इकाई 2 सरल आवर्त्त दोलन का अध्यारोपण

इकाई की रूपरेखा

2.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में, हमने सरल आवर्त्त गति का अध्ययन किया है और इससे संबंधित भौतिकी विषय की विभिन्न शाखाओं के अनेक उदाहरण पर विचार किया है। वहां हमने यह देखा है कि प्रत्येक स्थिति में गति द्वितीय कोटि के समधान अवकल समीकरण से नियंत्रित होती है (समीकरण 1.3)। इस समीकरण के हल से पिंड के विस्थापन से संबंधित जानकारी हमें समय के एक फलन के रूप में प्राप्त हो जाती है।

ऐसी अनेक स्थितियां आती हैं जहां हमें दो या अधिक सरल आवर्त्त गतियों के संयोजन पर विचार करना होता है । उदाहरण के लिए क्या आप यह जानते हैं कि हमारे कान के पर्दे आवर्त्ती कंपनों के जटिल संयोजन के अन्तर्गत कंपित होते हैं ? इसका परिणामी प्रभाव अध्यारोपण-नियम से प्राप्त होता है।

आपने यह अवश्य देखा होगा कि दोलन करते हुए गोलक को यदि छोड़ दिया जाए तो उसका दोलन धीरे-धीरे रुक जाता है। ऐसा घर्षण और वायु-प्रतिरोध के कारण होता है। इस प्रक्रिया के दौरान तंत्र की ऊर्जा में कमी आती है और तब यह कहा जाता है कि इसकी गति अवमंदित हो गई है। अगली इकाई में हम अवमंदित आवर्त्ती दोलनों के बारे में चर्चा करेंगे।

इस इकाई में पहले हम अध्यारोपण-सिद्धांत पर चर्चा करेंगे और इसके बाद हम यह सीखेंगे कि इस नियम को उन स्थितियों पर किस प्रकार लागू किया जाता है जहां दो (या अधिक) आवर्त्ती दोलन समान रेखा के अनुदिश या लांबिक दिशा में अध्यारोपित होते हैं।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन कर लेने के बाद आप :

- अध्यारोपण-सिद्धांत का कथन दे सकेंगे,
- अध्यारोपण-सिद्धांत को समान रेखा के अनुदिश (क) समान आवृत्ति और (ख) अलग-अलग आवृत्तियों वाले दो आवर्त्ती दोलनों पर लागू कर सकेंगे,
- अनेक सरल आवर्त्ती दोलनों के अध्यारोपण के लिए सदिश योग और संमिश्र संख्याओं की विधियों को प्रयोग कर सकें, और
- अध्यारोपण-नियम को अलग-अलग आवृत्तियों/कलाओं वाले दो पारस्परिक लांबिक आवर्त्ती दोलनों पर लागू कर सकेंगे और लिसाजू की आकृतियों का वर्णन कर सकेंगे।

2.2 अध्यारोपण-नियम (Principle of Superposition)

हम जानते हैं कि जब सरल लोलक (Simple Pendulum) थोड़े आयाम का दोलन कर रहा होता है तो उस समय वह सरल आवर्त्त गति (Simple Harmonic Motion) में होता है। आइए अब हम इस गति पर फिर से विचार करें। मान लीजिए जब गोलक (Bob) का प्रारंभिक विस्थापन a_1 है तो उसे समय $t = 0$ पर छोड़ दिया जाता है। मान लीजिए समय-अंतराल t पर इसका विस्थापन (Displacement) x_1 होता है। इस प्रयोग को हम प्रारंभिक विस्थापन a_2 लेकर फिर से करें। मान लीजिए समान समय-अंतराल t के बाद विस्थापन x_2 हो जाता है। अब, यदि हम पहले दो विस्थापनों के योग अर्थात् $a_1 + a_2$ को प्रारंभिक विस्थापन मान लें तो अध्यारोपण-नियम के अनुसार समान समय-अंतराल t के बाद विस्थापन x_3 निम्न होगा :

$$x_3 = x_1 + x_2$$

आप इस कार्यकलाप को ठीक एक ही प्रकार के तीन सरल लोलक लेकर कर सकते हैं। तीनों लोलकों को एक साथ छोड़िए कि उनके प्रारंभिक वेग शून्य हों और पहले, दूसरे और तीसरे लोलक के विस्थापन क्रमशः a_1, a_2 और $a_1 + a_2$ हों। आप देखेंगे कि समय t पर तीसरे लोलक का विस्थापन a_3 अन्य दो लोलकों के विस्थापनों का बीजीय योग है। सामान्यतः प्रारंभिक वेग शून्य नहीं भी हो सकता। अतः अध्यारोपण-नियम का सिद्धान्त निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है :

यदि हम वेग और आयाम (Amplitude) के संगत प्रारंभिक प्रतिबंधों को अध्यारोपित करें तो दो (या अधिक) आवर्ती विस्थापनों का परिणामी विस्थापन सभी अनुवर्ती समयों पर अलग-अलग विस्थापनों का बीजीय योग होगा।

अब आप यह देखेंगे कि सरल आवर्ती दोलन चाहें कितने ही क्यों न हों, अध्यारोपण-नियम उन सभी पर लागू होता है। ये दोलन समान या परस्पर लांबिक दिशाओं में अर्थात् दो विभाओं (Dimensions) में हो सकते हैं।

इकाई 1 में हमने यह देखा है कि समीकरण (1.3) एक सरल आवर्त्त गति निर्धारित करता है :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x \tag{2.1}$$

यह द्वितीय कोटि का एक रैखिक समघात समीकरण है।

इस प्रकार के समीकरण का एक महत्वपूर्ण गुणधर्म यह होता है कि इसके दो हलों का योग स्वयं एक हल होता है। इस गुणधर्म का प्रयोग हम इकाई 1 में समीकरण (1.4) को लिखते समय कर चुके हैं।

मान लीजिए $x_1(t)$ और $x_2(t)$ क्रमशः समीकरण (2.1) को सन्तुष्ट करते है तब

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\omega_0^2 x_1 \tag{2.2}$$

और

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\omega_0^2 x_2 \tag{2.3}$$

को संतुष्ट करते हैं।

समीकरण (2.2) और (2.3) को जोड़ने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है :

$$\frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} = -\omega_0^2 (x_1 + x_2) \tag{2.4}$$

अध्यारोपण-नियम के अनुसार दो विस्थापनों का योग, निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \tag{2.5}$$

समीकरण (2.5) भी समीकरण (2.1) को संतुष्ट करता है। दूसरे शब्दों में हम यह कह सकते हैं कि दो विस्थापनों का अध्यारोपण उसी रैखिक-समघात अवकल समीकरण को संतुष्ट करता है। जिसे x_1 और x_2 ने अलग-अलग संतुष्ट किया है।

बोध प्रश्न 1

हम जानते हैं कि सरल लोलक का गति-समीकरण निम्नलिखित होता है :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin\theta$$

यदि इस समीकरण में $\sin\theta$ के स्थान पर उसका प्रसार अर्थात्

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{\underline{|3}} + \frac{\theta^5}{\underline{|5}} - \frac{\theta^7}{\underline{|7}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

लिखें तो क्या यह तब भी θ में रैखिक होगा ? यदि आप प्रसार के केवल पहले दो पदों को लें और दो विस्थापनों θ_1 और θ_2 के लिए परिणामी समीकरण लें, तो क्या इस पर अध्यारोपण-नियम लागू किया जा सकता है ? यदि नहीं, तो क्यों ?

आप यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि सरल लोलक के लिए हम केवल लघु दोलन, अर्थात् जब $\sin\theta \simeq \theta$ हो, तब ही अध्यारोपण-नियम लागू कर सकते हैं। यहां हम केवल उन्हीं दोलनों के बारे में अध्ययन करेंगे जिनके विस्थापन रैखिक समघात अवकल समीकरणों को संतुष्ट करते हों और इसीलिए ये अध्यारोपण-सिद्धांत को भी संतुष्ट करते हैं।

2.3 एक ही रेखा के अनुदिश समान आवृत्ति वाले दो आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण

आइए अब हम आयाम a_1 और a_2 वाले ऐसे दो सरेखी (एक ही रेखा के अनुदिश) आवर्त्ती दोलनों को अध्यारोपित करें जिनकी आवृत्ति ω_0 है और कलांतर π इन दोलनों के विस्थापन निम्नलिखित होंगे :

$$x_1 = a_1 \cos\omega_0 t \qquad (2.6)$$

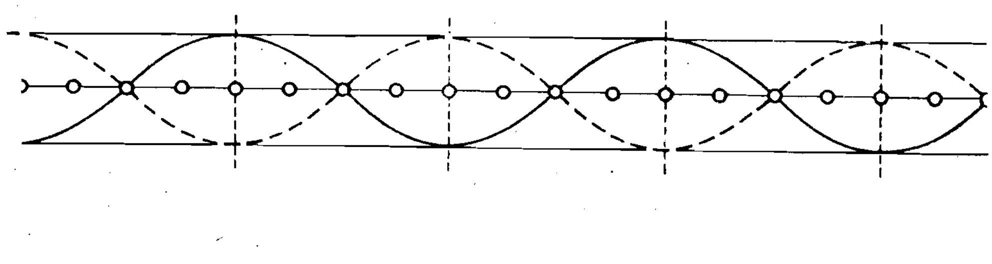
और

$$\begin{aligned} x_2 &= a_2 \cos(\omega_0 t + \pi) \\ &= -a_2 \cos\omega_0 t \qquad (2.7) \end{aligned}$$

अध्यारोपण-नियम के अनुसार परिणामी विस्थापन (Resultant Displacement) यह होगा :

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ &= a_1 \cos\omega_0 t - a_2 \cos\omega_0 t \\ &= (a_1 - a_2)\cos\omega_0 t \qquad (2.8) \end{aligned}$$

यह आयाम $(a_1 - a_2)$ वाली एक सरल आवर्त्त गति को निरूपित करता है। विशेष स्थिति में, यदि आयाम बराबर हों अर्थात् $a_1 = a_2$ तो सभी समयों पर परिणामी विस्थापन शून्य होगा। इस स्थिति को निरूपित करने वाले विस्थापन-समय ग्राफ को चित्र 2.1 में दिखाया गया है।



चित्र 2.1 : समान आयाम पर विपरीत कलाओं वाले दो आवर्त्ती दोलनों का अध्यारोपण

बोध प्रश्न 2

आयाम a_1 और a_2 वाले दो आवर्त्ती दोलन की समान आवृत्ति है और वे एक ही कला में हैं। दिखाइए कि इनके अध्यारोपण से आयाम $a_1 + a_2$ वाला एक आवर्त्ती दोलन प्राप्त होता है।

अब हम दो आवर्त्ती दोलनों के अध्यारोपण की व्यापक स्थिति पर विचार करेंगे। मान लीजिए इनमें से एक दोलन आयाम a_1 और कला ϕ_1 वाला है। और दूसरा दोलन आयाम a_2 और कला ϕ_2 वाला है। दोनों दोलन की आवृत्ति ω_0 है और वे सरेख (Co-linear) हैं अर्थात् एक ही रेखा में हैं। तब, हम यह लिख सकते हैं कि—

$$x_1(t) = a_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1) \tag{2.9}$$

और

$$x_2(t) = a_2 \cos(\omega_0 t + \phi_2) \tag{2.10}$$

अध्यारोपण-नियम के अनुसार परिणामी विस्थापन x_1 और x_2 का योग होता है और

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = a_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1) + a_2 \cos(\omega_0 t + \phi_2)$$

$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

दो कोण के योग के कोसाइन के व्यंजक का प्रयोग करके इसे निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है—

$$x(t) = a_1 \cos \omega_0 t \cos \phi_1 - a_1 \sin \omega_0 t \sin \phi_1 + a_2 \cos \omega_0 t \cos \phi_2 - a_2 \sin \omega_0 t \sin \phi_2$$

ऊपर वाले समीकरण में $\cos \omega_0 t$ और $\sin \omega_0 t$ के गुणांकों को इकट्ठा कर लेने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है—

$$x(t) = (a_1 \cos \phi_1 + a_2 \cos \phi_2) \cos \omega_0 t - (a_1 \sin \phi_1 + a_2 \sin \phi_2) \sin \omega_0 t \tag{2.11}$$

क्योंकि a_1, a_2, ϕ_1 और ϕ_2 अचर हैं, इसलिए हम ऐसा मान सकते हैं कि

$$a \cos \phi = a_1 \cos \phi_1 + a_2 \cos \phi_2 \tag{2.12}$$

$$a \sin \phi = a_1 \sin \phi_1 + a_2 \sin \phi_2 \tag{2.13}$$

जहाँ a और ϕ के मान ज्ञात करना है। तब, समीकरण (2.11) को हम निम्न रूप में लिख सकते हैं —

$$x(t) = a \cos \phi \cos \omega_0 t - a \sin \phi \sin \omega_0 t$$

यह दो कोणों के अंतर के कोसाइन के रूप का है, अतः इसे —

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t + \phi) \tag{2.14}$$

के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

यह समीकरण भी उसी रूप का है जो कि अलग-अलग आवर्त्ती दोलन के मूल समीकरण का था। अतः हमें यह महत्वपूर्ण परिणाम प्राप्त होता है : *समान आवृत्ति वाले दो सरेख आवर्त्ती दोलनों का योगफल भी समान रेखा के अनुदिश के समान आवृत्ति वाला एक आवर्त्ती दोलन होता है।* पर इसका एक नया आयाम a और एक कला नियंताक θ है । समीकरण (2.12) और समीकरण (2.13) को वर्ग करके और परिणामी व्यंजकों को जोड़कर आयाम आसानी से ज्ञात किया जा सकता है। सरल करने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है —

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \tag{2.15}$$

इसी प्रकार, समीकरण (2.13) को समीकरण (2.12) से भाग देने पर कला θ प्राप्त हो जाती है

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{a_1 \sin \phi_1 + a_2 \sin \phi}{a_1 \cos \phi_1 + a_2 \cos \phi} \right) \tag{2.16}$$

बोध प्रश्न 3

दो आवर्त्ती दोलनों की कलाएं निम्नलिखित हैं —

(क) $\phi_1 - \phi_2 = 2n\pi$

और

(ख) $\phi_1 - \phi_2 = (2n + 1)\pi$.

जहां n एक पूर्णांक है, समीकरण (2.15) की सहायता से यह दिखाइए कि परिणामी दोलनों के आयाम क्रमशः $(a_1 + a_2)$ और $(a_2 - a_2)$ हैं।

बोध प्रश्न 4

आवृत्ति ω_0 वाले दो आवर्त्ती दोलन, जिनका आयाम 1 सें·मी· है और प्रारंभिक कलाएं क्रमशः 0 और $\pi/2$ हैं, अध्यारोपित हैं। परिणामी कंपन का आयाम और कला ज्ञात कीजिए।

2.4 अलग-अलग आवृत्तियों वाले दो सरेख आवर्त्ती दोलनों का अध्यारोपण

अनेक स्थितियों में हमें अलग-अलग कोणीय आवृत्तियों वाले दो या अधिक आवर्त्ती दोलनों के अध्यारोपण के बारे में जानकारी प्राप्त करनी होती है। उदाहरण के लिए माइक्रोफोन के डायग्राम और मनुष्य के कान के पर्दे पर एक साथ विभिन्न कंपन दिए जाते हैं। सरलता के लिए पहले हम थोड़ा अलग-अलग आवृत्तियों ω_1 और ω_2 जहाँ $\omega_1 > \omega_2$ और समान आयाम वाले दो आवर्त्ती दोलनों के अध्यारोपण पर विचार करेंगे।

$$x_1 = a\cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

और

$$x_2 = a\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

यहाँ, इन दो आवर्त्ती कंपनों के बीच कलांतर (Phase Difference) यह है —

$$\phi = (\omega_1 - \omega_2)\,t + (\phi_1 - \phi_2)$$

पहले पद अर्थात् $(\omega_1 - \omega_2)\,t$ में समय के साथ लगातार परिवर्तन होता रहता है, जबकि दूसरा पद अर्थात् $(\phi_1 - \phi_2)$ समय के साथ अचर रहता है और इसलिए यहाँ उसकी कोई विशेष भूमिका नहीं होती। अतः हम यह मान सकते हैं कि दो दोलनों की प्रारंभिक कला शून्य है। तब दो आवर्ती दोलनों को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है —

$$x_1(t) = a\cos\omega_1 t$$

और

$$x_2(t) = a\cos\omega_2 t \tag{2.17}$$

दो दोलनों के अध्यारोपण से निम्नलिखित परिणामी प्राप्त होता है —

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = a(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) \tag{2.18}$$

(C + D) सूत्र का प्रयोग करके इस समीकरण को एक विशेष सरल रूप में लिखा जा सकता है —

$$x(t) = 2a\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t\,\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t \tag{2.19}$$

$\cos C + \cos D$
$= 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$

यह कोणीय आवृत्ति $\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{t}\right)$ और आयाम $2a\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t$ वाली एक दोलायमान गति है।

आइए अब हम मान लें कि औसत कोणीय आवृत्ति

$$\omega_{av} = \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} \qquad (2.20\ \text{क})$$

है और माडुलित कोणीय आवृत्ति

$$\omega_{mod} = \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2} \qquad (2.20\ \text{ख})$$

तब हम यह पाते हैं कि माडुलित आयाम

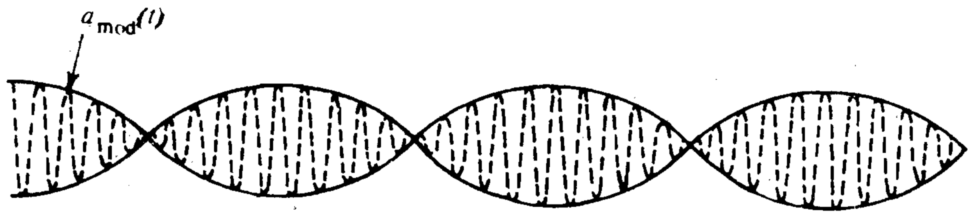
$$a_{mod}(t) = 2a \cos 2\,\omega_{mod}\, t \qquad (2.20\ ग)$$

आवृत्ति $\frac{\omega_{mod}}{2\pi} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{4\pi}$ के अनुसार बदलता रहता है।

इससे यह भी पता चलता है कि एक पूर्ण चक्र में माडुलित आयाम $\omega_{mod}(t) = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ और 2π के लिए माडुलित आयाम के मान क्रमशः $2a, 0, -2a, 0$ और $2a$ हैं। परिणामी दोलन को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है —

$$x(t) = a_{mod}(t) \cos \omega_{av} t \qquad (2.21)$$

यह समीकरण सरल आवर्त्त गति के समीकरण से मिलता-जुलता है। क्या यह समीकरण सरल आवर्त्त गति को निरूपित करता है ? इसका उत्तर है नहीं, क्योंकि इसके आयाम में समय के साथ परिवर्तन होता रहता है।



चित्र 2.2 : अलग-अलग आवृत्तियों वाले दो सरेख आवर्त्ती दोलनों का अध्यारोपण

अलग-अलग आवृत्तियों वाले दो सरेख आवर्त्ती दोलनों के परिणामी को दर्शाने वाला विस्थापन समय ग्राफ चित्र 2.2 में दिखाया गया है। यहाँ आप देखेंगे कि प्रत्येक दोलन स्वयं में तो आवर्त्ती है पर उनके अध्यारोपण में समय के साथ परिवर्तन होता रहता है, अतः यह आवर्त्ती तो है पर सरल आवर्त्त गति में नहीं है।

व्यापक स्थिति में हम a_1 और a_2 आयामों तथा ω_1 और ω_2 आवृत्तियों वाले दो आवर्त्ती दोलन लेते हैं। यदि उनकी प्रारंभिक कलाएँ शून्य हो, तो परिणामी दोलन को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है —

$$x(t) = a_{mod}(t) \cos (\omega_{av} t + \theta_{mod}) \qquad (2.22)$$

माडुलित आयाम और कला क्रमशः निम्नलिखित हैं —

$$a_{mod}(t) = [a_1 + a_2 + 2a_1 a_2 \cos (2\,\omega_{mod}\, t)]^{1/2} \qquad (2.23)$$

और

$$\theta_{mod} = \frac{(a_1 - a_2) \sin \theta_{mod}\, t}{(a_1 + a_2) \cos \theta_{mod}\, t} \qquad (2.24)$$

आप देख सकते हैं कि यदि $a_1 = a_2$ हो तो $a_{mod}(t)$ का व्यंजक समीकरण (2.20 ग) हो जाता है। यदि ω_1 और ω_2 लगभग बराबर हों, तो ω_{mod}, ω_{av} से काफी कम होगा और माडुलित आयाम में समय के साथ बहुत थोड़ा परिवर्तन होगा। अर्थात् $\omega_{mod} \leq \omega_{av}$ के लिए $a_{mod}(t)$ को आवर्त्त $2\pi/\omega_{av}$ पर अनिवार्यतः अचर माना जा सकता है। इस स्थिति में समीकरण कोणीय आवृत्ति ω_{av} वाले एक लगभग आवर्त्ती दोलन को निरूपित करेगा।

परिणामी गति का आयाम तब अधिकतम ($= a_1 + a_2$) होता है जबकि

$$\cos 2\,\omega_{mod}\, t = +1$$

या $2\,\omega_{mod}\, t = 0, 2\pi, 4\pi.......2n\pi \quad n = 0, 1, 2.....$

या $(\omega_1 - \omega_2)t = 0, 2\pi, ...2n\pi \quad n = 0, 1, 2.....$

$$\text{या } t = 0, \frac{1}{(\nu_1 - \nu_2)}, \frac{3}{(\nu_1 - \nu_2)}, ..., \frac{n}{(\nu_1 - \nu_2)} \qquad (2.25)$$

जहाँ $\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$ और $\nu_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}$ दो आवृत्त दोलनों की आवृत्तियाँ हैं।

इसी प्रकार, आप यह देखेंगे कि परिणामी दोलन का आयाम तब निम्नतम ($= a_1 - a_2$) होता है जबकि

$$\cos 2\,\omega_{mod}\, t = -1$$

या जबकि

$$t = \frac{1}{2(\nu_1 - \nu_2)}, \frac{3}{2(\nu_1 - \nu_2)}, \frac{5}{2(\nu_1 - \nu_2)} \qquad (2.26)$$

2.5 समान आवृत्ति वाले अनेक आवर्त्ती दोलनों का अध्यारोपण

पिछले भाग में हम दो सरेख आवर्त्ती दोलनों के अध्यारोपण के बारे में चर्चा कर चुके हैं। अब प्रश्न यह उठता है कि हम किस प्रकार अनेक आवर्त्ती दोलनों का परिणामी प्राप्त करेंगे ? संभवतः आपका विचार यह हो सकता है कि भाग 2·3 में बताई गई प्रक्रिया को यहाँ भी लागू कर देना एक विधि हो सकती है। पर हम यह पाते हैं कि सरल होने के बावजूद भी गणितीय विश्लेषण अपर्याप्त रहता है। ऐसी स्थिति में एक सुविधाजनक विधि सदिश विश्लेषण (Vector Analysis) या संमिश्र संख्या (Complex Analysis) विधि को लागू करना है।

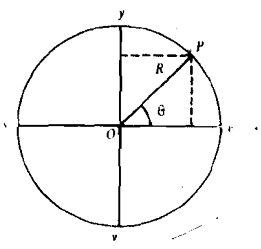
2.5.1 सदिश योग की विधि

यह विधि इस तथ्य पर आधारित है कि आवर्त्ती दोलन का विस्थापन वृत्त के व्यास पर एक समान वृत्तीय गति का प्रक्षेप (Projection) होता है।

सरल आवर्त्त गति और एक समान वर्त्तीय गति

इसे समझने के लिए आइए हम यह मान लें कि एक कण अचर चाल θ से एक वृत्त में गतिमान है (चित्र 2.3), वृत्त के केन्द्र और परिधि पर कण की स्थिति को मिलाने वाली ध्रुवांतर रेखा (Radius Vector) अचर कोणीय आवृत्ति से घूर्णन करेगी। हम $t = 0$ पर ध्रुवांतर रेखा की दिशा को x- अक्ष मान लेते हैं। तब समय t पर x- अक्ष के साथ ध्रुवांतर रेखा द्वारा बनाया गया कोण यह होगा —

$$\theta = \frac{\text{चाप की लम्बाई}}{\text{वृत की त्रिज्या}} = \frac{v t}{R}$$



चित्र 2.3: एक समान वृत्तीय गति और सरल आवर्त्त गति

समय t पर कण की स्थिति के x-घटक और y- घटक ये होंगे

$$x = R\cos\theta$$

और

$$y = R\sin\theta$$

इस तरह, $\frac{dx}{dt} = -R\sin\theta.\ \frac{d\theta}{dt}$

$$= -\omega_0 R\ \sin\theta$$

क्योंकि $\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 = \frac{v}{R}$

इसी प्रकार,

$$\frac{dy}{dt} = R\cos\theta\ .\ \frac{d\theta}{dt}$$

$$= \omega_0 R\ \ \cos\theta$$

इन्हें समय के सापेक्ष पुनः अवकलित करने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है —

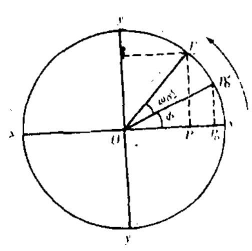
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x \qquad (2.27\ क\ )$$

और

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega_0^2 y \qquad (2.27\ ख\ )$$

इन व्यंजकों को देखने से यह पता चलता है कि जब कण एक वृत्त में एक-समान गति से गतिमान होता है तो x– अक्ष और y– अक्ष के अनुदिश इसके प्रक्षेप सरल आवर्त्त गति में दोलित होते हैं। दूसरे शब्दों में, *हम यह कह सकते हैं कि एक सरल आवर्त गति को एक निर्देश अक्ष (Reference Axis) पर एक-समान रूप से घूर्णन कर रहे सदिश का प्रक्षेप माना जा सकता है।*

मान लीजिए सदिश **OP′** जहाँ $|\mathbf{OP'}| = a_0$ कोणीय आवृत्ति ω_0 से एक वामागर्त दिशा (Anticlockwise Direction) में घूर्णन कर रहा है, जैसाकि चित्र 2.4 में दिखाया गया है। मान लीजिए P′ बिन्दु से x- अक्ष पर डाले गए लंब का पाद-बिन्दु है, इसलिए तब $|\mathbf{OP'}| = x$, x- अक्ष पर **OP′** का प्रक्षेप होगा। और क्योंकि सदिश **OP′** अचर चाल से घूर्णन करता है, इसलिए बिन्दु P, x- अक्ष के अनुदिश सरल आवर्त्त गति में दोलन करेगा। इस दोलन का आवर्त्त काल (Period) घूर्णन कर रहे सदिश **OP′** के आवर्त्त काल के बराबर होगा। मान लीजिए $\mathbf{OP'_0}$ घूर्णन कर रहे सदिश की प्रारंभिक स्थिति है। x- अक्ष पर इसका प्रक्षेप $\mathbf{OP_0}$, $a_0\cos\phi$ है (चित्र 2.4क)। यदि समय t में घूर्णन कर रहा यह सदिश $\mathbf{OP'_0}$ से हटकर **OP′** पर आ जाता है, तो $\angle \mathbf{P'OP'_0} = \omega_0 t$ और $\angle \mathbf{P'OX} = (\omega_0 t + \phi)$



चित्र 2.4 : (क) वृत्त के व्यासों के अनुदिश घूर्णन कर रहे सदिश के प्रक्षेप

अतः

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OP'}\ \cos\ \angle\mathbf{P'OX}$$

या $\quad x = a_0\cos(\omega_0 t + \phi) \qquad (2.28\ क\ )$

इस तरह हम यह पाते हैं कि बिन्दु **P**, x- अक्ष के अनुदिश एक सरल आवर्त्त गति में दोलन करता है।

यदि आप $\mathbf{OP}'$ को y- अक्ष पर प्रक्षिप्त करें तो आप पाएंगे कि अभिलंब के पाद-बिन्दु का संगत बिन्दु निम्नलिखित समीकरण को संतुष्ट करता है —

$$y = a_0 \sin (\omega_0 t + \phi) \qquad (2.28 \text{ ख})$$

इससे यह अर्थ निकलता है कि सामान्यतः एक घूर्णन कर रहे सदिश को दो लांबिक घटकों (Original Components) में नियोजित किया जा सकता है और अब हम इसे इस प्रकार लिख सकते हैं —

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{x} + y\,\mathbf{y} \qquad (2.29)$$

जहाँ $\mathbf{x}$ और $\mathbf{y}$ क्रमशः x– अक्ष और y– अक्ष के अनुदिश एकक सदिश (Unit Vector) हैं।

सदिश योग

आइए अब हम समान आयाम a_0 और समान कोणीय आवृत्ति ω_0 वाले n आवर्ती दोलनों के अध्यारोपण पर विचार करें। उत्तरोत्तर दोलनों की प्रारंभिक कलाओं में ϕ_0 का अंतर है। मान लीजिए इन दोलनों में से पहले दोलन का समीकरण यह है —

$$x_1(t) = a_0 \cos \omega_0 t$$

तब अन्य दोलनों के समीकरण ये होंगे —

$$x_2(t) = a_0 \cos (\omega_0 t + \phi_0)$$

$$x_3(t) = a_0 \cos (\omega_0 t + 2\phi_0)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

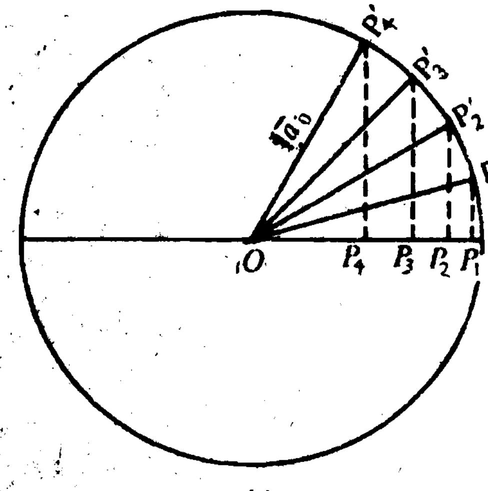
$$x_n(t) = a_0 \cos [\omega_0 t + (n-1)\phi_0] \qquad (2.30)$$

अध्यारोपण-नियम के अनुसार परिणामी दोलन का समीकरण यह होगा —

$$x(t) = a_0[\cos \omega_0 t + \cos (\omega_0 t + \phi_0) + \cos (\omega_0 t + 2\phi_0) + \ldots\ldots + \cos\{\omega_0 t + (n-1)\phi_0\}] \qquad (2.31)$$

आइए अब हम समीकरण (2.31) में दिए गए आवर्ती दोलन को घूर्णन कर रहे सदिश $\mathbf{OP_1}$, $\mathbf{OP_2}$, $\mathbf{OP_3}$, के प्रक्षेप से प्रकट करें (चित्र 2.4 ख)।

जब किसी सदिश राशि को उसके समान्तर दूसरी जगह हटाया जाता है, तब इस सदिश राशि पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता।

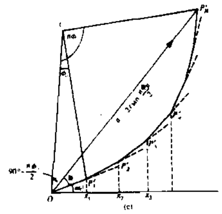


(b)

चित्र 2.4 : (ख) घूर्णन कर रहे सदिश $\mathbf{OP_1}'$, $\mathbf{OP_2}'$, $\mathbf{OP_3}'$ का प्रक्षेप

इन सदिशों का परिणामी प्राप्त करने के लिए इंन्हें स्वयं के समांतर इस तरह स्थानांतरित करते हैं कि पहले सदिश का शीर्ष दूसरे सदिश के पुच्छ के साथ संपाती हो, आदि। ऐसा करने पर आप यह पाएंगे कि —

(i) सदिशों को इस तरह जोड़ने पर ये सदिश n- भुजा वाले एक अपूर्ण बहुभुज की उत्तरोत्तर भुजाएं होते हैं, (चित्र 2.4 ग)।



(ग) समान आयाम और उत्तरोतर दोलनों के बीच नियत कलांतर ϕ_0 वाले N– आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण

(ii) $\mathbf{OP_1} \parallel \mathbf{OP_1'}$, $\mathbf{P_1' P_2'} \parallel \mathbf{OP_2'}$, $\mathbf{P_2' P_3'} \parallel \mathbf{OP'_3}$ आदि, आदि।

आइए अब हम इनमें से प्रत्येक सदिश को x-अक्ष के अनुदिश प्रक्षिप्त करें। तब,

$$x_1 = \text{प्रक्षेप } (\mathbf{OP_1'})_x = a_0 \cos \omega_0 t$$

$$x_2 = \text{प्रक्षेप } (\mathbf{P_1' P_2'})_x = a_0 \cos (\omega_0 t + \phi_0)$$

$$x_3 = \text{प्रक्षेप } (\mathbf{P_2' P_3'})_x = a_0 \cos (\omega_0 t + 2\phi_0)$$

,
,
,
,

$$x_n = \text{प्रक्षेप } (\mathbf{P_{n-1}' P_n'}) = a_0 \cos\{\omega_0 t + (n-1)\phi_0\}$$

सदिश योग-नियम से यह पता चलता है कि $\mathbf{OP_1'}, \mathbf{P_1' P_2'}, \mathbf{P_2' P_3'}$, का परिणामी सदिश $\mathbf{OP'_n}$ है, अर्थात्

$$\mathbf{OP_n'} = \mathbf{OP_1'} + \mathbf{P_1'P_2'} + \mathbf{P_2' P_3'} + ... + \mathbf{P_{n-1}' P_n'}$$

इस तरह,

प्रक्षेप $(\mathbf{OP_n'})_x$ = प्रक्षेप $(\mathbf{OP_1'})_x$ + प्रक्षेप $(\mathbf{P_1' P_2'})_x + ...$

या $\quad x = x_1 + x_2 + ...$

मान लीजिए $\mathbf{OP'_n}$ की लंबाई a है और प्रथम सदिश के सापेक्ष इसकी कला ϕ है। तब x- अक्ष के अनुदिश $\mathbf{OP_n}$ का प्रक्षेप यह निम्न होगा —

$$x(t) = \text{प्रक्षेप } (\mathbf{OP_n'})x = a \cos (\omega_0 t + \phi) \tag{2.32}$$

एक वृत्त अनन्त समान भुजाओं वाला बहुभुज है।

इस तरह हम यह पाते हैं कि समीकरण (2.31) में दिए गए योग का अर्थ है परिणामी सदिश $\mathbf{OP'_n}$ को अभिलक्षित करने वाले a और ϕ के मान ज्ञात करना। हम जानते हैं कि एक वृत्त के अंतर्गत एक समबहुभुज (Regular Polygon) खींचा जा सकता है। अतः इस बहुभुज के शीर्ष त्रिज्या r वाले वृत्त पर स्थित होंगे जैसाकि चित्र 2.4 ख में दिखाया गया है। अलग-अलग सदिशों द्वारा वृत्त के केन्द्र C पर अंतरित किया गया कोण ϕ_0 के बराबर होगा। अतः परिणामी सदिश $\mathbf{OP'_n}$ द्वारा केन्द्र C पर अंतरित किया गया संपूर्ण कोण $n\phi_0$ होगा। त्रिभुज OCP'_n से हम यह पाते हैं कि

$$a = \sqrt{2r^2 - 2r^2 \cos n\phi_0}$$

त्रिकोणमितीय संबंध $\cos 2\phi = 1 - 2\sin^2\phi$ का प्रयोग करने और परिणामी व्यंजक को सरल करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है —

$$a = 2r \sin (n\phi_0/2) \tag{2.33 क}$$

इसी प्रकार हम यह दिखा सकते हैं कि

$$a_0 = 2r \sin \phi_0/2 \tag{2.33 ख}$$

समीकरण (2.33 (क)) और समीकरण (2.33 (ख)) को एक साथ लेकर हम यह लिख सकते हैं —

$$a = a_0 \frac{\sin n\,\phi_0/2}{\sin \phi_0/2} \qquad (2.34)$$

प्रथम दोलन के सापेक्ष परिणामी दोलन का कलांतर ϕ यह होगा —

$$\phi = \angle COP_1' - \angle COP_n' \qquad (2.35)$$

. समद्विबाहु त्रिभुज COP_1 में

$$\angle OCP_1' = \phi_0 \text{ और } \angle OP_1'C = \pi/2$$

क्योंकि त्रिभुज के कोणों का जोड़ π के बराबर होता है,

$$\therefore \angle COP_1' = \pi - \angle OP_1'C - \angle OCP_1'$$

$$= \pi - \frac{\pi}{2} - \phi_0$$

$$= \frac{\pi}{2} - \phi_0 \qquad (2.36\text{ क})$$

इसी प्रकार, समद्विबाहु त्रिभुज COP_n' में $\angle OCP_n = n\,\phi_0$

और $\angle COP_n' = \angle CP_n'O$

इसलिए $2\angle COP_n' = \pi - n\,\phi_0$

या $\angle COP_0' = \pi/2 - n\,\phi_0/2 \qquad (2.36\text{ ख})$

अतः समीकरण (2.35) और समीकरण (2.36) को एक साथ लेने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है —

$$\phi = (\pi/2 - \phi_0) - (\pi/2 - n\,\phi_0/2) = (n-1)\,\phi_0/2 \qquad (2.37)$$

अर्थात्, परिणामी दोलन की प्रारंभिक कला n वें और प्रथम ध्रुवांतर रेखाओं (दोलनों) के कलांतर के आधे के बराबर होता है। अतः

$$a_0 \frac{\sin (n\,\phi_0/2)}{\sin (\phi_0/2)} \cos [\omega_0 t + (n-1)\ \frac{\phi_0}{2}] \qquad (2.38)$$

अगले उप-भाग में हम इस परिणाम को संमिश्र संख्याओं की विधि लागू करके प्राप्त करेंगे। फिलहाल, आइए हम समीकरण (2.38) से परिभाषित परिणामी दोलन के आयाम के बारे में विचार करें :

$$a = a_0 \frac{\sin n\,\phi_0/2}{\sin \phi_0/2}$$

यहां आप यह पाते हैं कि a का मान ϕ_0 के मान पर निर्भर करता है। जब a बहुत बड़ा होता है तो ϕ बहुत छोटा हो जाता है। तब समीकरण (2.37) का प्रयोग करके हम यह लिख सकते हैं —

$$\phi = (n-1)\,\phi_0/2 \simeq \frac{n\,\phi_0}{2}$$

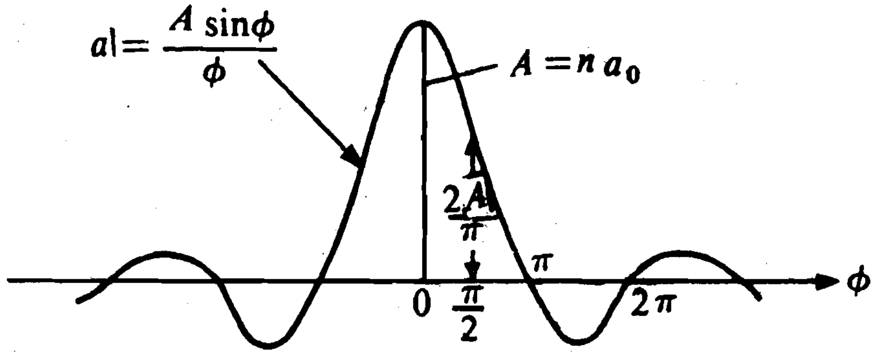
जिससे कि $\sin \phi_0/2 \rightarrow \frac{\phi_0}{2} \simeq \frac{\phi}{n}$

अतः वृहत् की सीमा में

$$a = a_0 \frac{\sin \phi}{\frac{\phi}{n}} = n\,a_0 \frac{\sin \phi}{\phi}$$

$$= A \frac{\sin \phi}{\phi}$$

अर्थात् बहुभुज उस वृत्त के एक माप के रूप का हो जाता है जिसका केन्द्र O पर है और लंबाई $n\, a_0 = A$ जहां a जीवा है। चित्र 2.5 में $\sin\phi/\phi$ और ϕ के बीच व्यवहार को दिखाया गया है।



चित्र 2.5: $A\frac{\sin\phi}{\phi}$ और ϕ का आलेख

यह प्रतिरूप $\phi = 0$ के प्रति सममित है और शून्य होता है जब ($\phi \to 0$ को छोड़कर) $\sin\phi = 0$ हो। जब $\phi_0 = 0$ और n दोलनों (सदिशों) का परिणामी, लंबाई A वाली एक सरल रेखा होती है। ϕ_0 के मान में वृद्धि होने पर $\phi = \pi/_2$ पर A वृत्त का चाप हो जाता है, जब तक अंतिम और प्रथम दोलन कला में नहीं होते। और चाप A एक अर्धवृत्त बन जाता है। जिसका व्यास परिणामी a होता है। कोण ϕ में और अधिक वृद्धि होने पर लंबाई A शुन्य परिणामी वाले वृत्त ($\theta = \pi$) की परिधि के बराबर हो जाती है, आदि।

बोध प्रश्न 5

$x_1 = 4\ \cos 2\pi t, x_2 = 4 \cos (2\pi t + \pi/3)$

$x_3 = 4 \cos \left(2\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$ से नियमित तीन सरेख आवर्त्ती दोलन अध्यारोपित हैं। परिणामी कंपन का आयाम और कला ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

2.5.2 संमिश्र संख्याओं की विधि

पिछले भाग में हमने अध्यारोपित आवर्त्ती दोलनों का परिणामी प्राप्त करने के लिए सदिश योग की ज्यामितीय विधि का प्रयोग किया था। इसी परिणाम को संमिश्र संख्याओं की विधि लागू करके एक अति सुविधाजनक और संक्षिप्त रूप में हम प्राप्त कर सकते हैं। इस विधि का जैसे-जैसे अध्ययन करते जाएंगे, आप पाएंगे कि संमिश्र संख्याओं के प्रयोग से गणितीय परिकलन काफी सरल हो जाता है। हम जानते हैं कि संमिश्र संख्या संकेतन पद्धति में सदिश को $z = a \exp [i (\omega_0 t + \phi)]$ के रूप में निरूपित किया जा सकता है जहाँ संमिश्र चारघातांकों की $\exp (i\, \theta)$ निम्न होती है —

$$\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$$

जिससे कि $\cos\theta = \mathrm{Re}\,[\exp(i\theta)]$

और $\sin\theta = \mathrm{Im}\,[\exp(i\theta)]$

आइए अब हम यह देखें कि किस प्रकार संमिश्र संख्याओं की इस विधि का प्रयोग समीकरण (2.30) द्वारा दिए गए n आवर्त्ती दोलनों का परिणामी प्राप्त करने में किया जाता है। संमिश्र चरघातांकों की संकेतन पद्धति में हम निम्नलिखित लिख सकते हैं –

$$z_1 = a_0 \exp(i\,\omega_0 t)$$

$$z_2 = a_0 \exp[i(\omega_0 t + \phi)]$$

$$z_3 = a_0 \exp[i(\omega_0 t + 2\phi_0)] \tag{2.40}$$

अध्यारोपण-नियम के अनुसार परिणामी यह होता है –

$$z = a_0 e^{i\omega_0 t} + a_0 e^{i(\omega_0 t + \phi_0)} + \ldots\ldots\ldots + a_0 e^{i(\omega_0 t + (n-1)\phi_0}$$

$$= a\, e^{i\omega_0 t}\,[1 + e^{i\phi_0} + e^{2i\phi_0} + \ldots\ldots + e^{i(n-1)\phi_0}]$$

यह श्रेणी गुणोत्तर श्रेणी है जिसका सार्व अनुपात $e^{i\phi_0}$ है। इसका योग यह होता है–

$$z = a_0 \exp(i\,\omega_0 t)\ \frac{1 - e^{in\phi_0}}{1 - e^{i\phi_0}} \tag{2.41}$$

$$= a_0 \exp(i\omega_0 t)\ \frac{e^{in\phi_0/2}\,(e^{-i\phi_0 n/2} - e^{in\phi_0/2})}{e^{i\phi_0/2}\,(e^{-i\phi_0/2} - e^{i\phi_0/2})}$$

संबंध $\sin\theta = \dfrac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2}$ का प्रयोग करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है —

$$z = a_0 \exp(i\omega_0 t)\ \frac{\sin n\phi_0/2}{\sin\phi_0/2}\ e^{in\phi_0/2}\, e^{-i\phi_0/2}$$

$$= a_0 \exp(i\omega_0 t)\ \frac{\sin(n\phi_0/2)}{\sin\phi_0/2}\ e^{i(n-1)\phi_0/2}$$

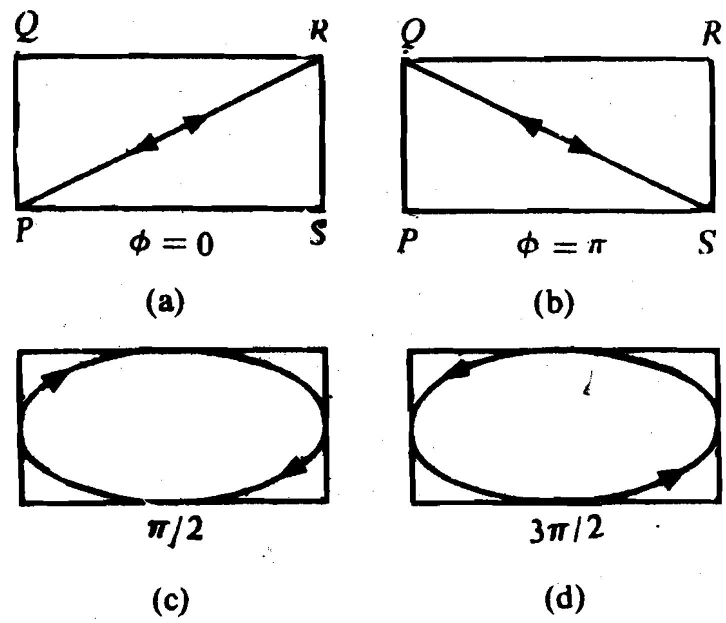
क्योंकि $z = a\exp[i(\omega_0 t + \phi)$ इसलिए परिणामी कंपन के आयाम और कला वही होंगे जो कि क्रमशः समीकरण 2.34 और समीकरण 2.37 में दिए गए हैं।

परिणामी दोलन का कोसाइन रूप समीकरण 2.42 के वास्तविक भाग लेकर प्राप्त किया जाता है।

2.6 दो विभाओं में दोलन

अभी तक हमने अपनी चर्चा एक नियम में हो रहे आवर्त्ती दोलन तक ही सीमित रखी थी। पर, दोलायमान गति दो विभाओं में भी हो सकती है। सरल लोलक की गति इसका एक सुपरिचित उदाहरण है जिसमें गोलक x–y समतल में किसी भी दिशा में घुमने के लिए मुक्त होता है। इस विन्यास को हम *गोलीय लोलक* (Spherical Pendulum) कहते हैं। इसमें हम लोलक को x दिशा में विस्थापित करते हैं और जब उसे छोड़ते हैं तब हम उसे y दिशा में एक आवेग (Impulse) प्रदान करते हैं। अब प्रश्न यह उठता है कि जब यह लोलक दोलन करता है तब क्या होता है ? परिणाम एक संयुक्त गति होता है जिसका अधिकतम विस्थापन तब होता है जब y- विस्थापन शून्य हो और y- वेग अधिकतम हो। इसका विलोम भी सही होता है। हम जानते हैं कि लोलक का आवर्त्त काल गुरुत्व-त्वरण (Acceleration due to Gravity) और वृत्त खंड को जोड़ने वाली रेखा त्रिज्या की लंबाई पर निर्भर करता है, अतः अध्यारोपित सरल आवर्त्त गति की आवृत्ति समान

होती है। परिणाम एक वक्र पथ होता है जो सामान्यतः दीर्घवृत्त होता है (चित्र 2.6)।



चित्र 2.6 : समान आवृत्ति वाले दो परस्पर लांबिक आवर्त्ती दोलनों का अध्यारोपण जब कलांतर (क) $\phi = 0$, (ख) $\phi = \pi$ (ग) $\phi = \pi/2$ (घ) $\phi = 3\pi/2$ हो

अब हम अध्यारोपण-नियम को उस स्थिति में लागू करेंगे जहाँ दो आवर्त्ती दोलन परस्पर लंब होते हैं।

2.6.1 समान आवृत्ति वाले दो परस्पर लांबिक आवर्त्ती दोलनों का अध्यारोपण

आयाम a_1 और a_2 जहाँ $a_1 < a_2$ और कोणीय आवृत्ति ω_0 वाले दो परस्पर लांबिक दोलन लीजिए। इन्हें निम्नलिखित समीकरण के रूप में व्यक्त किया जाता है :

$$x = a_1 \cos \omega_0 t \tag{2.43}$$

और
$$y = a_2 \cos (\omega_0 t + \phi) \tag{2.44}$$

यहाँ x- अक्ष और y- अक्ष के अनुदिश प्रारंभिक कलाएं क्रमशः 0 और ϕ हैं। अर्थात् दो कंपनों के बीच का कलांतर ϕ है।

पहले हम कलांतर ϕ के कुछ विशेष मानों के लिए परिणामी दोलन प्राप्त करेंगे।

स्थिति I : $\phi = 0$ या π

क्योंकि $\phi = 0$ पर

$$x = a_1 \cos \omega_0 t$$

और
$$y = a_2 \cos \omega_0 t \tag{2.45}$$

इसलिए $\dfrac{y}{x} = \dfrac{a_2}{a_1}$

या
$$y = \left(\frac{a_2}{a_1}\right) x$$

इसी प्रकार $\theta = \pi$ पर

एक सरल रेखा की समीकरण
$y = mx+c$
है। जहाँ m रेखा की प्रवणता है और C रेखा की y-अक्ष पर काट हैं।

$$x = a_1 \cos \omega_0 t$$

और $$y = -a_2 \cos \omega_0 t$$

जिससे कि $$y = -(a_2/a_1)\, x \tag{2.46}$$

समीकरण 2.45 और समीकरण 2.46 मूल बिन्दु से होकर जाने वाली सरल रेखाएं निरूपित करते हैं। इससे यह अर्थ निकलता है कि कल की परिणामी गति एक सरल रेखा के अनुदिश है। फिर भी, $\phi = 0$ पर गति एक विकर्ण (चित्र 2.6 क में PR) के अनुदिश होती है। जबकि $\phi = \pi$ पर गति दूसरे विकर्ण (चित्र 2.6 ख में QS) के अनुदिश होती हैं।

स्थिति II : $\phi = \pi/_2$

इस स्थिति में दो कंपन निम्नलिखित हैं :

$$x = a_1 \cos \omega_0 t$$

और $$y = a_2 \cos (\omega_0 t + \pi/_2) = -a_2 \sin \omega_0 t$$

इन व्यंजकों को वर्ग करके जोड़ने पर निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है –

$$\frac{x^2}{{a_1}^2} + \frac{y^2}{{a_2}^2} = \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1 \tag{2.47}$$

यह दीर्घ वृत्त का समीकरण है। इस तरह, हम यह पाते हैं कि कण की गति उस दीर्घ वृत्त के अनुदिश होती है जिसके मुख्य अक्ष, x-अक्ष और y- अक्ष हैं। दीर्घ वृत्त के अर्ध दीर्घ-अक्ष और अर्ध लघु अक्ष a_1 और a_2 हैं। ध्यान दीजिए कि समय में वृद्धि होने पर x का मान अपने अधिकतम धनात्मक मान से कम होने लगता है, पर y का मान और अधिक ऋणात्मक होने लगता है। इस तरह, गति दीर्घ वृत्त की दक्षिणावर्त दिशा में होती है जैसाकि चित्र 2.6 में दिखाया गया है। यदि आप $\phi = 3\pi/_2$ या $\phi = -\pi/_2$ वाली स्थिति का विश्लेषण करें तो भी आपको यहाँ दीर्घ वृत्त प्राप्त होगा, पर गति वामावर्त दिशा में होगी (चित्र 2.6 घ)।

जब आयाम a_1 और a_2 बराबर होते हैं अर्थात् $a_1 = a_2 = a$ तो समीकरण (2.47) निम्न हो जाता है –

$$x^2 + y^2 = a^2$$

यह समीकरण त्रिज्या वाले एक वृत्त को निरूपित करता है। कहने का अर्थ यह है कि दीर्घवृत्त एक वृत्त के रूप में आ जाता है।

व्यापक स्थिति :

अब हम ϕ के किसी स्वेच्छ मान के लिए व्यापक स्थिति पर विचार करेंगे। मान लीजिए समीकरण 2.43 और समीकरण 2.44 द्वारा दी गई सरल आवर्त गतियाँ अध्यारोपित हैं। परिणामी दोलन प्राप्त करने के लिए हम समीकरण 2.44 को निम्न रूप में लिखते हैं —

$$\frac{y}{a^2} = \cos (\omega_0 t + \phi) = \cos \omega_0 t \ \cos \phi - \omega_0 t \ \sin \phi \tag{2.48}$$

समीकरण 2.43 से

$$\cos \omega_0 t = x/a_1$$

जिससे कि

$$\sin \omega_0 t = \sqrt{1 - (x^2/{a_1}^2)}$$

$\cos \omega_0 t$ और $\sin \omega_0 t$ के इन मानों को समीकरण 2.48 में प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है —

$$\frac{y}{a^2} = \frac{x \cos \phi}{a_1} - \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \sin \phi$$

या

$$\frac{x}{a_1} \cos \phi - \frac{y}{a^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2}\right)} \sin \phi$$

दोनों ओर का वर्ग करने और पदों को व्यवस्थिति रूप में रखने पर हमें —

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - 2\,\frac{xy}{a_1 a_2}\cos\phi = \sin^2\phi \tag{2.49}$$

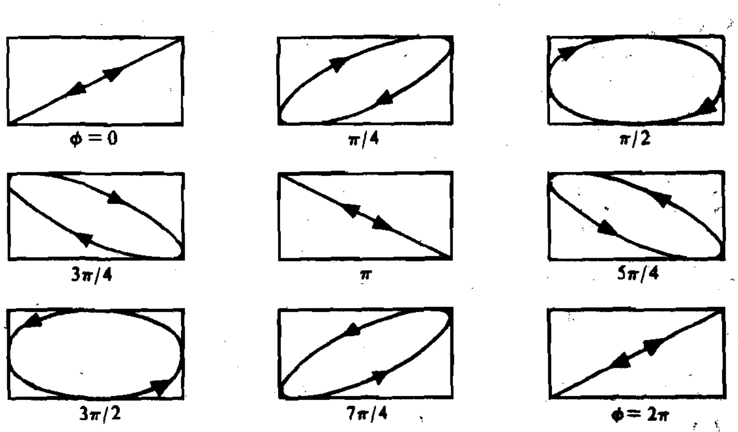
के रूप में परिणामी पथ का समीकरण प्राप्त होता है। यह एक दीर्घ वृत्त निर्धारित करता है जिसके अक्ष, निर्देशांक अक्ष के साथ एक कोण बनाते हैं।

कुछ विशेष स्थितियों में ϕ का मान 0 और 2π के बीच में होता है, उस दशा में परस्पर दो समान आवृत्ति वाली लांबिक सरल आवर्त गतियों के अध्यारोपित होने पर प्राप्त परिणामी दोलन द्वारा अनुरेखित पथ चित्र 2.7 में दिखाए गए हैं। इन प्रक्रियाओं को एक कैथोड किरण दोलनदर्शी (Oscilloscope) पर काफी सरलता से प्रदर्शित किया जा सकता है।

इस तरह हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि दीर्घवृत्तीय गति असमान आयामों और एक कलांतर वाले दो परस्पर लांबिक रेखिक आवर्त्ती दोलनों से संयोजित होती है जबकि वृत्तीय गति समान आयाम वाले दो आवर्त्ती दोलनों की संयोजित गति होती है।

2.6.2 लगभग समान आवृत्तियों वाले दो समकोणिक आवर्त्ती दोलनों का अध्यारोपण : लिसाजू की आकृतियाँ

अब हम यह जानते हैं कि जब दो लांबिक कंपन ठीक एक ही आवृत्ति वाले होते हैं तो परिणामी दोलन द्वारा अनुरेखित वक्र का आकार घटक-कंपनों के कलांतर पर निर्भर करता है। 0 से 2π रेडियन के परिसर से कलांतर ϕ के कुछ मानों के लिए खीचें गए वक्र चित्र 2.6 में दिखाए गए हैं। जब दो अलग-अलग कंपन की आवृत्तियों में किंचितमात्र अंतर होता है, तब परिणामी गति अधिक जटिल होती है। ऐसा होने का कारण यह है कि दो कंपनों की सापेक्ष कला [$\phi = \omega_2 t + \phi_0 - \omega_1 t = (\omega_2 - \omega_1)t + \phi$] समय के साथ धीरे-धीरे परिवर्तित होती रहती है। इसकी वजह से चित्र के आकार में भी धीरे-धीरे परिवर्तन होने लगता है। यदि कंपनों के आयाम क्रमशः a_1 और a_2 हों तो बनने वाली आकृति सदा ही $2a_1$ और $2a_2$ भुजाओं वाले आयत में स्थित होगी। अनुरेखित किए गए इन प्रतिरूपों को लिसाजू की आकृतियाँ कहा जाता है। जब दो कंपन समान कला में होते हैं अर्थात् $\phi = 0$ तो लिसाजू की आकृति एक सरल रेखा का रूप ले लेती है और आयत के विकर्ण $y = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)x$ के साथ संपाती होती है। जब ϕ, 0 से बढ़कर $\pi/2$ हो जाता है तब लिसाजू की आकृति एक दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1$ होती है। और आयत की त्रियक स्थितियों से होकर जाती है। जब ϕ, $\pi/2$ से बढ़कर π हो जाता है तो दीर्घवृत्त लगभग एक सरल रेखा का रूप ले लेता है जो आयत के अन्य विकर्ण $y = -\left(\frac{a_2}{a_1}\right)x$ के साथ संपाती होती है और, जब ϕ, π से बढ़कर 2π होता है, तब जिस क्रम में ऊपर परिवर्तन हो रहा था वह क्रम उलट जाता है। सामान्यतः वक्र का आकार आयामों, आवृत्तिओं और कलांतर पर निर्भर करता है। ये भी परिवर्तन चित्र 2.7 में दिखाए गए हैं। समयांतराल $2\pi/(\omega_2 - \omega_1)$ में कला ϕ में 2π का परिवर्तन होता है। अतः परिवर्तन के पूर्ण चक्र का आवर्तकाल $2\pi/(\omega_2 - \omega_1)$ होता है और उसकी आवृत्ति $(\omega_2 - \omega_1)/2\pi = \nu_2 - \nu_1$ होती है अर्थात् अलग-अलग कंपनों की आवृत्तियों के अंतर के बराबर होती है।



चित्र 2.7 : समान आवृत्ति और 0 तथा 2π के बीच के कलांतर वाले दो परस्पर लाम्बिक आवर्त्ती दोलनों का अध्यारोपण

लिसाजू की आकृतियों को कैथोड किरण दोलनदर्शी की सहायता से आसानी से दर्शाया जा सकता है। कैथोड किरण दोलनदर्शी के xx और yy विचलन प्लेटों पर अलग-अलग प्रत्यावर्ती ज्यावक्रीय वोल्टता (Alternating Sinusoidal voltage) लगाया जाता है और इलेक्ट्रान प्रकाश पुंज प्रदीप्त सक्रीन पर परिणामी प्रभाव को अनुरेखित करता है। जब लगाए गए वोल्टता समान आकृति के होते हैं, तब कला और आयाम में समायोजन करके हमें चित्र 2.7 के विभिन्न वक्र प्राप्त हो सकते हैं, ऐसे प्रतिरूपों को गोलीय लोलक की सहायता से भी यांत्रिकतः प्राप्त किया जा सकता है।

यदि अलग-अलग लांबिक कंपन की आवृत्तियाँ 2 : 1 के अनुपात में हो, तो लिसाजू की आकृतियां कुछ अधिक जटिल होते हैं। जब $\phi = 0$ या π पर यह परवलय (Parabolic) के आकार का होता और $\phi = \pi/2$ पर इसका आकार अंक " 8" की तरह होता है। इसे और अच्छी तरह से समझने के लिए आइए हम निम्नलिखित उदाहरण लें —

दो समकोणिक आवर्त्ती कंपनों को, जिनकी आवृत्तियाँ 2 : 1 के अनुपात में हैं, निम्नलिखित रूप में निरूपित किया जाता है —

$$x = a_1 \cos(2\omega_0 t + \phi)$$

और

$$y = a_2 \cos \omega_0 t$$

अब हम $\phi = 0, \pi/2$ और π पर परिणामी गति प्राप्त करेंगे।

(i) जब $\phi = 0$, तब $x = a_1 \cos 2\omega_0 t = a_1 (\cos^2 \omega_0 t - 1)$

और $y = a_2 \cos \omega_0 t$

क्योंकि $y/a_2 = \cos \omega_0 t$ इसलिए हम ऊपर दिए समीकरण निम्न रूप में लिख सकते हैं —

$$\frac{x}{a_1} = \frac{2y^2}{a_2^2} - 1$$

या

$$y^2 = \frac{a_2^2}{2a_1}(x + a_1)$$

यह समीकरण एक परवलय को निरूपित करता है।

(ii) जब $\phi = \pi/2$ तब $x = -a_1 \sin 2\omega_0 t$

या $-\frac{x}{a_1} = 2 \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t$

और $y = a_2 \cos \omega_0 t$

और क्योंकि $\cos \omega_0 t = y/a_2$

और $\sin \omega_0 t = \sqrt{1 - \frac{y^2}{a_2^2}}$

इसलिए पहला समीकरण यह हो जाएगा —

$$-\frac{x}{a_1} = \frac{2y}{a_2}\sqrt{1 - \frac{y^2}{a_2^2}}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने और पदों को व्यवस्थित ढंग से रखने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है —

$$\frac{4y^2}{a_2^2} = \left(\frac{y^2}{a_2^2} - 1\right) + \frac{x^2}{a_1^2} = 0$$

जो अंक " 8" के आकार जैसे चित्र को निरूपित करता है।

(iii) जब $\phi = \pi$, तब $x = -a_1 \cos 2\omega_0 t$

या $-\frac{x}{a_1} = 2\cos^2 \omega_0 t - 1$

और $y = a_2 \cos \omega_0 t$

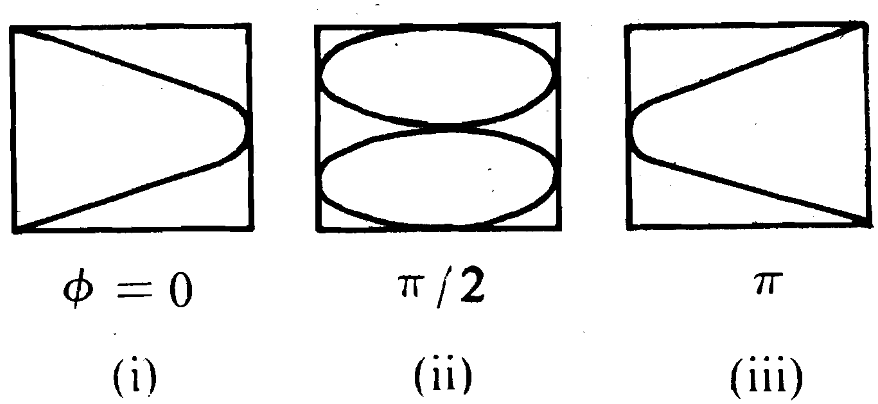
इन समीकरणों को संयोजित करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है –

$$\frac{2y^2}{a^2} = -\frac{x}{a_1} - 1$$

या

$$y^2 = -\frac{a_2^2}{2a_1}(x - a_1)$$

यह एक परवलय को निरूपित करता है जो उस स्थिति का ठीक उल्टा है जब $\phi = 0$.



चित्र 2.8 2:1 के अनुपात की बारम्बारता और कलांतर (क) $\phi=0$ (ख) $\phi=\pi/4$ (ग) $\phi=\pi/2$ (घ) $\phi=3\pi/4$ (ङ) $\phi=\pi$ वाले दो आवृति दोलनों का अध्यारोपण

एक कैथोड किरण दोलनदर्शी में दो परस्पर लांबिक वैद्युत समों क्षेत्रों द्वारा इलेक्ट्रान के विचलन निम्नलिखित हैं —

$$x = 4\cos 2\pi\nu t$$

और

$$y = 4\cos(2\pi\nu t + \pi/6)$$

इलेक्ट्रानों का परिणामी पथ क्या होगा ?

2.7 सारांश

(i) अध्यारोपण-नियम यह है : यदि दो (या अधिक) आवर्त्ती दोलनों के संगत प्रारंभिक आयामों और वेगों को अध्यारोपित करें तो परिणामी विस्थापन सभी अनुवर्ती समयों में हुए अलग-अलग विस्थापनों का बीजीय योग होता है :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

(ii) यदि $x_1 = a_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1)$

और $x_2 = a_2 \cos(\omega_0 t + \phi_2)$

द्वारा दिए गए समान आवृत्ति वाले सरेख आवर्त्ती दोलन अध्यारोपित हों तो परिणामी यह होता है —

$$x = a \cos(\omega_0 t + \phi)$$

जहाँ $a = [a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)]^{1/2}$

और

$$\phi = \tan^{-1} \frac{a_1 \sin\phi_1 - a_2 \sin\phi_2}{a_1 \cos\phi_1 - a_2 \cos\phi_2}$$

(iii) जब अलग-अलग आवृत्तियों वाले दो सरेख आवर्त्ती दोलन अध्यारोपित होते हैं, तब माडुलित दोलन निम्न रूप में निरूपित किया जाता है —

$$x = a_{mod}(t) \cos\omega_{av} t$$

जहाँ

$$a_{mod}(t) = 2a \cos\omega_{mod} t$$

जहाँ

$$\omega_{mod} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

और

$$\omega_{av} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

(iv) समान आयाम (a_0) और समान आवृत्ति वाले पर उत्तरोत्तर दोलनों के बीच अचर कलांतर (ϕ_0) वाले n आवर्त्ती सरेख दोलनों का अध्यारोपण एक आवर्त्ती दोलन होता है। इसे निम्नलिखित समीकरण से व्यक्त किया जाता है —

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t + \phi)$$

जहाँ

$$a = \frac{a_0 \sin(n\phi_0/2)}{\sin(\phi_0/2)}$$

और

$$\phi = (n-1)(\phi_0/2)$$

(v) जब दो परस्पर लांबिक आवर्त्ती दोलन अध्यारोपित होते हैं, तो परिणामी रूप से अलग-अलग प्रकार के वक्र अनुरेखित होते हैं। यदि दोलन समान आवृत्तियों वाले हों तो वक्र का आकार कलांतर पर निर्भर करता है। सामान्यतया वक्र दीर्घवृत्तीय होता है पर कुछ कलाओं पर यह एक सरल रेखा के आकार का हो जाता है। जब आवृत्तियाँ लगभग बराबर होती हैं तो जो वक्र प्राप्त होते हैं वे लिसाजू की आकृतियाँ

2.8 अंत में कुछ प्रश्न

1. सरल लोलक की गति को निम्नलिखित अवकल समीकरण से निरूपित किया जाता है -

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$$

इसे निम्नलिखित प्रारंभिक प्रतिबंधों के लिए हल कीजिए :

(i) $t = 0$ पर $x = 3\ cm$ और $\frac{dx}{dt} = 0$; (ii) $t = 0$ पर $x = 2$ cm और $dx/dt = 4$ cm s^{-1} इन दो हलों को x_1 और x_2 से प्रकट करें। दिखाइए कि नए विस्थापन $x_3 = x_1 + x_2$ के लिए गोलक के प्रारंभिक प्रतिबंध x_1 और x_2 के प्रारंभिक प्रतिबंधों का अध्यारोपण होता है।

2. दो सरल आवर्त कंपनों को

$$x_1 = 3 \sin (20\pi t + \pi/6)$$

और

$$x_2 = 4 \sin (20 \pi t + \pi/3)$$

से निरूपित किया गया है। परिणामी कंपन का आयाम, कला नियतांक और आवर्त काल ज्ञात कीजिए।

3. निम्नलिखित दो सरल आवर्त्ती दोलन लीजिए

$$x_1 = a_1 \cos \omega_1 t$$

और

$$x_2 = a_2 \cos \omega_2 t$$

इनकी परिणामी गति के लिए आयाम के निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त करने के लिए संमिश्र संख्या विश्लेषण का प्रयोग कीजिए

$$a = [a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos (\omega_1 - \omega_2) t]^{1/2}$$

दिखाइए कि परिणामी आयाम $(a_1 + a_2)$ और $(a_1 - a_2)$ के बीच रहता है।

4. लगभग समान आवृत्तियों वाले दो ट्यूनिंग फार्क का प्रयोग लिसाजू की आकृतियाँ प्राप्त करने के लिए किया गया है और यह देखा गया है कि 20 सेकंड में आकृति का परिवर्तन चक्र पूरा हो जाता है। अब यदि A पर थोड़ा मोम लगा दिया जाए तो 10 सेकंड में ही आवृत्ति 300 Hz हो तो मोम लगाने के पहले और बाद में A की आवृत्ति क्या होगी ?

2.9 हल/उत्तर

बोध प्रश्न 1

दिए हुए प्रसार को लागू करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है —

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \left[\theta - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} + \ldots\ldots \right] = 0$$

क्योंकि इस समीकरण में उच्च घात वाले पद हैं, इसलिए यह रैखिक नहीं है।

यदि हम प्रसार के पहले दो पद को लें तो परिणामी समीकरण रैखिक नहीं होगा, अतः अध्यारोपण-नियम यहाँ लागू नहीं हो सकता।

बोध प्रश्न 2

और

$x_2 = a_2 \cos \omega_0 t$

अध्यारोपण-नियम के अनुसार

$x = x_1 + x_2 = (a_1 + a_2) \cos \omega_0 t$

क्योंकि कोसाइन फलन $+1$ और -1 के बीच होता है, इसलिए परिणामी दोलन का आयाम $(a_1 + a_2)$ होगा ।

बोध प्रश्न 3

प्रारंभिक कलाओं Q_1 और Q_2 वाले दो आवर्ती दोलन का परिणामी यह है

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \qquad \text{(i)}$$

(क) जब $\phi_1 - \phi_2 = 2n\pi$, तब $\cos(\phi_1 - \phi_2) = 1$ (ii)

और समीकरण (i) यह हो जाता है —

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2$$
$$= (a_1 + a_2)^2$$

जिससे कि

$$a = \pm (a_1 + a_2)$$

ऋणात्मक चिहन छोड़ दिया जाता है क्योंकि भौतिक दृष्टि से यह उचित नहीं है।

इसलिए $a = (a_1 + a_2)$

ख) जब $\phi_1 - \phi_2 = (2n+1)\pi$ तब $\cos(\phi_1 - \phi_2) = -1$

तब समीकरण (I) निम्न हो जाता है

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2$$

जिससे कि

$$a^2 = \pm (a_1 - a_2)^2$$
$$a = \pm (a_1 - a_2)$$

पहले की तरह यहां भी ऋण चिहन को छोड़ दिया जाता है और इसलिए

$$a = a_1 - a_2$$

बोध प्रश्न 4

समीकरण (2.15) से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$a = \sqrt{2}\ a_1 [1 + \cos(\phi_1 - \phi_2)]^{1/2}$$

संबंध $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ का प्रयोग करने पर इसे हम इस प्रकार लिख सकते हैं

$$a = 2a_1 \cos \frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2)$$

क्योंकि $\phi_1 - \phi_2 = 90°$, $\cos \frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2) = \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ अतः

$$a = 2 \times 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\text{cm}$$

इसी प्रकार समीकरण (2.16) से हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है

$\tan \phi = 1$ or $\phi = \frac{\pi}{4}$

बोध प्रश्न 5

यहाँ $n = 3$, $a_0 = 4$ एकक और $\phi_0 = \pi/3$ रेडियन है। अतः समीकरण (2.34) के अनुसार परिणामी दोलन का आयाम यह होगा

$$a = a_0 \frac{\sin n\,\phi_0/2}{\sin \phi_0/2}$$

$$= a_0 \frac{\sin \frac{3 \times \pi}{2 \times 3}}{\sin \frac{\pi}{2 \times 3}}$$

$$= a_0 \frac{\sin \pi/2}{\sin \pi/6}$$

क्योंकि $\sin \pi/2 = 1$ और $\sin \pi/6 = 1/2$ इसलिए

$a = 2\,a_0$

परिणामी दोलन की कला समीकरण (2.37) से प्राप्त होती है :

$$\phi = (n-1)\frac{\phi_0}{2}$$

$= 2 \times \pi/6$

$= \pi/3$ रेडियन

बोध प्रश्न 6

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{4^2} - \frac{2xy}{4 \times 4} \cos \pi/6 = \sin^2 \pi/6$$

या $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} - \frac{2\,xy}{16}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}$

या $x^2 + y^2 - \sqrt{3}\,xy - 4 = 0$

परिणामी पथ एक दीर्घवृत्त है।

अंत में कुछ प्रश्न

1. $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$ (i)

सरल आवर्त्त गति के मानक समीकरण $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$

से इसकी तुलना करने पर हम यह पाते हैं कि इस समीकरण का हल यह है —

$x = a \cos(2t + \phi)$ (ii)

के सापेक्ष समीकरण (i) को अवकलित करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है —

$\frac{dx}{dt} = -2a \sin(2t + \phi)$ (iii)

(1) क्योंकि $t = 0$ पर $x = 3$ cm और $dx/dt = 0$ इसलिए समीकरण (ii) और (iii) से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$3 = a \cos \phi$

और $0 = -2a \sin \phi$

बाद वाले संबंध से यह पता चलता है कि $\phi = 0$

पहले संबंध में इसका प्रयोग करने पर

$a = 3$ cm

इसलिए संपूर्ण हल यह होगा

$x_1 = 3 \cos 2t$ cm (iv)

(2) और यदि $t = 0$ पर $x = 2$ cm और $\frac{dx}{dt} = 4$ cm s^{-1}

तो हम पाते हैं कि

$2 \text{ cm} = a \cos\phi$

और $4 \text{ cm s}^{-1} = -2a \sin\phi$

या $2 \text{ cm s}^{-1} = -a \sin\phi$

एक को दूसरे से भाग देने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$\tan\phi = -1$ या $\phi = -\frac{\pi}{4}$ अतः $a = 2\sqrt{2}$ cm

इसलिए दूसरा हल यह होगा

$x_2 = 2\sqrt{2} \cos(2t - \pi/4)$ cm (v)

अतः x_1 और x_2 के अध्यारोपण से x_3 प्राप्त होता है

$$x_1 + x_2 = 3\cos 2t \text{ cm} + 2\sqrt{2} \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) \text{cm}$$

$$= 3\cos 2t \text{ cm} + 2\sqrt{2}\,[\cos 2t \ \cos\pi/4 + \sin^2 t \ \pm \sin\pi/4]\text{cm}$$

$$= 3\cos 2t \text{ cm} + 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2t\right) \text{cm}$$

$$= 5\cos 2t \text{ cm} + 2\sin^2 t \text{ cm} \quad \text{(vi)}$$

यदि हम x_1 और x_2 के प्रारंभिक प्रतिबंधों को अध्यारोपित करें तो

$t = 0$ पर $x = 5$ cm और $\frac{dn}{dt} = 4$ cm s^{-1}

$\therefore \ 5 \text{ cm} = a \cos\phi$

और $4 \text{ cm} = -2a \sin\phi$

अतः $\tan\phi = -2/5$

$$\therefore \sin\phi = -\frac{2}{\sqrt{2a}}$$

$$\cos\phi = \frac{5}{\sqrt{2a}}$$

और $a = \sqrt{2a}$ cm

इसलिए प्रारंभिक प्रतिबंधों को अध्यारोपित करने पर निम्नलिखित हल प्राप्त होता है—

$$x_3 = \sqrt{2a}\cos(2t + \phi) \text{ cm} = \sqrt{2a}\,[\cos 2t \ \cos\phi - \sin 2t \sin\phi\,] \text{ cm}$$

इसमें $\cos\phi$ और $\sin\phi$ के मान प्रतिस्थापित करने पर

$x_3 = 5 \cos 2t$ cm $+ 2 \sin 2t$ cm (vii)

यह वही है जो समीकरण (vi) से प्राप्त होता है और जो यह x_1 और x_2 के अध्यारोपण से प्राप्त हुआ है।

$x_1 = 3 \cos (20 \pi t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2})$

और $x_2 = 4 \cos (20 \pi t + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2})$

या $x_1 = 3 \cos (2\pi t - \pi/3)$

और $x_2 = 4 \cos (2\pi t - \pi/6)$

अतः परिणामी कंपन

$x = a \cos (2\pi t + \phi)$ cm

से परिभाषित होता है

जहाँ $a = (3^2 + 4^2 + 2 \times 3 \times 4 \times \cos \pi/6)^{1/2}$ cm

$= (9 + 16 + 12\sqrt{3})^{1/2}$ cm

= 6.77 एकक

और $\phi = \tan^{-1} \dfrac{3 \sin \pi/3 + 4 \sin \pi/6}{3 \cos \pi/3 + 4 \cos \pi/6}$

$= \tan^{-1} \dfrac{3\sqrt{3} + 4}{3 + 4\sqrt{3}} = - 0.24 \pi$

3. $z = a_1 \exp (\omega_1 t) + a_2 \exp (\omega_2 t)$

$a^2 = (zz^*) = (a_1 e^{-i\omega_1 t} + a_2 e^{-i\omega_2 t})$

$(a_1 e^{i\omega_1 t} + a_2 e^{i\omega_2 t})$

$= [a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2 \exp[i(\omega_1 - \omega_2)t] + a_1 a_2 e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t}$

वास्तविक भाग (part) लेने पर

$a = [a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos (\omega_1 - \omega_2) t]$

जब $(\omega_1 - \omega_2)t = \pi$ (2n+1) π तब $a_{min} = a_1 - a_2$

जब $(\omega_1 - \omega_2)t = 0$ या $n\pi$ तब $a_{max} = a_1 + a_2$

अतः परिणामी आयाम $a_1 + a_2$ और $a_1 - a_2$ के मानों के बीच रहता है।

4. $\nu_A - \nu_B$

ट्यूनिंग फॉर्क A पर मोम लगाने पर A की आवृत्ति कम हो जाएगी। अब, क्योंकि 10 सेकंड में चित्रों का परिवर्तन चक्र पूरा हो जाता है, इसलिए आवृत्ति अंतर बढ़कर 0.1 हो जाती है। इससे यह अर्थ निकलता है कि मोम लगाने के पहले और बाद में आवृत्तियां क्रमशः 300 – 0.05 = 299.95 Hz और 300 – 0.1 = 299.9 Hz होगी।

2.10 शब्दावली

अध्यारोपण	–	Superposition
अवमंदन	–	Damping

आयाम	–	Amplitude
आवृत्ति	–	Frequency
कला	–	Phase
कलांतर	–	Phase Difference
गोलक	–	Bob
घटक	–	Component
दोलन	–	Oscillation
दोलनदर्शी	–	Oscilloscope
ध्रुवांतर रेखा	–	Radius Vector
परिणामी	–	Resultant
प्रक्षेप	–	Projection
माडुलन	–	Modulation
लिसाजू की आकृतियाँ	–	Lissajous Figures
लोलक	–	Pendulum
विभा	–	Dimension
विस्थापन	–	Displacement
संमिश्र संख्या	–	Complex Number
सरेख	–	Collinear
सदिश	–	Vector
सरल आवर्त गति	–	Simple Harmonic Motion