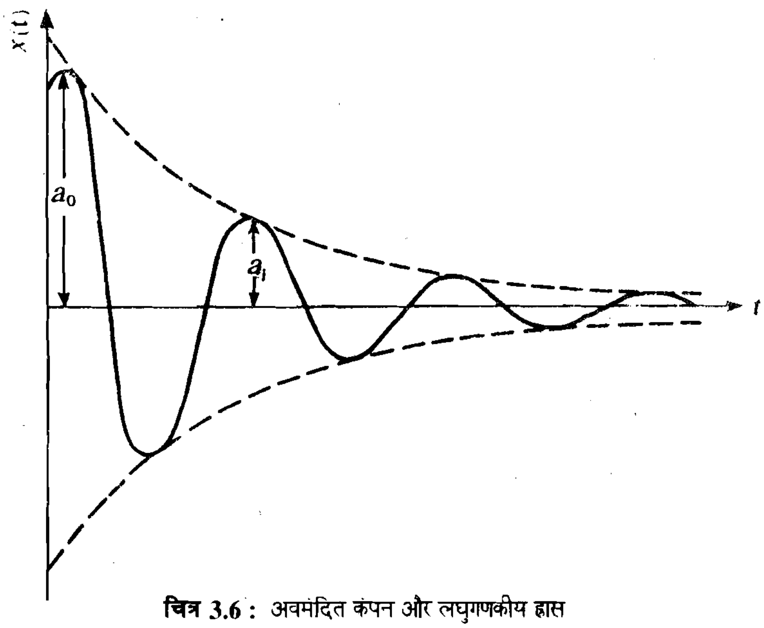
हम इस परिणाम को समय के सापेक्ष समीकरण (3.24 ख) को अवकलित करके सीधे प्राप्त कर सकते हैं।

3.5 अवमंदित तंत्रों को अभिलक्षित करने की विधियां

हम जानते हैं कि श्यान अवमंदन निदर्श (Model) में अवमंदित दोलित्र γ और ω_0 से अभिलक्षित होता है। हम यह भी जानते हैं कि यह निदर्श अनेक अलग-अलग भौतिक तंत्रों में लागू होता है। अतः अब यह प्रश्न उठ सकता है कि क्या अवमंदित दोलनों को अभिलक्षित करने की और भी विधियां हैं। अनुभव से यह पता चलता है कि कुछ स्थितियों में अवमंदित गति को अभिलक्षित करने के लिए अन्य प्राचलों (Parameters) का प्रयोग अधिक सुविधाजनक होता है। पर सभी स्थितियों में हम इनका γ और ω_0 के साथ संबंध स्थापित कर सकते हैं।

3.5.1 लघुगणकीय ह्रास (Logarithmic Decrement)

तंत्र में उपस्थित अवमंदन की मात्रा मालूम करने की सबसे अधिक सुविधाजनक विधि उस दर को मापना है जिस दर से दोलन का आयाम कम होता जाता है। आइए हम चित्र 3.6 में ग्राफीय रूप में दिखाए गए अवमंदित कंपन पर विचार करें। मान लीजिए a_0 और a_1 दोलन के प्रथम दो उत्तरोत्तर आयाम हैं जिनमें एक आवर्त्तकाल का अंतर है।



चित्र 3.6 : अवमंदित कंपन और लघुगणकीय ह्रास

ध्यान दीजिए कि ये आयाम समान दिशा/चतुर्थांश (Qudrant) में स्थित होते हैं। यदि T दोलन का आवर्त्त-काल हो, तो दुर्बलतः अवमंदित दोलित्र से संबंधित समीकरण (3.19) का प्रयोग करके हम लिख सकते हैं कि

$a_1 = a_0 \exp(-bT)$

जिससे कि

$$\frac{a_0}{a_1} = \exp(bT) = \exp(\gamma T/2m) \qquad (3.26)$$

ध्यान दीजिए कि अनुपात a_0/a में बड़ा आयाम अंश में है। यही कारण है कि इस अनुपात को ह्रास (Decrement) कहा जाता हैं। अब प्रश्न यह उठ सकता है कि क्या किन्हीं दो क्रमागत आयामों का ह्रास समान होता है ? इसका उत्तर "हाँ" में है। इसे दिखाने के लिए आइए हम दूसरे आयाम और तीसरे आयाम का अनुपात लें। इन्हें समीकरण (3.19) में $t = T$ और $t = 2T$ लेकर प्राप्त किया जा सकता है। अतः, हम यह लिख सकते हैं

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_0 \exp(-bT)}{a_0 \exp(-2bT)} \quad \exp(bT)$$

अतः हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि किन्हीं दो क्रमागत आयामों के लिए, जिनमें एक आवर्त-काल का अंतर है, हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \exp(bT) = d \qquad (3.27)$$

अर्थात् किन्हीं दो क्रमागत आयामों का ह्रास समान होता है जिसे हम इस प्रकार से लिख सकते हैं

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{a_{n-1}}{a_n} = d \qquad (3.28)$$

एक आवर्त्त-काल के अंतर वाले उत्तरोत्तर दोलन आयामों के अनुपात के लघुगणक को लघुगणकीय ह्रास कहा जाता है। इसे प्रायः प्रतीक λ से प्रकट किया जाता है।

$$\lambda = \ln\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right) = \frac{\gamma T}{2m} \qquad (3.29)$$

इस समीकरण से यह पता चलता है कि यदि दो उत्तरोत्तर आयाम ज्ञात हों तो λ मालूम किया जा सकता है। पर, प्रयोग की दृष्टि से n आवर्त्त-काल के अंतर वाले दोलन आयामों की तुलना करना अधिक सुविधाजनक होता है और साथ ही अधिक सही होता है। अर्थात् इस संधि में हम a_0/a_n मापते हैं।

इस अनुपात को मालूम करने के लिए पहले हम समीकरण (3.29 क) को उलटा करके इसे इस प्रकार लिखते हैं

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \exp(\lambda)$$

अब, अनुपात को a_0/a_n को इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$\frac{a_0}{a_n} = \left(\frac{a_0}{a_1}\right)\left(\frac{a_1}{a_2}\right)\left(\frac{a_2}{a_3}\right)\ldots\ldots\ldots\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right) = [\exp(\lambda)]^n$$

$$= n\exp(\lambda) \qquad (3.30)$$

क्योंकि किन्हीं दो क्रमागत आयामों का आयाम समान होता है।

दोनों ओर लघुगणक लेने पर अभीष्ट परिणाम प्राप्त हो जाता है :

$$\lambda = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{a_0}{a_n}\right) \qquad (3.31)$$

इससे यह पता चलता है कि यदि n के विभिन्न मानों के लिए $\ln (a_0/a_n)$ और n को आलेखित करें तो हमें एक सरल रेखा प्राप्त होगी। इस रेखा की प्रवणता (Slope) से λ प्राप्त हो जाता है।

बोध प्रश्न 2

अवमंदित सरल आवर्त दोलित्र का प्रथम आयाम 20 से·मी· का है। 100 दोलनों के बाद आयाम घटकर 2 से·मी· का हो जाता है जबकि प्रत्येक आवर्त काल 4.6 सेकंड का है। लघुगणकीय ह्रास और अवमंदन अचर ज्ञात कीजिए। यह भी बताइए कि कितने दोलनों पर आयाम घटकर 50% हो जाता है।

3.5.2 शिथिलता काल (Relaxation Time)

भौतिकी में हम प्रायः किसी राशि के क्षय को प्रारंभिक मान की भिन्न e^{-1} के रूप में मापते हैं। इससे हमें आयाम का मूल मान से घटकर $e^{-1} = 0.368$ गुणा तक होने में लगने वाले समय की सहायता से अवमंदन प्रभाव को एक अन्य विधि से व्यक्त कर सकते हैं। इस प्रक्रिया में लगने वाले इस समय को *विश्रांति काल* कहा जाता है। इसे समझने के लिए पहले आप यह याद कीजिए कि अवमंदित दोलित्र का आयाम

$$a(t) = a_0 \exp(-bt)$$

होता है।

यदि समयांतराल τ के बाद आयाम $a(t+\tau)$ हो तो हम इसे प्रकार लिख सकते हैं :

$$a'(t) = a_0 \exp[-b(t+\tau)]$$

अनुपात $a'(t)/a(t)$ लेने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$\frac{a'(t)}{a(t)} = \exp(-b\tau)$$

$$= \frac{1}{e}, \ b\tau = 1 \tag{3.32}$$

इससे यह पता चलता है कि $b = \tau^{-1}$ पर आयाम अपने प्रारंभिक मान से घटकर $e^{-1} = 0.368$ हो जाता है।

इस परिणाम को समीकरण (3.26) में लागू करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है।

अतः शिथिलता काल τ उसे तीव्रता का माप है जिससे गति अवमंदित होती है।

बोध प्रश्न 3

बोध प्रश्न 1. के कमानी-द्रव्यमान तंत्र का विश्रांति काल ज्ञात कीजिए।

3.5.3 गुणता कारक (Quality Factor)

अवमंदन प्रभाव को व्यक्त करने की एक अन्य विधि उसे ऊर्जा की क्षय-दर से व्यक्त करता है। समीकरण (3.24 ख) से हम यह जानते हैं कि समय $t = \dfrac{1}{2b} = \dfrac{m}{\gamma}$ सेकंड में दुर्बलतः अवमंदित दोलित्र की औसत ऊर्जा घटकर E_0e^{-1} हो जाती है यदि ω_0 उसकी कोणीय आवृत्ति हो तो इस समय में दोलित्र $\omega_d m/\gamma$ रेडियन से कंपित करेगा। दुर्बलतः अवमंदित तंत्र की ऊर्जा का घटकर E_0e^{-1} होने में वह तंत्र जितने रेडियन का दोलित करते हैं, वह गुणता कारक Q का माप होता है।

$$Q = \frac{\omega_d}{2b} = \frac{\omega_d m}{\gamma} = \frac{\omega_d \tau}{2} \tag{3.33}$$

ध्यान दीजिए कि Q केवल एक संख्या है और इसकी कोई भी विभा नहीं है। सामान्यतः γ छोटा होता है और Q एक काफी बड़ी संख्या होती है। मिसाल के तौर पर ट्यूनिंग फार्म का Q हजार या इससे भी अधिक होता है। जबकि रबर बैंड का Q काफी कम (~10) होता है। ऐसा होने का कारण रबर बैंड में अणुओं की लंबी शृंखला के कुंडलन से उत्पन्न आंतरिक घर्षण है। एक परमाणु में मुक्त रूप से विकिरण कर रहे इलेक्ट्रान के लिए $Q \sim 5 \times 10^7$ होता है। यह मान जीवन काल के विकिरण का लगभग 10^{-8}s होता है। अनवमंदित दोलित्र $(\gamma = 0)$ का गुणता कारक अंनत होता है।

दुर्बलतः अवमंदित यांत्रिक दोलित्र के गुणता कारक को कमानी कारक और अवमंदन अचर के पदों में व्यक्त किया जा सकता है।

क्योंकि दुर्बल अवमंदन के लिए $\omega_d \simeq \omega_0 = \sqrt{k/m}$

इसलिए $Q = \sqrt{km/\gamma^2}$

दूसरे शब्दों में हम यह कह सकते हैं कि दुर्बलतः अवमंदित दोलित्र का गुणता कारक k के वर्गमूल के अनुलोमानुपाती γ और के प्रतिलोमानुपाती (Inversely Proportional) होता है।

हम समीकरण (3.25) की सहायता से समीकरण (3.33) को भौतिक दृष्टि से अधिक सार्थक रूप में लिख सकते हैं :

$$Q = \frac{\omega_d}{2\pi} = \frac{2\pi}{\tau} \times \frac{< E >}{< p >}$$

$$= 2\pi \frac{\text{तंत्र में जमा औसत ऊर्जा}}{\text{प्रति चक्र में हानि हुई औसत ऊर्जा}} \qquad (3.34)$$

हम गुणता कारक का संबंध अवमंदित दोलित्र की आवृत्ति में होने वाले भिन्नात्मक परिवर्तन के साथ स्थापित कर सकते हैं। इस संबंध को स्थापित करने के लिए हम यह देखते हैं कि

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$$

या

$$\frac{\omega_d^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{b^2}{\omega_0^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{4Q^2}$$

$$\therefore \frac{\omega_d}{\omega_0} = (1 - 1/4\ Q^2)^{1/2}$$

$$= 1 - 1/8Q^2$$

इस तरह हम यह पाते हैं कि ω_0 में $1/8Q^2$ का भिन्नात्मक परिवर्तन होता है।

बोध प्रश्न 4

एक ट्यूनिंग फार्क जिसकी आवृत्ति 512 हर्ट्ज (Hz) है। उसका गुणता कारक 6×10^4 है वह अवधि ज्ञात कीजिए जिसमें कि इसकी ऊर्जा घटकर अपनी प्रारंभिक ऊर्जा के मान का 10% रह जाए।

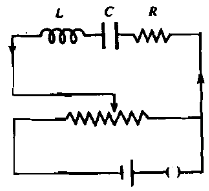
3.6 अवमंदित तंत्रों के उदाहरण

आप जानते हैं कि सभी सरल आवर्त्त दोलक में कुछ न कुछ अवमंदन अवश्य होता है जिसका मान सामान्यतः बहुत कम होता है। अवमंदन के प्रभाव को अच्छी तरह से समझने के लिए यहां हम दो विशेष स्थितियाँ ले रहे हैं : (i) एल सी आर परिपथ में आवेश के दोलन, और (ii) निलंबित कुंडली गैल्वेनोमीटर में कुंडली की गति । इन दोनों में हमारी विशेष रुचि इसलिए है, क्योंकि जहां एल सी आर परिपथ का रेडियो इंजीनियरी में काफी अधिक प्रयोग होता है वहीं निलंबित कुंडली गैल्वोनोमीटर का प्रयोग भौतिकी के प्रयोगशाला में होता है।

3.6.1 एल सी आर परिपथ

इकाई 1 में हम यह देख चुके हैं कि एल सी परिपथ में आवेश दोलन करता है और यह दोलन सरल आवर्त्त गति जैसा होता है। यदि परिपथ में एल प्रतिरोधक (Resistor) जोड़ दिया जाए तो क्या आपकी राय में दोलन संबंधी व्यवहार में कोई परिवर्तन आ सकता है ? इस प्रश्न का उत्तर जानने के लिए हम चित्र 3.7 लेते हैं यह, चित्र 1.11 के समान है, अंतर केवल यह है कि इसमें एक प्रतिरोधक R लगा हुआ है। यदि संधारित्र (Capacitor) के विसर्जन आवेश के कारण परिपथ में धारा प्रवाहित होती हो तो प्रतिरोधक पर वोल्टता ह्रास RI होता है। इस तरह समीकरण (1.36) अब निम्न रूप का हो जाता है

यहाँ पर विभव (charge) को Q की जगह q से प्रदर्शित कर रहे हैं। ताकि यह गुणता कारक Q से अलग हो।



चित्र 3.7 : एक एल सी आर परिपथ

$$\frac{q}{C} = -L\frac{dI}{dt} - RI \tag{3.35}$$

इससे यह पता चलता है कि यांत्रिक दोलित्र के बल समीकरण के स्थान पर एल सी आर परिपथ का वोल्टता समीकरण आ जाता है।

क्योंकि $I = dq/dt$ इसलिए समीकरण (3.35) को निम्न रूप में लिखा जा सकता है

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \tag{3.36}$$

इस समीकरण को समीकरण (3.2) के साथ तुलना करने पर हम यह पाते हैं कि L, R और $\frac{1}{C}$ क्रमशः m, γ और k के अनुरूप है। इससे यह अर्थ निकलता है कि वैद्युत परिपथ में प्रतिरोध का अवमंदन प्रभाव यांत्रिक तंत्र में श्यान बल के अवमंदन प्रभाव के ठीक अनुरूप होता है।

अब हम पूरे समीकरण (3.36) को L से भाग देते हैं।

तब

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0 \tag{3.37}$$

इस रूप में समीकरण (3.37) समीकरण (3.3) के अनुरूप है, और दोनों की तुलना सीधे की जा सकती है। इससे हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

और $$b = R/2L \tag{3.38}$$

हम जानते हैं कि b की विभाएं प्रतिलोम समय की विभाएं होती हैं। इससे यह अर्थ निकलता है कि R/L की भी वही विभाएं होती हैं जो s^{-1} की विभाएं अर्थात् ω_0 की विभाएं हैं। यही कारण हे कि $\omega_0 L$ के ओम में मापा जाता है।

इन अनुरूपताओं से यह स्पष्ट हो जाता है कि समीकरण (3.3) के सभी परिणाम समीकरण (3.37) पर भी लागू होते हैं। दुर्बलतः अवमंदित परिपथ में समय पर संधारित प्लेट पर आवेश यह होता है।

$$q(t) = q_0 \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right)\cos(\omega_d t + \phi) \tag{3.39 क}$$

जिसमें दोलनी विसर्जन की कोणीय आवृत्ति निम्न होती है

$$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

समीकरण (3.39 ख) से यह पता चलता है कि आवेश आयाम $q_0 \exp\left(\frac{R}{2L}t\right)$ में उस दर से क्षय होगा जो कि प्रतिरोध पर निर्भर करती है। इस तरह हम यह पाते हैं कि एल सी आर परिपथ में प्रतिरोध ही केवल क्षयकारी अवयव होता है : R में वृद्धि होने पर आवेश की क्षय-दर में बढ़ जाती है और दोलन की आवृत्ति कम हो जाती है । क्योंकि

$$\frac{1}{LC} > R^2/4L$$

,
,
,
,
,
,

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

क्योंकि $\omega_0 L$ को ओम में मापा जाता है, इसलिए $\frac{1}{\omega_0 C}$ भी ओम में मापा जाता है। इन्हें क्रमशः *प्रेरण प्रतिघात* (Inductive Reactance) और *धारिता प्रतिघात* (Capacitive Reactance) कहा जाता है।

यदि $R = 0$ हो तो समीकरण (3.39 क) समीकरण (1.38) के रूप का हो जाता है और $\omega_d \rightarrow \omega_0$ इसलिए दुर्बलता अवमंदित एल सी आर परिपथ का यह होगा

$$Q = \frac{\omega_d}{2b} \simeq \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad (3.40)$$

इस समीकरण से यह पता चलता है कि केवल प्रेरण परिपथ $R = 0$ के लिए गुणता कारक अंनत होगा।

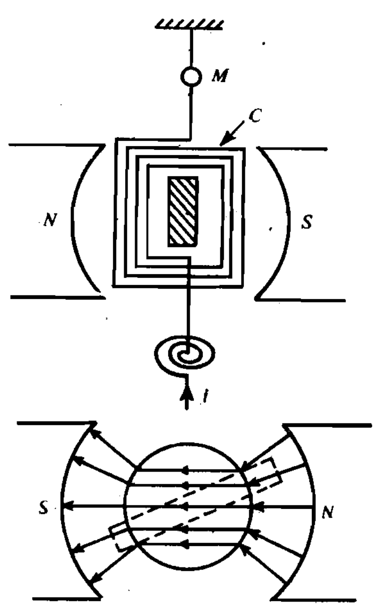
बोध प्रश्न 5

एक एल सी आर परिपथ में $L = 2\text{mH}$ अगर $C = 5\mu\text{F}$ यदि $R = 1\Omega$, 40Ω और 100Ω हो तो दोलन की आवृत्ति और गुणता कारक मालूम कीजिए जबकि विसर्जन दोलनी हो।

3.6.2 निलंबित गैल्वेनोमीटर

निलंबित गैल्वेनोमीटर के अंदर एक चुंबकीय क्षेत्र में धारा ले जाने वाली निलंबित कुंडली होती है। चुंबकीय क्षेत्र नाल-चुंबक (Horse Shoe Magnet) से पैदा किया जाता है। इसमें चुंबक को इस तरह रखा जाता है कि कुंडली सदा ही चुंबकीय बल रेखा की दिशा में रहती है। एक समान प्रबलता प्राप्त करने के लिए चुंबक के ध्रुवों के बीच एक लोहे का बेलन लटका दिया जाता है, जैसा कि चित्र (3.8) में दिखाया गया है। जब हम गैल्वेनोमीटर की कुंडली में आवेश भेजते हैं तो यह कुंडली θ कोण से घूम जाती है। क्योंकि कुंडली यांत्रिक रूप में एक मरोड़ी लोलक (Tortional Pendulum) होती है इसलिए इस पर एक प्रत्यानयन युग्म $-k_t\theta$ और एक अवमंदन युग्म $-\gamma\, d\theta/dt$ लगता है। क्या आप जानते हैं कि इस स्थिति में अवमंदन किस प्रकार प्रभावित करता है ? इसका उद्गम वायु घर्षण और वैद्युत चुंबकीय प्रेरण में होता है।

अवमंदन का एक हिस्सा हवा के श्यान कर्षण के कारण होता है। आमतौर पर यह बहुत कम होता है। गैल्वोनोमीटर की कुंडली जैसे ही चुंबकीय क्षेत्र में घूमती है, इससे स्वप्रेरित e.m.f. उत्पन्न होता है जो लैंज के नियम के अनुसार गति का विरोध करता है। इसलिए इसे विद्युत चुंबकीय अवमंदन कहते हैं यह गैल्वोनोमीटर की कुंडली को नियंत्रित करता है, जिसे हम प्रयोग में ला रहे हैं।



चित्र 3.8 : निलंबित गैल्वेनोमीटर का एक चित्रीय निरूपण

अतः कुंडली की गति के संबंध में समीकरण (1.35) निम्न रूप का हो जाता है

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -k_t\theta - \gamma \frac{d\theta}{dt} \tag{3.41}$$

जहाँ I निलंबत अक्ष के प्रति कुंडली का जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia) है।

समीकरण (3.41) को I से भाग देने पर और

$$2b = \gamma / I$$

तथा

$$\omega_0^2 = k_t / I \tag{3.42}$$

लिखने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2b \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = 0 \tag{3.43}$$

इस समीकरण का भी रूप वही है जो समीकरण (3.3) का है। इसलिए पहले प्राप्त किए गए सभी परिणाम समीकरण (3.4b) में बतायी गई कुंडली की गति पर भी लागू होंगे।

कम अवमंदन पर समीकरण (3.43) का हल निम्न यह होता है

$$\theta = \theta_0 \exp(-bt) \cos(\omega_d t + \phi) \tag{3.44}$$

जहाँ $\theta_0 \exp(-bt)$ दोलन का आयाम है। समीकरण (3.44) एक दोलनी गति निर्धारित करती है जिसमें दोलन का आवर्त काल T निम्न यह होता है।

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{(\omega_0^2 - b^2)^{1/2}} = \frac{2\pi}{\left[\frac{k_t}{I} - \frac{\gamma^2}{4I^2}\right]^{1/2}} \tag{3.45}$$

यही कारण है कि दुर्बलतः अवमंदित निलंबित गैल्वेनोमीटर को *प्रक्षेप-गैल्वेनोमीटर* (Ballistic Galvanometer) कहा जाता है। ध्यान दीजिए कि अवमंदन को कम करने के लिए हमें γ को कम करना होगा और हम किस प्रकार γ को कम कर सकते हैं ? जैसा कि पहले बताया जा चुका है कि प्रायः वायु अवमंदन काफी कम होता है। पर यह होता अवश्य है। वैद्युत चुंबकीय अवमंदन को कम करने के लिए हमें प्रेरित emf को कम करना होगा। प्रेरित emf एक अचालक बॉस अथवा हाथी दांत के फ्रेम पर कुंडली पर उत्पन्न करते हैं। यदि फ्रेम धातु का हो तो इसे एक स्थान पर काट दिया जाता है जिससे कि इसमें धारा प्रवाहित न हो सके।

प्रक्षेप गैल्वेनोमीटर का गुणता कारक यह होता है।

$$Q = \frac{\omega_d}{2b} = \frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{k_t}{I} + \frac{\gamma^2}{4I^2}} \tag{3.46 क}$$

यदि $\frac{k_t}{I} > \frac{\gamma^2}{4I^2}$ तो व्यंजक यह हो जाता है

$$Q = \sqrt{\frac{k_t I}{\gamma^2}}$$

बोध प्रश्न 6

एक गैल्वेनोमीटर कुंडली के कंपन का आवर्त्त काल 4 सेकंड है। इसके कंपन का 46 सेकंड में आयाम घटकर अपने मूल आयाम का 1/10वाँ हो जाता है। अवमंदन अचर γ और गुणता कारक Q ज्ञात कीजिए।

3.7 सारांश

1. सरल आवर्त्ती दोलक का अवकल समीकरण यह है

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

जहाँ $2b = \gamma/m$ और $\omega_0^2 x = 0$

अधिक अवमंदन के समीकरण का हल यह है

$$x(t) = \frac{v_0}{\beta} \exp(-bt) \sinh \beta t$$

क्रांतिक अवमंदन का समीकरण यह है

$$x(t) = (p + qt) \exp(-bt)$$

और दुर्बल अवमंदन के संबंध में समीकरण यह होता है

$$x(t) = a_0 e^{-bt} \cos(\omega_d t + \phi)$$

2. दुर्बलतः अवमंदित दोलन के आयाम और औसत ऊर्जा में समय के साथ चरघातांकी रूप में

$$a = a_0 e^{-bt}$$

और

$$< E > = E_0 \exp(-2bt)$$

जहाँ a_0 प्रारंभिक आयाम है और E_0 संपूर्ण प्रारंभिक ऊर्जा है।

3. दुर्बलतः अवमंदित तंत्र का आवर्त्त काल निम्न होता है

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{(\omega_0^2 - b^2)^{1/2}}$$

4. लघुगणकीय ह्रास एक आवर्त्त काल के अंतर वाले उत्तरोत्तर आयामों के अनुपात का लघुगणक होता है। यह निम्नलिखित होता है।

$$\lambda = \ln\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right) = bT$$

5. एक चक्र में दुर्बलतः अवमंदित सरल आवर्ती दोलक द्वारा क्षयित ऊर्जा अथवा शक्ति की हानि-दर निम्न प्रकार से प्रदर्शित किया जा सकता है

$$< P > = 2 < E > \tau$$

6. दुर्बलतः अवमंदित सरल आवर्त्ती दोलक का Q कारक निम्न होता है

$$Q = \omega_d \tau/2$$

7. एल सी आर परिपथ में आवेश के प्रवाह को निर्धारित करने वाला अवकल समीकरण निम्न प्रकार का है

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$$

एल सी आर परिपथ में L, R और $1/C$ के व्यवहार क्रमशः यांत्रिक दोलित्र में m, γ और k के व्यवहार अनुरूप होते हैं। जब $\left(\frac{1}{LC}\right) > \frac{R^2}{4L^2}$ तो व्यवहार दोलनी होता है और दोलन की आवृत्ति यह होती है

$$\gamma_d = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

निम्न R परिपथ के लिए

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{L/C}$$

8. अवमंदित निलंबित गैल्वेनोमीटर का अवकल समीकरण यह होता है

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma\frac{d\theta}{dt} + k_t \theta = 0$$

दुर्बल अवमंदन में यह प्रक्षेप गति निर्धारित करता है जो यह है

$$\theta = \theta_0 \exp(-bt)\cos(\omega_d t + \phi)$$

जहाँ

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k_t}{I} - \frac{\gamma^2}{4I^2}}$$

3.8 अंत में कुछ प्रश्न

1. एक सरल लोलक का आवर्त काल 2 सेकंड आगे आयाम 5° है। इसका 20 पूर्ण दोलन के बाद इसका आयाम घटकर 4° हो जाता है। अवमंदन अचर और समय अचर ज्ञात कीजिए।
2. एक सोनोमीटर का तार का गुणता कारक 4,000 है। तार 300 हर्ज (Hz) की आवृत्ति पर कंपन करता है। वह अवधि ज्ञात कीजिए जिसमें उसका आयाम घटकर अपने प्रारंभिक आयाम का आधा हो जाता हो।
3. एक बक्स जिसका द्रव्यमान 0.2 किलोग्राम है उसे कमानी के एक सिरे से जोड़ दिया गया है जिसका दूसरा सिरा एक दृढ़ आलेख में जुड़ा हुआ है। बक्स में 0.8 किलोग्राम का एक द्रव्यमान रखने पर तंत्र 4 दोलन प्रति सेकंड की दर से दोलन करने लगता है और 30 सेकंड में इसका आयाम 2 से· मी· से घटकर 1 से·मी· हो जाता है। (i) बल अचर (ii) समय अचर, (iii) कारक ज्ञात कीजिए।
4. एक एल सी आर परिपथ में $L = 5\text{mH}$, $C = 2\mu\text{F}$ और $R = 0.2\Omega$ बताइए कि विसर्जन दोलनी है कि नहीं। यदि दोलनी है तो आवृत्ति और परिपथ का गुणता कारक ज्ञात कीजिए। आवेश दोलन के आयाम को घटकर आधे आयाम तक आने में कितना समय लगेगा ? R के किस मान से विसर्जन ठीक अदोलनी हो जाएगा।
5. एक ट्यूनिंग फॉर्क जिसकी आवृत्ति 256 हर्ज (Hz) है उसका गुणता कारक 10^3 है। वह अवधि ज्ञात कीजिए जिसमें अवमंदन के न होने पर इसकी ऊर्जा घटकर अपनी मूल ऊर्जा की e^{-1} हो जाती है। इस अवधि में ट्यूनिंग फॉर्क कितने दोलन करेगा ?

3.9 हल/उत्तर

बोध प्रश्न

1. $T_d = \dfrac{200}{100} = 2\text{s}$

अब, $T_d = 2\text{ s} = \dfrac{2\pi}{(\omega_0^2 + b^2)^{1/2}}$

जिससे कि

$$\omega_0^2 = \pi^2 - b^2$$

इस तरह $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{2\pi}{(\pi^2 - b^2)^{1/2}}$

b ज्ञात करने के लिए हम संबंध

$$a = a_0 \exp(-bt)$$

का प्रयोग करते हैं।

इसे इस रूप में लिखा जा सकता है

$$b = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{a_0}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{200}\ln\left(\frac{10}{2.5}\right)$$

$$= \frac{2.3}{200} \log 10^4$$

$$= 6.93 \times 10^{-3}\ s^{-1}$$

इस मान को (i) में प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$T_0 = \frac{2\pi}{[\pi^2 + (6.93 \times 10^{-3})^2]^{1/2}} = 2.0\ s$$

$$\simeq T_d$$

2. हम जानते हैं कि

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \frac{a_0}{a_n}$$

$$= \frac{1}{100} \ln 10$$

$$= \frac{2.3}{100} \log_{10} 10 = 2.3 \times 10^{-2}$$

क्योंकि

$$b = \lambda / T$$

इसलिए $b = \dfrac{2.3 \times 10^2}{4.6}$

$$= 5 \times 10^{-3} s^{-1}$$

और मान ज्ञात करने के लिए हम (i) को उलट देते हैं।

$$n = \frac{1}{\lambda} \ln (a_0/a)$$

$$= \frac{\ln 2}{2.3} \times 10^{-2}$$

$$= 30$$

3. क्योंकि $\lambda = b\,T = \dfrac{1}{n} \ln \dfrac{a_0}{a_n}$

हम यह लिख सकते हैं

$$= \frac{1}{200} \ln 4\ s^{-1}$$

$$= \frac{2.3 \times .601}{200}\ s^{-1}$$

अतः $\tau = \dfrac{1}{b} = \dfrac{200}{2.3 \times .601} = 72s$

4. $Q = 6 \times 10^4$ और $\upsilon = 512$ Hz

$$\therefore Q = \frac{\tau\,\omega_0}{2} = \pi \upsilon \tau$$

या $\tau = \dfrac{Q}{\pi\upsilon} = \dfrac{6 \times 10^4}{512} = 37.3\ s$

क्योंकि

$$E = E_0 \exp(-2bt) = E_0 \exp(-2t/\tau)$$

इसलिए, $E/E_0 = \frac{1}{10}$ के लिए हमें यह प्राप्त होता है

$$\frac{1}{10} = \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)$$

अतः $t = \frac{\tau}{2}\ln 10$

$$= \frac{37.3}{2} \times 2.3$$

$$= 42.9 \text{ s}$$

5. $L = 2 \times 10^{-3}$ H और $C = 5 \times 10^{-6}$ F

$$\frac{1}{LC} = \frac{1}{2 \times 10^{-3} \times 6 \times 10^{-6}} = 10^8 \text{ s}^{-1}$$

स्थिति I

R = 1 Ω

$$\therefore \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1\ \Omega^2}{4 \times (2 \times 10^{-3})^2\ \text{H}^2} = 6.00 \times 10^4\ \frac{\Omega^2}{\text{H}^2}$$

इस तरह,

$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$ जिससे कि विसर्जन दोलनी होता है, दोलन की आवृत्ति निम्न है

$$\upsilon = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

$$= 1.89 \text{ kHz}$$

और परिपथ का गुणता कारक

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{2 \times 1.59 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-3}}{1}$$

$$= 19.98$$

$$\simeq 20$$

स्थिति II $R = 40\Omega$

इस स्थिति में

$$\frac{R^2}{4L^2} = \frac{40 \times 40\ \Omega^2}{4 \times (2 \times 10^{-3})^2\ \text{H}^2} = 10^8\ \frac{\Omega^2}{\text{H}^2}$$

स्थिति III

$R = 100\Omega$

यहां $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{100^2}{4 \times (2 \times 10^{-3})^2} = 6.25 \times 10^8\ \frac{\Omega^2}{\text{H}^2}$

अर्थात् $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{4L^2}$ यह रूद्ध दोल गति के संगत है।

ध्यान दीजिए कि परिपथ में प्रतिरोध बढ़ाने पर अवमंदन बढ़ जाता है।

6. $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - b^2}} = 4\text{s}$

or

$$\omega_0^2 - b^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

Also

$$\ln \frac{a_0}{a_n} = 10 = b\,t$$

or

$$b = \frac{1}{t} \ln 10$$

$$= \frac{2.3}{465} \log 10 = 0.05\ s^{-1}$$

अतः

$$\omega_0^2 = .0025 + 2.4649$$

$$= 2.467\ s^{-1}$$

$$\omega_0 = 1.57\ s^{-1}$$

और

$$\theta = \frac{\omega_0 \tau}{2} = \frac{\omega_0}{2b} = \frac{1.57}{0.1} = 15.7$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. क्योंकि $\theta = \theta_0\, e^{-bt}$ इसलिए

$$b = \frac{1}{t} \log \frac{\theta_0}{\theta}$$

$$= \frac{1}{40} \log \frac{5}{4}$$

$$= 5\,.\,58 \times 10^{-3}\ S^{-1}$$

और $\tau = \frac{1}{b} = 179.2\ s$

2. क्योंकि $\theta = \omega_0 \tau$ इसलिए

$$\tau = \frac{\theta}{\omega_0} = \frac{4000}{2\pi \times 300} = 4.24\ s$$

अब $a = a_0\, e^{-bt} = a_0\, e^{-t/\tau}$

$$t = \tau \log \frac{a_0}{a} = 4.24 \log_{10}^{2} = 2.94s$$

3. (i) यहाँ $\omega_0 = 2\pi\,\upsilon = 2 \times 3.14 \times 4 = 25\ rad\ s^{-1}$ (If the damping is small)

लेकिन $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ या $k = m\,\omega_0^2 = 1 \times 25^2 = 625\ Nm^{-1}$

(ii) $a = a_0 e^{-bt}$ यहाँ $b = \frac{\log 2}{30} = 0.023\ s^{-1}$

समय अचर $\tau = \frac{1}{b} = \frac{1}{0.023} = 44\ s$

(iii) $Q = \omega_0\tau = 25 \times 44 = 1100$

4. यहां $\frac{1}{LC} = \frac{1}{5 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^{-6}} = 10^8\, s^{-2}$

और $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{(0.2)^2\, \Omega^2}{4 \times (5/10^{-3})^2}\, H^2 = 400 \quad \frac{\Omega^2}{H^2}$

क्योंकि $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$ इसलिए विसर्जन दोलनी होता है।

और इसकी आवृत्ति

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = 1.59 \times 10^3\ \text{Hz}$$

परिपथ का गुणता कारक यह है

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{2 \times 1.59 \times 10^3 \times 5 \times 10^{-3}}{0.2} = 249.8$$

और

$$t = \frac{R}{2L}\ \ln\left(\frac{a}{a_0}\right) = \frac{0.2}{2 \times 5 \times 10^{-3}}\ \log 2 = 13.86\text{s} \simeq 14\ \text{s}$$

विसर्जन ठीक अदोलनी होगा जबकि

$$\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2} \text{ या } R^2 = \frac{4L}{C}$$

$$= \frac{4 \times 5 \times 10^{-3}}{2/10^{-6}} = 10^4 \text{ या } R = 100\,\Omega$$

5. समय t पर अवमंदित सरल आवर्ती दोलक की ऊर्जा यह होती है

$$E = E_0 \exp(-2bt)$$
$$= E_0 \exp(2t/\tau)$$

जहाँ $\tau = b^{-1}$ विश्रांति काल है।

जब $t = \tau/2$ तो $E = \frac{E_0}{e}$ और $Q = \frac{\omega_d \tau}{2}$ इसलिए

$$\tau = \frac{2}{\omega_d} = \frac{2 \times 10^3}{2\pi \times 256\ s^{-1}} = \frac{10^3}{256\pi\ s^{-1}} = 1.24\ \text{s}$$

इस तरह, 0.62 s में ऊर्जा अपने प्रारंभिक मान के $\frac{1}{e}$ हो जाती है।

इस अवधि में ट्यूनिंग फॉर्क द्वारा किए गए दोलनों की संख्या निम्न होती है

$$n = \nu_d \times t$$
$$= 256 \times 0.62$$
$$= 156\ \text{Hz}$$

3.10 शब्दावली

अध्यारोपण	Superposition
अवकल समीकरण	Differential Equation

अवमंदन	Damping
आयाम	Amplitude
आवर्त्त काल	Period
आवेग	Impulse
आवृत्ति	Frequency
कर्षण	Drag
क्रांतिक अवमंदन	Critical Damping
क्षय	Decay
गुणता कारक	Quality Factor
चरघातांकी	Exponential
दुर्बल अवमंदन	Weak Damping
दोलक	Oscillator
दोलन	Oscillation
दोलित्र	Oscillator
धारिता प्रतिघात	Capacitive reactance
निलंबित कुंडल गैल्वेनोमीटर	Suspended Coil Galvanometer
प्रक्षेप गैल्वेनोमीटर	Suspended needle Galvanometer
प्रतिघात	Reactance
प्रतिरोधक	Resistor
प्रत्यानयन बल	Restoring Force
प्रबल अवमंदन	Heavy Damping
प्राचल	Parameter
प्रेरण प्रतिघात	Inductive Reactance
मरोड़ी लोलक	Tortional Pendulum
रुद्ध दोल	Dead Beat
लोलक	Pendulum
विमा	Dimensions
विश्रांति काल	Relaxation Time
श्यान	Viscus
संधारित्र	Capacitor
सरल आवर्त्त गति	Simple Harmonic Motion
साम्यावस्था	Equilibrium