इकाई 10 संतत फलनों के गुणधर्म

इकाई की रूपरेखा

10.1 प्रस्तावना

पिछले दो इकाइयों में एक बिन्दु पर फलन की सीमा और सांतव्य सीमाओं और संतत फलनों के बीजगणित, सीमा और सांतव्य में संबंध आदि पर अध्ययन कर लेने के बाद अब हम वास्तविक रेखा पर परिबद्ध संवृत्त अंतरालों में संतत फलनों के व्यवहार के बारे में चर्चा करेंगे। भाग 10.2 में आप यह देखेंगे कि इस प्रकार के अंतरालों में संतत फलन परिबद्ध होते हैं और वे अपना परिबंध (bounds) प्राप्त कर लेते हैः ये फलन ऐसे अंतरालों के बिन्दुओं पर लिए गए किन्हीं दो मानों के बीच के सभी मान धारण कर लेते है। भाग 10.3 में आपको एकसमान सांतव्य की संकल्पना से परिचित कराया जायेगा और यहां आप यह भी देखेंगे कि परिबद्ध संवृत्त अंतराल पर संतत फलन एकसमानतः संतत होता है। इससे यह अर्थ निकलता है कि परिबद्ध संवृत्त अंतरालों पर संतत फलन सुव्यवहारित (Well behaved) होते हैं। इस तरह, हम यह पाते हैं कि परिबद्ध संवृत्त अतंरालों से वास्तविक रेखा के उपसमुच्चयों के वर्ग से एक महत्वपूर्ण उपवर्ग प्राप्त होता है जिसे वास्तविक रेखा संहत उपसमुच्चय कहा जाता है। बाद में चलकर उच्च गणित में आप इसके बारे में और अधिक अध्ययन करेंगे। अब हम R के परिबद्ध संवृत अंतराल को संहत अंतराल कहेंगे। क्योंकि इस इकाई के परिणाम वास्तविक विश्लेषण (Real Analysis) में एक महत्वपूर्ण और निर्णायक भूमिका निभाते हैं, इसलिए विश्लेषण का और आगे अध्ययन करने के लिए यह आवश्यक है कि इस इकाई में दिए गए विभिन्न प्रमेयों को अच्छी तरह समझ लें। इस इकाई में खंड 3 के कुछ गंभीर प्रमेय भी दिए गए हैं।

यहां यह बात ध्यान में रखनी चाहिए कि R का अंतराल एक संहत अंतराल नहीं होगा, जब यह परिबद्ध नहीं है।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन कर लेने के बाद आप

- परिबद्ध संवृत्त अंतरालों पर संतत फलनों के गुणधर्मों और उन अंतरालों पर, जो संवृत्त या परिबद्ध नहीं हैं, संतत फलनों के गुणधर्मों में भेद कर सकेंगे।
- वास्तविक विश्लेषण में परिबद्ध संवृत्त संतरालों द्वारा निभायी गई महत्वपूर्ण भूमिका को समझ सकेंगे।
- एक समान सांतव्य की संकल्पना को और सांतव्य के साथ इसके संबंध को जान सकेंगे।

10.2 परिबद्ध संवृत्त अंतरालों पर सांतव्य

अब हम उन फलनों पर विचार करेंगे जो परिबद्ध संवृत्त अंतराल (bounded closed intervals) पर संतत हैं। इसके गुणधर्म तब लागू नहीं होते जबकि अंतराल परिबद्ध या संवृत्त नहीं होते। पहले हम गुणधर्मों को सिद्ध करेंगे और फिर उदाहरणों की सहायता से हम यह दिखाएंगे कि ये गुणधर्म लागू नहीं होते। इन गुणधर्मों को सिद्ध करने के लिए हमें वास्तविक रेखा के एक महत्वपूर्ण गुणधर्म की आवश्यकता होती है जिसकी चर्चा हम इकाई 1 में कर चुके हैं। यह गुणधर्म, जिसे R का पूर्णता गुणधर्म (completeness property) कहा जाता है, निम्नलिखित हैं :

वास्तविक रेखा R के एक अरिक्त उपसमुच्चय (non-empty subset) का, जो कि उपरितः परिबद्ध है, न्यूनतम उपरि परिबंध (least upper bound) होता है या, दूसरे शब्दों में, R के अरिक्त उपसमुच्चय का, जो निम्नतः परिबद्ध हैं, महत्तम निम्न परिबंध (greatest lower bound) होता है।

नीचे दिए गए प्रमेयों में हम परिबद्ध संवृत्त अंतरालों पर संतत फलनों के गुणधर्म सिद्ध करेंगे। पहले दो प्रमेयों में हम यह दिखाएंगे कि परिबद्ध संवृत्त अंतराल पर संतत फलन परिबद्ध होता है और अंतराल में अपने परिबंध (bounds) प्राप्त कर लेता है। आपको याद होगा कि समुच्चय S पर f परिबद्ध होता है, यदि एक ऐसे अचर $M > 0$ का अस्तित्व हो कि सभी $x \in S$ के लिए $|f(x)| \leq M$ आप यह भी ध्यान दीजिए कि (परिबद्ध या अपरिबद्ध) प्रांत D पर परिभाषित वास्तविक फलन f परिबद्ध होता है यदि और केवल यदि इसका परिसर f(D), R का एक परिबद्ध उपसमुच्चय हो।

प्रमेय 1 : परिबद्ध और संवृत्त अंतराल [a, b] पर संतत फलन f अनिवार्यतः एक परिबद्ध फलन होता है।

उपपत्ति : मान लीजिए S अंतराल [a, b] की सभी वास्तविक संख्याओं c का ऐसा संग्रह है कि अंतराल [a, c] पर f परिबद्ध होता है। अर्थात् [a, b] की वास्तविक संख्या c, S का सदस्य होती है, यदि और केवल यदि एक ऐसे अचर M_c का अस्तित्व होता है कि [a, c] के सभी x के लिए $|f(x)| \leq M_c$. स्पष्ट है कि $S \neq \phi$ क्योंकि $a \in S$ और b, S का एक उपरि परिबंध (upper bound) है। अतः R के पूर्णता गुणधर्म (completeness property) के अनुसार S के एक न्यूनतम उपरि परिबंध का अस्तित्व होता है। मान लीजिए यह परिबंध k हैं। तब स्पष्ट है कि $k \leq b$. यहां अब हम यह सिद्ध करेंगे कि $k \in S$ और $k = b$ और इस तरह प्रमेय की उपपत्ति पूरी हो जाएगी। k ($\leq$ b) पर f के सांतव्य से, $\varepsilon = 1$ के संगत एक ऐसे $d > 0$ का अस्तित्व होता है कि $|f(x) - f(k)| < \varepsilon = 1$, जब कभी $|x - k| < d$, $x \in [a, b]$.

त्रिभुज असमिका से हमें यह प्राप्त होता है

$$||f(x)| - |f(k)|| \leq |f(x) - f(k)| < 1$$

अतः [a, b] के सभी x के लिए, जिनके लिए $|x - k| < d$, हमें यह प्राप्त होता है

$$|f(x)| < |f(k)| + 1 \quad ....(1)$$

क्योंकि k, S का न्यूनतम उपरि परिबंध है, इसलिए k − d, S का एक उपरि परिबंध नहीं होता। अतः एक ऐसी संख्या $c \in S$ होती है कि

$$k - d < c \leq k.$$

अब एक ऐसा t लीजिए कि $k \leq t < k + d$ यदि x अंतराल [c, t] का सदस्य हो तो $|x - k| < d$ क्योंकि

$$x \in [c, t] \Rightarrow c \leq x \leq t \Rightarrow k - d < c \leq x \leq t < k + d \quad ...(2)$$

अब $c \in S$ से यह अर्थ निकलता है कि एक ऐसे $M_c > 0$ का अस्तित्व होता है कि सभी

$x \in [a, c]$ के लिए,

$$|f(x)| \leq M_c \quad ...(3)$$

$x \in [a, t] = [a, c] \cup [c, t] \Rightarrow$ या तो $x \in [a, c]$ या $x \in [c, t]$

यदि $x \in [a, c]$ तो (3) में से यह प्राप्त होता है

$$|f(x)| \leq M_c < M_c + |f(k)| + 1$$

और यदि $x \in [c, t]$, तो (1) और (2) से हमें यह प्राप्त होता है

$$|f(x)| < |f(k)| + 1 < M_c + |f(k)| + 1$$

किसी भी स्थिति में $x \in [a, t]$ से यह अर्थ निकलता है कि

$$|f(x)| < M_c + |f(k)| + 1$$

इससे यह पता चलता है कि अंतराल [a, t] में f परिबद्ध हैं, जिससे यह सिद्ध हो जाता है कि जब कभी $t \in S$, तब $k \leq t < k + d$ विशेष रूप में $k \in S$ इस स्थिति में $k = b$ यदि ऐसा नहीं है तो हम एक ऐसा "t" ले सकते हैं जिससे कि $k < t < k + d$ और $t \in S$ जो इस बात का अंतर्विरोध करता है कि k एक उपरि परिबंध है। इस तरह प्रमेय की उपपत्ति पूरी हो जाती है।

एक परिबद्ध संवृत्त अंतराल पर संतत फलन की परिबद्धता (boundedness) को सिद्ध कर लेने के बाद अब

हम यह सिद्ध करेंगे कि फलन अपने परिबंध प्राप्त कर लेता है अर्थात् इसके महत्तम और लघुतम मान होते हैं।

प्रमेय 2 : यदि परिबद्ध संवृत्त अंतराल [a, b], पर f एक संतत फलन हो, तो [a, b] में ऐसे बिन्दुओं x_1 और x_2 का अस्तित्व होता है कि सभी $x \in [a, b]$ के लिए $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ (अर्थात् f अपने परिबंध प्राप्त कर लेता हैं)।

उपपत्ति : प्रमेय 1 से हम यह जानते हैं कि [a, b] पर f परिबद्ध है। इसलिए एक ऐसे M का अस्तित्व होता है कि

$$|f(x)| \leq M \ \forall x \in [a, b].$$

अतः संग्रह $\{f(x) : a \mid \leq x \leq b\}$ का एक उपरि परिबंध होता है, क्योंकि

$$f(x) \leq |f(x)| \leq M \ \forall \ x \in [a, b]$$

इसलिए R के पूर्णता गुणधर्म के अनुसार समुच्चय $\{f(x) : a \leq x \leq b\}$ का एक न्यूनतम उपरि परिबंध होता है।

आइए हम $\{ f(x) : a \leq x \leq b \}$ के न्यूनतम उपरि परिबंध (least upper bound) को k से प्रकट करें। तब ऐसे सभी x के लिए, जहां $a \leq x \leq b$, $f(x) \leq k$ और, हम यह मानते हैं कि [a, b] में ऐसे x_2 का अस्तित्व होता है कि $f(x_2) = k$ यदि ऐसे x_2 का अस्तित्व नहीं होता, तो सभी $a \leq x \leq b$ के लिए

$k - f(x) > 0$ अतः

$$g(x) = \frac{1}{k - f(x)}$$

द्वारा दिया गया फलन g, [a, b] के सभी x के लिए परिभाषित होता है और g संतत होता है, क्योंकि f संतत हैं (इकाई 2 देखिए)। अतः प्रमेय 1 के अनुसार, एक ऐसे $M' > 0$ का अस्तित्व होता है कि

$$|g(x)| \leq M' \ \forall x \in [a, b]$$

इस तरह हमें यह प्राप्त होता है

$$|g(x)| = \frac{1}{|k - f(x)|} = \frac{1}{k - f(x)} \leq M'$$

अर्थात् $\quad f(x) \leq k - \dfrac{1}{M'} \ \forall x \in (a, b)$

पर, हमने $\{f(x) : a \leq x \leq b\}$ के न्यूनतम उपरि परिबंध के रूप में जो k लिया है, उसका यह अंतर्विरोध करता है, इस अंतर्विरोध से यह सिद्ध हो जाता है कि [a, b] में एक ऐसे x_2 का अस्तित्व होता है, जिससे कि $a \leq x \leq b$ के लिए $f(x_2) = k \geq f(x)$ ठीक इसी प्रकार, न्यूनतम उपरि परिबंध के स्थान पर $\{f(x) : a \leq x \leq b\}$ का महत्तम निम्न परिबंध लेकर या f के स्थान पर $-f$ लेकर यह सिद्ध किया जा सकता है कि [a, b] में एक ऐसे x_1 का अस्तित्व होता है जिसे कि $a \leq x \leq b$ के लिए $f(x_1) \leq f(x)$.

(इसे एक प्रश्न मानकर हल कीजिए)

प्रायः प्रमेय 1 और 2 को वास्तविक रेखा पर हेने बोरल गुणधर्मी या इसी प्रकार के अन्य गुणधर्मो का प्रयोग करके सिद्ध किया जाता है। इस इकाई में दी गई उपपत्तियां, वास्तविक रेखा के पूर्णता गुणधर्म अर्थात् वास्तविक रेखा के उपरितः परिबद्ध उपसमुच्चय का न्यूनतम उपरि परिबंध होता है, पर सीधे आधारित होती है। यूं तो ये उपपत्तियों सामान्य उपपत्तियों से कुछ अधिक लंबी हो सकती हैं पर इसमें ऊपर बताए गए वास्तविक रेखा के गुणधर्म को छोड़कर किसी अन्य प्रमेय का प्रयोग नहीं होता।

जैसा कि पहले बताया जा चुका है कि यदि अंतराल परिबद्ध या संवृत्त न हो, अर्थात् यदि अंतराल

$]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$, $[a, \infty[$, $]a, \infty[$, $]-\infty, a]$, $]-\infty, a[$ या $]-\infty, \infty[$

के प्रकार का अंतराल हो, तो संतत फलन के गुणधर्म लागू नहीं होते।

इन्हें हम नीचे दिए गए उदाहरणों और प्रश्नों की सहायता से समझाने की कोशिश करेंगे।

उदाहरण 1 : दिखाइए कि $f(x) = x^2 \ \forall x \in [0, \infty[$ द्वारा परिभाषित फलन f संतत होता है, पर परिबद्ध नहीं होता।

हल : क्योंकि फलन f एक बहुपद फलन हैं, इसलिए यह $[0, \infty[$ में संतत हैं ।

फलन का प्रांत एक अपरिबद्ध संवृत्त अंतराल हैं । फलन परिबद्ध नहीं है, क्योंकि फलन के मानों का समुच्चय अर्थात् फलन का परिसर $\{ x^2 : x \in [0, \infty[\} = [0, \infty[$ है जो कि परिबद्ध नहीं हैं ।

उदाहरण 2 : दिखाइए कि $f(x) = \frac{1}{x} \; \forall x \in]0, 1[$ द्वारा परिभाषित फलन f संतत है, पर परिबद्ध नहीं है ।

हल : क्योंकि फलन f संतत फलनों $F(x) = 1$ और $G(x) = x$ जहां $G(x) \neq 0, x \in]0, 1[$ (इकाई 9 देखिए) का भागफल है, इसलिए यह संतत है ।

f का प्रांत परिबद्ध है, पर संवृत्त अंतराल नहीं हैं । फलन परिबद्ध नहीं है, क्योंकि इसका परिसर

$\left\{ \frac{1}{x} ; x \in]0, 1[\right\} =]1, \infty[$ है जो एक परिबद्ध समुच्चय नहीं है ।

प्रश्न 1

दिखाइए $f(x) = x \; \forall x \in]-\infty, \infty[$ द्वारा परिभाषित फलन f संतत है पर परिबद्ध नहीं हैं ।

प्रश्न 2

दिखाइए कि $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} \; \forall x \in]2, 3[$ द्वारा परिभाषित फलन f संतत है पर परिबद्ध नहीं हैं ।

उदाहरण 3 : दिखाइए कि $f(x) = x \; \forall x \in]0, 1[$ द्वारा दिया गया फलन f संतत तो है पर अपने परिबंध प्राप्त नहीं करता ।

हल : जैसा कि उदाहरण 2 में बताया जा चुका है कि $]0, 1[$ में तत्समक फलन (identity function) संतत है । यहां f का प्रांत परिबद्ध है पर संवृत्त अंतराल नहीं है । फलन f न्यूनतम उपरि परिबंध (l.u.b.) = 1. और महत्तम निम्न परिबंध (g.l.b.) = 0 से परिबद्ध हैं और फलन दोनों परिबंध को प्राप्त नहीं करता, क्योंकि f का परिसार $=]0, 1[$

उदाहरण 4 : दिखाइए कि $f(x) = \frac{1}{x^2} \; \forall x \in]0, 1[$ द्वारा दिया गया फलन f संतत है पर अपने महत्तम निम्न परिबंध को प्राप्त नहीं करता ।

हल : $G(x) = x^2 \; \forall x \in]0, 1[$ द्वारा दिया गया फलन G संतत हैं और $G(x) \neq 0 \; \forall \in]0, 1[$ इसलिए इसका व्युत्क्रम फलन $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $]0, 1[$ में संतत होगा (इकाई 9 देखिए) यहां f का प्रांत परिबद्ध है पर संवृत्त अंतराल नहीं है और f के न्यूनतम उपरिपरिबंध का अस्तित्व नहीं है, जबकि इसका महत्तम निम्न परिबंध 1 है जिसे f प्राप्त नहीं करता ।

प्रश्न 3

दिखाइए कि $f(x) = \sin x, x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ द्वारा दिया गया फलन f संतत है, पर अपने किसी भी परिबंध को प्राप्त नहीं करता ।

प्रश्न 4

सिद्ध कीजिए कि $f(x) = x^2 \; \forall x \in]-\infty, 0[$ द्वारा दिया गया फलन f संतत है पर अपने महत्तम निम्न परिबंध को प्राप्त नहीं करता ।

अब हम अंतराल I पर संतत फलन के एक अन्य महत्वपूर्ण गुणधर्म की, जिसे मध्यवर्ती मान गुणधर्म (intermediate value property) के नाम से जाना जाता है, सिद्ध करेंगे। यहां हमें यह मान लेने की आवश्यकता नहीं है कि I परिबद्ध और संवृत्त है। यह गुणधर्म संतत फलन के हमारे आंतःप्रज्ञ विचार (intutive idea) की पुष्टि कर देता है अर्थात् ऐसे फलन f एक मान से दूसरे मान तक जम्प (jump) नही कर सकता, क्योंकि यह किन्ही दो मानों f(a) और f(b) के बीच स्थित सभी मानों को लेता है।

प्रमेय 3 : (मध्यवर्ती मान प्रमेय) : मान लीजिए f, a और b को आविष्ट करने वाले अंतराल पर एक संतत फलन है। यदि k, f(a) और f(b) के बीच कोई संख्या हो, तो एक ऐसी संख्या c, $a \le c \le b$ होती है जिससे कि f(c) = k

उपपत्ति : या तो f(a) = f(b) या f(a) < f(b) या f(b) < f(a) यदि f(a) = f(b) तो k = f(a) = f(b) अतः c को या तो a या b माना जा सकता है। यहां हम यह मान लेंगे कि f(a) < f(b) (अन्य स्थिति के साथ भी यही प्रक्रिया अपनायी जा सकती है) अतः हम यह मान सकते हैं कि
$f(a) < k < f(b)$.

मान लीजिए S, [a, b] की सभी वास्तविक संख्याओं के संग्रह को प्रकट करता है, जहां f(x) < k स्पष्ट है कि S, a को आविष्ट करता है, अतः $S \neq \phi$ और b, S का एक उपरि परिबंध है। इसलिए R के पूर्णता गुणधर्म के अनुसार S का एक न्यूनतम उपरि परिबंध होता है। आइए हम इस न्यूनतम उपरि परिबंध को c से प्रकट करें। तब $a \le c \le b$ यहां हम यह दिखाना चाहते हैं कि f(c) = k

क्योंकि [a, b] पर f संतत हैं, इसलिए c पर f संतत हैं। अतः $\varepsilon > 0$ दिया हुआ हो, तो एक ऐसे $\delta > 0$ का अस्तित्व होता है कि जब कभी k [a, b] में होता है और $|x - c| < \delta$, तब
$|f(x) - f(c)| < \varepsilon$

अर्थात् $f(c) - \varepsilon$ c $f(x) < f(c) + \varepsilon$ ...(4)

यदि $c \neq b$ तो हम यह मान सकते हैं कि $c + \delta < b$. अब, क्योंकि c, S का न्यूनतम उपरि परिबंध है, इसलिए $c - \delta$, S का उपरि परिबंध नहीं होगा। अतः S में एक ऐसे y का अस्तित्व होता है कि
$c - \delta < y \le c$ स्पष्ट है कि $|y - c| < \delta$ और ऊपर दिए गए (4) के अनुसार
$f(c) - \varepsilon < f(y) < f(c) + \varepsilon$ और y, S में है, इसलिए f(y) < k इस तरह हमें यह प्राप्त होता है।

$f(c) - \varepsilon < k$ ...(5)

अब, यदि c = b तो $k - \varepsilon < k < f(b) = f(c)$ अर्थात् $k < f(c) + \varepsilon$ यदि $c \neq b$ तो c < b तब एक ऐसे x का अस्तित्व होता है कि $c < x < c + \delta$. $c + \delta, x \in [a, b]$

और ऊपर दिए गए (4) के अनुसार इस x के लिए $f(x) < f(c) + \varepsilon$ क्योंकि x > c इसलिए $k \le f(x)$ यदि ऐसा नहीं होता तो x, S में होता जिससे यह अर्थ निकलता कि c, S का एक उपरि परिबंध नहीं है। इस तरह,

$k \le f(x) < f(c) + \varepsilon$

अतः स्थिति, कोई भी हो,

$k < f(c) + \varepsilon$ ...(6)

(2) और (3) का संयोजन करने पर हमें प्रत्येक $\varepsilon > 0$ के लिए यह प्राप्त होता है

$f(c) - \varepsilon < k < f(c) + \varepsilon$

जिससे यह सिद्ध हो जाता है कि k = f(c) क्योंकि ε स्वेच्छा है जबकि k, f(c) नियत हैं। वस्तुतः जब f(a) < k < f(b) और

f(c) = k तो a < c < b.

उपप्रमेय 1 : यदि संवृत्त अंतराल [a, b] पर f एक संतत फलन हो और यदि f(a) और f(b) विपरीत चिह्न वाले हों (अर्थात् f(a) f(b) < 0) तो] a,b [में एक ऐसा बिन्दु x_0 होता है जिस पर f का लोपन हो जाता है। (अर्थात् $f(x_0) = 0$)

प्रमेय में k = 0 लेने पर यह उपप्रमेय प्राप्त हो जाता है।

उपप्रमेय 2 : मान लीजिए f एक परिबद्ध संवृत्त अंतराल [a, b] पर परिभाषित एक संतत फलन है जिसके मान [a, b] में हैं। तब [a, b] में एक ऐसे बिन्दु c का अस्तित्व होता है कि f(c) = c (अर्थात् [a, b] पर फलन f के लिए नियत बिन्दु c का अस्तित्व होता है।

उपपत्ति: यदि $f(a) = a$ या $f(b) = b$ तब तो सिद्ध करने के लिए कुछ रह ही नहीं जाता। अत: हम यह मान लेते हैं कि $f(a) \neq a$, $f(b) \neq b$.

$g(x) = f(x) - x, x \in [a, b]$, द्वारा परिभाषित फलन g लीजिए। क्योंकि g दो संतत फलनों का अंतर है, इसलिए यह [a, b] पर संतत होगा और, क्योंकि f(a), f(b) अंतराल [a, b] में है, इसलिए $f(a) > a$ (क्योंकि $f(a) \neq a, f(a) \in]a, b]$) और $f(b) < b$ (क्योंकि $f(b) \neq b, f(b) \in [a, b[$) इसलिए $g(a) > 0$ और $g(b) < 0$. अत:, उपप्रमेय 1 के अनुसार,]a, b[में एक ऐसे c का अस्तित्व होता है जहाँ कि $g(c) = 0$, अर्थात् $f(c) = c$. इसलिए, [a, b] में, एक ऐसे c का अस्तित्व होता है जहाँ कि $f(c) = c$.

कभी-कभी ऊपर दिए गए उपप्रमेय 1 की सहायता से बहुपद के कुछ मूल प्राप्त किए जाते हैं। इसे हम नीचे दिए गए उदाहरण में प्रदर्शित कर रहे हैं।

उदाहरण 5 : समीकरण $x^4 + 2x - 11 = 0$ का, एक वास्तविक मूल 1 और 2 के बीच स्थित है।

हल: फलन $f(x) = x^4 + 2x - 11$ संवृत्त अंतराल [1, 2] पर संतत फलन है। यहां $f(1) = -8$ और $f(2) = 9$. अत:, उपप्रमेय 1 के अनुसार, एक ऐसे $x_0 \in]1, 2[$ का अस्तित्व होता है कि $f(x_0) = 0$, अर्थात् x_0 समीकरण $x^4 + 2x - 11 = 0$ का एक वास्तविक मूल है जो कि अंतराल]1, 2[में स्थित है।

अब नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

प्रश्न 5

दिखाइए कि समीकरण $16x^4 + 64x^3 - 32x^2 - 117 = 0$ का एक वास्तविक मूल > 1 है।

प्रश्न 6

सिद्ध कीजिए कि समीकरण $\cos x - x = 0$ का एक वास्तविक मूल होता है जो अंतराल $]0, \pi[$ में स्थित है।

प्रश्न 7

सिद्ध कीजिए कि विषम घात और वास्तविक गुणांकों वाले बहुपद का कम से कम एक वास्तविक मूल होता है।

प्रश्न 8

दिखाइए कि समीकरण $4x^3 - 9x^2 - 6x + 2 = 0$ का अंतरालों $]-1, 0[$, $]0, 1[$ और $]2, 3[$ में से प्रत्येक अंतराल में एक वास्तविक मूल होता है।

10.3 बिन्दुश: सांतव्य और एक समान सांतव्य

इस भाग में हम आपको फलन के एक समान सांतव्य की संकल्पना से परिचित कराएंगे। एक समान सांतत्य (uniform continuity) की संकल्पना फलन के पूरे प्रांत में दी जाती है जबकि सांतत्य की संकल्पना बिन्दुश: (pointwise) होती है अर्थात् यह फलन के प्रांत में दी जाती है। यदि फलन f समुच्चय A के बिन्दु a पर संतत हो, तब संख्या $\varepsilon > 0$ के संगत एक ऐसी धन संख्या $\delta(a)$ का अस्तित्व होता है (यहां हम δ के स्थान पर $\delta(a)$ का प्रयोग इसलिए कर रहे हैं, क्योंकि सामान्यत: δ लिए गए बिन्दु a पर निर्भर करता है) जिससे कि $|x - a| < \delta(a)$ से यह अर्थ निकलता है कि $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. संख्या $\delta(a)$, ε पर भी निर्भर करती है। जब बिन्दु a में परिवर्तन होता है तो $\delta(a)$ में भी परिवर्तन होता है। अत: एक ऐसा δ हो भी सकता है और नहीं भी हो सकता है जो A के सभी बिन्दुओं a पर लागू होता है। यदि एक ऐसा δ हो जो A के सभी बिन्दुओं a के लिए सर्वनिष्ठ हों, तो हम यह कहते हैं कि A पर f एक समानत: संतत है। अत: एक समान सांतत्य की परिभाषा यह है।

परिभाषा : फलन का एकसमान सांतत्य

मान लीजिए f सभी वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में आविष्ट उपसमुच्चय A पर परिभाषित एक फलन हैं। यदि किसी संख्या $\varepsilon > 0$ के संगत एक (केवल ε पर निर्भर) ऐसी संख्या $\delta > 0$ का अस्तित्व होता हो कि

$|x - y| < \delta, x, y \in A \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

तब हम यह कहते हैं कि f उपसमुच्चय A पर एकसमानतः संतत है।

एक समान सांतव्य की परिभाषा से तुरंत यह परिणाम प्राप्त होता है कि समुच्चय A में एक समान सांतव्य से यह अर्थ निकलता है कि A में बिन्दुशः सांतव्य हैं। इसे निम्नलिखित प्रमेय में सिद्ध किया गया है।

प्रमेय 4 : यदि फलन f समुच्चय A में एक समानतः संतत हो तो यह A में संतत होता है।

उपपत्ति : क्योंकि फलन f समुच्चय A में एकसमानतः संतत हैं, इसलिए यदि एक धन संख्या ε दी गई हो, तो इसके संगत एक ऐसी धन संख्या δ होती है कि

$$|x - y| < \delta; x, y \in A \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad \ldots(7)$$

मान लीजिए a, A का एक बिन्दु है। तब ऊपर दिए गए परिणाम (7) में $y = a$ लेने पर हमें यह प्राप्त होता है

$|x - a| < \delta ; x \in A \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$

जिससे यह पता चलता है कि a पर f संतत है। क्योंकि a, A का कोई एक बिन्दु है, इसलिए इससे यह पता चलता है कि A में f संतत है।

अब हम कुछ उदाहरण लेंगे।

उदाहरण 6 : दिखाइए कि

$f(x) = x \ \forall x \in R$

द्वारा दिया गया फलन $f : R \to R$, R पर एक समानतः संगत है।

हल : दिए हुए $\varepsilon > 0$ के लिए δ को स्वयं ε माना जा सकता है जिससे कि

$|x - y| < \delta = \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| = |x - y| < \varepsilon.$

उदाहरण 7 : दिखाइए कि

$f(x) = x^2 \ \forall x \in R$

द्वारा दिया गया फलन $f : R \to R$, R पर एक समानतः संतत नहीं है।

हल : मान लीजिए ε एक धन संख्या है और मान लीजिए $\delta > 0$ एक स्वेच्छ धन संख्या है। यहां

$x > \frac{\varepsilon}{8}$ और $y = x + \frac{\delta}{2}$ लीजिए। तब

$$|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y|\,|x - y|$$

$$= \frac{\delta}{2}|x + y| = \frac{\delta}{2}\left|2x + \frac{\delta}{2}\right|$$

$$> \frac{\delta}{2}\left(\frac{2\varepsilon}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right) = \varepsilon + \frac{\delta^2}{4} > \varepsilon$$

अर्थात् चाहे हम कोई भी $\delta > 0$ क्यों न लें, पर ऐसी वास्तविक संख्याओं x, y का अस्तित्व होता है कि $|x - y| < \delta$, पर $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$ जिससे यह सिद्ध हो जाता है कि f एक समानतः संतत नहीं है। परन्तु हम जानते हैं कि f, R पर संतत फलन है।

उदाहरण 8 : ऊपर दिए गए उदाहरण में यदि f का प्रांत संवृत्त अंतराल $[-1, 1]$ हो तो दिखाइए कि $[-1, 1]$ पर f एकसमानतः संतत है।

हल : $\varepsilon > 0$ दिया हुआ, के लिए $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ लीजिए। यदि $|x - y| < \delta$ और $x, y \in [-1, 1]$

तो। के लिए त्रिभुज असमिका (triangle inequality) का प्रयोग करने पर हमें यह प्राप्त होता है।

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |x^2 - y^2| = |x + y|\,|x - y| \\
&< \delta\,(|x| + |y|) \\
&\leq 2\,\delta \text{ (क्योंकि } |x| \leq 1, |y| \leq 1) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

प्रश्न 9

दिखाइए कि $f(x) = x^n$, $n > 1$, R पर एकसमानतः संतत नहीं हैं हालांकि प्रत्येक $n > 1$ के लिए यह R पर एक संतत फलन हैं।

प्रश्न 10

दिखाइए कि फलन $f(x) = \frac{1}{x}$, जहां $0 < x < 1$ प्रत्येक x के लिए संतत हैं पर] 0, 1 [पर एकसमानतः संतत नहीं हैं।

प्रश्न 11

दिखाइए कि फलन $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ अंतराल] 0, 1[पर एकसमानतः संतत नहीं हैं, हालांकि यह उस अंतराल में संतत है।

प्रश्न 12

दिखाइए कि $f(x) = c\,x$, जहां c एक नियत शून्येतर वास्तविक संख्या है, R पर एक समानतः संतत फलन हैं।

प्रश्न 10 में हमने यह देखा है कि विवृत्त अंतराल] 0, 1 [पर परिभाषित फलन $f(x) = 1/x$,] 0, 1 [पर एकसमानतः संतत नहीं हैं यद्यपि यह] 0, 1 [पर एक संतत फलन है। इसी प्रकार उदाहरण 7 में हमने यह देखा है कि $f(x) = x^2$ भी से परिभाषित फलन f पूरी वास्तविक रेखा R पर संतत है पर R पर एकसमानतः संतत नहीं हैं। फिर भी, यदि परिबद्ध संवृत्त अंतराल [–1, 1] इस फलन का प्रांत हो, तो यह एकसमानतः संतत होता है। यह गुणधर्म फलन f का जहां $f(x) = x^2$, एक विशेष गुणधर्म नहीं है, पर यह वास्तविक रेखा के परिबद्ध संवृत्त अंतरालों पर परिभाषित सभी संतत फलनों का गुणधर्म होता है। इसे हम निम्नलिखित प्रमेय में सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 5 : यदि f एक परिबद्ध और संवृत्त अंतराल [a, b] पर संतत फलन है तो [a, b] पर एकसमानतः संतत होता है।

उपपत्ति : मान लीजिए f परिबद्ध संवृत्त अंतराल [a, b] पर परिभाषित एक संतत फलन है।

मान लीजिए S अंतराल [a, b] की सभी वास्तविक संख्याओं c का समुच्चय इस प्रकार है कि दिए हुए $\varepsilon > 0$ के लिए घनात्मक संख्या d_c का अस्तित्व होता है ताकि संवृत्त अंतराल [a, c] से संबंधित बिन्दुओं x_1, x_2 के लिए

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \qquad \text{जब कभी } |x_1 - x_2| < d_c$$

(दूसरे शब्दों में अंतराल [a, c] पर f एक समानतः सांतव्य है)

स्पष्ट है कि $a \in S$ अतः S अरिक्त है। इसके अलावा b. समुच्चय S का उपरि परिबंध है। वास्तविक रेखा के पूर्णता गुणधर्म के अनुसार, S का न्यूनतम उपरि परिबंध है जिसे हम k से सूचित करते हैं अर्थात्

$k \leq b$.

अब f, k पर संतत है। अतः किसी दिए गए $\varepsilon > 0$ के लिए, वास्तविक संख्या d_k का अस्तित्व रहता है ताकि $|f(x) - f(k)| < \varepsilon/2$ जब कभी $|x - k| < d_k$ हो तो। ...(8)

चूंकि k समुच्चय S का उपरि परिबंध है इसलिए $k - \frac{1}{2} d_k$ समुच्चय S का उपरि परिबंध नहीं है। अतः बिन्दु $c \in S$ का अस्तित्व इस प्रकार होता है कि

$$k - \frac{1}{2} d_k < c \leq k \qquad ...(9)$$

क्योंकि $c \in S$. S की परिभाषा से हम देखते हैं कि एक ऐसे d_c का अस्तित्व होता है ताकि

$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ जब कभी $|x_1 - x_2| < d_c$, $x_1, x_2 \in [a, c]$ ...(10)

मान लीजिए $d = \min\left[\left(\frac{1}{2}\right) d_k, d_c\right)\Big]$ है और

$$b' = \min\left[k + \left(\frac{1}{2}\right) d_k, b\right] \text{ है।}$$

अब यदि $x_1, x_2 \in [a, b']$ और $|x_1 - x_2| < d$
हैं और यदि d और d_c के चयन से

$x_1, x_2 \in]a, c]$, $|x_1 - x_2| < d \leq d_c$ और इस प्रकार (10) द्वारा $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ है।
यदि x_1, x_2 में से कोई भी [a, c] में नहीं है तो दोनों x_1, x_2 अंतराल $]k - d_k, k + d[$ से संबंधित हैं। उपर्युक्त (9) द्वारा $x_1 \in [a, c[$ के लिए, यह अर्थ, निकलता है कि

$b' \geq x_1 > c > k - \frac{1}{2} d_k > k - d_k$. b' के चयन के द्वारा $x_1 \leq b'$ का यह अर्थ निकलता है कि

$x_1 \leq k + \left(\frac{1}{2}\right) d_k < k + d_k$ अर्थात्

$$k - d_k < k - \frac{1}{2} d_k < x_1 < k + \left(\frac{1}{2}\right) d_k < k + d_k \qquad ...(11)$$

$|x_1 - x_2| < d$ का अर्थ है कि $x_1 - \frac{1}{2} d_k < x_2 < x_1 + \frac{1}{2} d_k$

क्योंकि d के चयन द्वारा $d \leq \left(\frac{1}{2}\right) d_k$ है। इस प्रकार हमें उपर्युक्त (11) से प्राप्त होता है –

$$k - d_k < x_1 - \frac{1}{2} d_k < x_2 < x_1 + \left(\frac{1}{2}\right) d_k$$

$$< k + 1\left(\frac{1}{2}\right) d_k + \left(\frac{1}{2}\right) d_k = k + d_k \qquad ...(12)$$

(11) और (12) से हमें पता चलता है कि
$x_1, x_2 \in]k - d_k, k + d_k[$.
इस तरह हमें $|x_1 - k| < d_k$ और $|x_2 - k| < d_k$, प्राप्त होता है जिससे (8) के अनुसार यह अर्थ निकलता है कि $|f(x_1) - f(k)| < \varepsilon/2$ और

$|f(x_2) - f(k)| < \frac{\varepsilon}{2}$ इस तरह,

$$|f(x) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(k)| + |f(k) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

दूसरे शब्दों में यदि $|x_1 - x_2| < d$ और x_1, x_2 [a, b'] में हो, तो $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ जिससे यह सिद्ध होता है कि $b' \in S$ अर्थात् $b' \leq k$.

पर, हमने b' ऐसा किया है कि $k \leq b'$ अतः $k \leq k + \left(\frac{1}{2}\right) d_k$ और $k \leq b$ इस तरह हमें

$k = b'$ प्राप्त होता है और, यह केवल तभी हो सकता है जबकि $k = b$ क्योंकि यदि $k < b$ अर्थात्

$$k = b' = \min\left(k + \left(\frac{1}{2}\right) d_k, b\right) < b$$

तो इससे यह अर्थ निकलता है कि $\min\left(k + \left(\frac{1}{2}\right) d_k, b\right) = k + \left(\frac{1}{2}\right) d_k = b^1$

जहां $b' \in S$ अर्थात् $k + \left(\frac{1}{2}\right) d_k$, S में है और k से बड़ा है, जो कि इस बात का अंतर्विरोध करता है कि k, S का न्यूनतम उपरि परिबंध (l.u.b.) है । इस तरह, हमने यह दिखाया है कि $k = b \in S$ दूसरे शब्दों में हम यह कह सकते हैं कि (b के संगत) एक ऐसी धन संख्या d_b का अस्तित्व है जिससे कि $|x_1 - x_2| < d_b$, $x_1, x_2 \in [a, b]$, से यह अर्थ निकलता है कि $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.
अतः f, [a, b] में एकसमानतः संतत हैं ।

आप यहां यह देख सकते हैं कि किसी फलन के एकसमान सांतव्य से यह अर्थ निकलता है कि फलन सांतव्य है पर इसका विलोम सही नहीं हैं जैसा कि प्रश्न 10 में आप देख चुके हैं । विलोम तब सही होता है जबकि सांतव्य परिबद्ध संवृत्त अंतराल में हो ।

इस इकाई को समाप्त करने से पहले यहां हम संतत फलन के व्युत्क्रम फलन (inverse function) के सांतव्य से संबंधित एक प्रमेय का (उपपत्ति के बिना) कथन देंगे ।

प्रमेय 6 : व्युत्क्रम फलन प्रमेय

मान लीजिए $f : I \to J$ एक फलन है जो एकैकी (One-One) और आच्छादी (onto) दोनों हैं । यदि I पर f संतत हैं, तो J पर $f^{-1} : J \to I$ संतत होता है ।

उदाहरण के लिए

$f(x) = \sin x$

से परिभाषित फलन

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \left[-1, 1\right]$$

एकैकी और आच्छादी दोनों हैं और क्योंकि $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ पर f संतत है, इसलिए प्रमेय 6 के अनुसार

$f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$

से परिभाषित फलन

$$f^{-1} : [-1, 1] \to \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

[-1, 1] पर संतत है ।

10.4 सारांश

इस इकाई में आपको परिबद्ध संवृत्त अंतरालों पर संतत फलनों के गुणधर्मों से परिचित कराया गया है । यहां आपने यह देखा है कि यदि अंतराल परिबद्ध और संवृत्त नहीं हैं तो ये गुणधर्म लागू नहीं होते । इन गुणधर्मों का अध्ययन भाग 10.2 में किया गया है । यहां यह सिद्ध किया गया है कि यदि फलन f एक परिबद्ध और संवृत्त अंतराल पर संतत है तो यह परिबद्ध होता है और यह अपने परिबंध भी प्राप्त कर लेता है । इसी भाग में हमने मध्यवर्ती मान प्रमेय को अर्थात् यदि f दो बिन्दुओं a और b को आविष्ट करने वाले अंतराल पर संतत हैं, तो f, f(a) और f(b) के बीच के प्रत्येक मान को धारण करता है, को सिद्ध किया है । भाग 10.3 में एक समान सांतव्य की धारणा पर चर्चा की गई है । यहां हमने यह सिद्ध किया है कि यदि फलन f समुच्चय A में एक समानतः संतत है तो यह A में संतत होता है । पर, इसका विलोम सही नहीं है । यहां यह सिद्ध किया गया है कि यदि फलन एक परिबद्ध और संवृत्त अंतराल पर संतत है तो यह अंतराल में एक समानतः संतत होता है । यदि अंतराल परिबद्ध और संवृत्त नहीं है, तो ये गुणधर्म लागू नहीं होते इसे कुछ उदाहरणों की सहायता से समझाने की कोशिश की गई है ।

10.5 हल/संकेत/उत्तर

1) $]-\infty, \infty[$ के बिन्दु c पर सांतव्य आसानी से पता चलता है ।

$|f(x) - f(c)| = |x - c| < \varepsilon$ यदि $|x - c| < \delta$, जहाँ $\delta = \varepsilon$.
f का परिसर $\mathbf{R} =]-\infty, \infty[$ जो कि परिबद्ध नहीं है, अतः f परिबद्ध नहीं है।

2) $F(x) = 1$ और $G(x) = (x-2)^2, \forall x \in]2, 3[$, द्वारा दिए गए फलन F और G अंतराल $]2, 3[$ में संतत है और $G(x) \neq 0$. अतः $\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{1}{(x-2)^2}$, अर्थात्, $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$, $]2, 3[$ में संतत हैं। इसका परिसर $]1, \infty[$ परिबद्ध नहीं है।

3) f के सांतत्य को इकाई 9 में सिद्ध किया गया है। f का परिसर $=]0, 1[$, f का महत्तम निम्न परिबंध (g.l.b.) = 6 और f का न्यूनतम उपरि परिबंध (l.u.b.) = 1. और ये प्राप्त नहीं होते।

4) f के सांतत्य को आसानी से सिद्ध किया जा सकताा है (इकाई 9 देखिए) f का महत्तम निम्न परिबंध 0 है जिसे f प्राप्त नहीं करता।

5) क्योंकि बहुपद होने के कारण

$f(x) = 16x^4 + 64x^4 - 32x^2 - 117$

अंतराल $[1, 2]$ पर संतत फलन है,

$f(1) = 16 + 64 - 32 - 117 = -69 < 0.$
$f(2) = 256 + 512 - 128 - 117 = 523 > 0$

अतः प्रमेय 3 के उपप्रमेय 1 के अनुसार $]1, 2[$ में एक ऐसे x_0 का अस्तित्व होता है जहाँ कि $f(x_0) = 0$, अर्थात् समीकरण

$16x^4 + 64x^3 - 32x^2 - 117 = 0$

के एक मूल x_0, $1 < x_0 < 2$, का अस्तित्व होता है।

6) मान लीजिए $f(x) = \cos x - x$. तब f, $[0, \pi]$ पर एक संतत फलन होता है। $f(0) = 1 > 0$ और $f(\pi) = -(1 + \pi) < 0$, अतः, $]0, \pi[$ में, एक ऐसे x का अस्तित्व होता है जहाँ कि $f(x) = 0$. अर्थात् $\cos x - x = 0$ का एक वास्तविक मूल होताा है जो 0 और π के बीच स्थित होता है।

7) मान लीजिए $f(x) = a_{2n+1} x^{2n+1} + \ldots\ldots + a_0$, $a_{2n+1} \neq 0$, विषमघात वाला एक बहुपद है। यह पूर्ण वास्तविक रेखा R पर एक संतत फलन है। व्यापकता में कोई कमी लाए बिना, हम यहां यह मान सकते हैं कि $a_{2n+1} > 0$.

तब, $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^{2n+1}} = a_{2n+1} > 0.$

अतः हम एक ऐसी वृहत्त वास्तविक संख्या b प्राप्त कर सकते हैं, जिससे कि $f(b) > 0$.

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^{2n+1}} = a_{2n+1} > 0$. इसकी पुष्टि कीजिए।

अतः हम एक ऐसी वास्तविक संख्या a प्राप्त कर सकते हैं जिससे कि $f(a) < 0$ (जब x ऋणात्मक होता है तो x^{2n+1} भी ऋणात्मक होता है) क्योंकि f अंतराल $[a, b]$ पर संतत है, और $f(a) < 0$ और $f(b) > 0$. अतः प्रमेय 3 के उपप्रमेय 1 के अनुसार, $]a, b[$ में, एक ऐसी वास्तविक संख्या x_0 का अस्तित्व होता है जहाँ कि $f(x_0) = 0$. तब x_0, बहुपद f का, एक वास्तविक मूल होता है।

8) यदि $f(x) = 4x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 6x + 2$,

तो f पूर्ण वास्तविक रेखा **R** पर संतत फलन होता है, अतः अंतरालों $[-1, 0]$, $[0, 1]$ और $[2, 3]$ पर भी संतत होता है।

$f(-1) = -4 - 9 + 6 + 2 < 0$ और $f(0) = 2 > 0$.

अतः, अंतराल $]-1, 0[$ में, एक मूल x_0 का अस्तित्व होता है, जबकि $f(x_0) = 0$.

और, $f(0) = 2 > 0$,

$f(1) = 4 - 9 - 6 + 2 < 0$.

अतः, अंतराल $]0, 1[$ में, एक मूल x_1 का अस्तित्व होता है। फिर से,

$f(2) = 32 - 36 - 12 + 2 < 0$

$f(3) = 108 - 81 - 18 + 2 > 0$.

अतः, अंतराल $]2, 3[$ में, एक मूल x_2 का अस्तित्व होता है।

9) $f(x) = x^n, n > 1$. उदाहरण 7 में, हम यह सिद्ध कर चुके हैं कि $f(x) = x^2$, $\mathbf{R}$ पर संतत है पर एक समानतः संतत नहीं हैं। व्यापक $n > 1$ के लिए भी उपपत्ति ठीक इसी प्रकार की है।
अब मान लीजिए $f(x) = x^n$. यहां $\delta > 0$ को स्वेच्छया लिया गया है और इसे नियत रखा गया है। मान लीजिए ε एक धन संख्या है। $x > 1$ लीजिए, जहाँ

$$1 > \left(\frac{2\varepsilon}{\delta n}\right)^{1/n-1}$$

अर्थात्, $n > \frac{2\varepsilon}{\delta}$. $y = x + \frac{\delta}{2}$ लीजिए, तब $|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$ और, $x, y > 1$.

$$|f(x) - f(y)| = |x^n - y^n| = |x - y|\,|x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}|$$

$$> \left(\frac{\delta}{2}\right) n > \left(\frac{\delta}{2}\right)\left(\frac{2\varepsilon}{\delta}\right) = \varepsilon.$$

इसलिए f एक समानतः संतत नहीं है।

10) $0 < x < 1$ के लिए, $f(x) = \frac{1}{x}$.

मान लीजिए a नियत है जिससे कि $0 < a < 1$. तब, x_n $(0 < x_n < 1)$ को अभिसरित होता है से यह अर्थ निकलता है कि $\frac{1}{x_n}, \frac{1}{a}$ की ओर अभिसरित होता है, अतः f, a पर संतत है और

क्योंकि a स्वेच्छ है, इसलिए f, $]0, 1[$ पर, संतत है। मान लीजिए $\delta > 0$ स्वेच्छया ली गई एक धन संख्या है और इसे नियत रखा गया है।

$x < \delta$ और $y = \frac{x}{1+x}$ लीजिए। स्पष्ट है $0 < y < x$. इस तरह, $|x - y| = x - y < x < \delta$, और

$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = 1$. तब, $\varepsilon = 1$ के लिए, ऐसे किसी $\delta > 0$ का अस्तित्व नहीं है जिससे हमारा काम

सिद्ध होता हो। इसलिए, f एक समानतः संतत नहीं है।

11) $f(x) = \sin\frac{1}{x}, 0 < x < 1$

फलन $g(x) = \frac{1}{x}$, $]0, 1[$ पर, संतत फलन है और $h(x) = \sin x$ भी $]0, 1[$ पर संतत फलन

है। अतः $f(x) = h(g(x))$, $]0, 1[$ पर, संतत फलन होगा। अब हम यह सिद्ध करेंगे कि $]0, 1[$ पर यह एक समानतः संतत नहीं है। मान लीजिए $0 < \varepsilon < 1$ और $\delta > 0$ एक धन संख्या है।

$x = \frac{1}{n\pi}$, $y = \frac{1}{(n\pi + \pi/2)}$. तब, $|f(x) - f(y)| = 1$.

इस तरह, $\delta > 0$ के लिए, n का चयन ऐसे कीजिए कि $x < \delta$. तब, $x, y \in]0, \delta[$ से हम पाते हैं कि

$|x - y| < \delta$ लेकिन $|f(x) - f(y)| = 1 > \varepsilon$.

अत: f एक समानत: संतत नहीं है।

12) मान लीजिए $\varepsilon > 0$, $\delta < \frac{\varepsilon}{|c|}$. तब, जब कभी $|x - y| < \delta$, तब हमें यह प्राप्त होता है $|f(x) - f(y)| = |cx - cy| = |c|\,|x - y| < |c|\,\delta < \varepsilon$. और, इस तरह, f एक समानत: संतत है।

10.6 शब्दावली

एकसमान सांतव्य	:	Uniform continuity
न्यूनतम उपरि परिबंध	:	Least upper bound (l.u.b.)
परिबंध	:	Bound
परिबद्ध संवृत्त अंतराल	:	Bounded closed interval
बिन्दुश: सांतव्य	:	Pointwise continuity
मध्यवर्ती मान प्रमेय	:	Intermediate value theorem
महत्तम निम्न परिबंध	:	Greatest lower bound (g.l.b.)

समीक्षा

इस खंड में आपको फलन f(x) की सीमा, जबकि x बिन्दु a की ओर प्रवृत्त होता हो, की संकल्पना से परिचित कराया गया है। यहां आपको अनुक्रमिक सीमा की संकल्पना से भी परिचित कराया गया है इसके बाद फलन के सांतत्य और एकसमान सांतत्य की संकल्पना पर चर्चा की गई है। यहां परिबद्ध संवृत्त अंतरालों पर संतत फलनों के गुणधर्म सिद्ध किए गए हैं। यहां आपने यह भी देखा है कि उन स्थितियों में ये गुणधर्म लागू नहीं होते, जबकि फलन उन अंतरालों पर संतत हो जो परिबद्ध या संवृत्त नहीं हैं।

इस खंड में दिए गए उद्देश्यों की प्राप्ति आपने कर ली है कि नहीं, इसके लिए अब आप नीचे दिए गए आत्मनिर्धारण प्रश्नों को हल कीजिए। आप अपने हल/उत्तर की मिलान अंत में दिए गए हल/उत्तर से कर सकते हैं :

1) निम्नलिखित फलनों की सीमाएं ज्ञात कीजिए :

i) $f(x) = x \cos \dfrac{1}{x}, x \neq 0$ जबकि $x \to 0$

ii) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}, x \neq 0$ जबकि $x \to \infty$

iii) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}, x \neq 0$ जबकि $x \to \infty$

2) निम्नलिखित फलनों की सीमाएं, यदि उनका अस्तित्व हो, ज्ञात कीजिए:

i) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{b}}{x - b}, x \neq b$ जहां $b > 0$ जबकि $x \to b$

ii) $x \neq 0$ के लिए, $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-1/x}}$ जबकि $x \to 0+$

iii) $f(x) \begin{cases} 1 - x \text{ जब } x \leq 1 \\ 2x \text{ जब } x > 1 \end{cases}$ जबकि $x \to 1$

3) बताइए कि निम्नलिखित फलनों में से किस फलन की सीमा का अस्तित्व है और किसका नहीं

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{जब } x > 1 \\ 1 & \text{जब } x = 1 \\ 2x & \text{जब } x < 1 \end{cases}$$

जब $x \to 1$.

ii) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}, x \in R$

जबकि $x \to 1$.

iii) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}, x \neq 0$ जबकि $x \to 0$.

iv) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}\left[\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{3x + 5}\right]$ जबकि $x \to 1$.

4) बताए गए बिन्दुओं पर निम्नलिखित फलनों के सांतत्य पर चर्चा कीजिए :

i) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 1 \text{ के लिए} \\ 0 & x = 1 \text{ के लिए} \end{cases}$

$x = 1$ पर

ii) $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \text{ के लिए} \\ 0 & \text{अन्यथा} \end{cases}$

$x = 1$ पर

iii) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1}$ जब $x \neq 1$

$f(1) = 2$

$x = 0$ पर.

iv) $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{1/x} & \text{यदि } x \neq 0 \\ 1 & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$

$x = 0$ पर

v) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{यदि } x \neq 0 \\ 1 & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$

$x = 0$ पर

5) दिखाइए कि $f(x) = \dfrac{1}{1 + |x|}$

से परिभाषित फलन $f : R \to R$ अपना निम्नक प्राप्त नहीं करता।

6) दिखाइए कि $f(x) = x$

से परिभाषित फलन $f : R \to R$, $[1, \infty[$ में परिबद्ध नहीं है, पर संतत है।

7) बताइए कि निम्नलिखित फलनों में से कौन-कौन से फलन बताए गए अंतराल में एक समानतः संतत हैं। साथ में कारण भी दीजिए :

i) $f(x) = \tan x,\ x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$

ii) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3}$, $[1, 4[$ पर

8) बताइए कि निम्नलिखित फलनों में से किस-किस फलन का $x = 0$ पर अपनेय असांतत्य (removable discontinuity) है।

i) $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{1/x} & x \neq 0 \text{ के लिए} \\ 1 & x = 0 \text{ के लिए} \end{cases}$

ii) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & x \neq 0 \text{ के लिए} \\ 2 & x = 0 \text{ के लिए} \end{cases}$

iii) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \text{ के लिए} \\ 2 & x = 0 \text{ के लिए} \end{cases}$

iv) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{|x| + x^2} & x \neq 0 \text{ के लिए} \\ 1 & x = 0 \text{ के लिए} \end{cases}$

9) **निम्नलिखित के उदाहरण दीजिए :**

i) वह फलन जो नकुन्नापि संतत (nowhere continuous) हो, पर उसका निरपेक्ष मान सर्वत्र संतत (everywhere continuous) हो।

ii) वह फलन जो केवल एक बिन्दु पर संतत हो।

iii) एक रैखिक फलन जो संतत हो और समीकरण

$f(x + y) = f(x) + f(y)$ को संतुष्ट करता हो।

iv) दो एक समान संतत फलन जिनका गुणनफल एक समानतः संतत नहीं हो।

10) बताइए कि निम्नलिखित कथनों में से कौन से कथन सत्य हैं और कौन से असत्य

i) बहुपद फलन अपने प्रांत के प्रत्येक बिन्दु पर संतत होता है।

ii) परिमेय फलन प्रत्येक बिन्दु पर, जिसपर वह परिभाषित है, संतत होता है।

iii) यदि फलन संतत है, तो वह सदा एकसमानतः संतत होता है।

iv) $x > 0$ के लिए फलन e^x और $\log x$ प्रतिलोम फलन हैं और दोनों ही प्रत्येक $x > 0$ के लिए संतत हैं।

v) सभी वास्तविक x के लिए, फलन $\cos x$ और $\cos^{-1}x$ संतत होते हैं।

vi) प्रत्येक संतत फलन परिबद्ध होता है।

vii) संतत फलन सदा एकदिष्ट (monotonic) होता है।

viii) $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ के लिए फलन $\sin x$ एकदिष्ट और संतत होता है।

ix) प्रत्येक $x \in R$ के लिए फलन $\cos x$ संतत और एकदिष्ट होता है।

x) फलन $|x|$, $x \in R$ संतत है।

उत्तर/संकेत

1) i) सीमा शून्य है, क्योंकि $\left|x \cos \frac{1}{x}\right| \leq |x|$

और $|x|$ की सीमा, जबकि $x \to 0$, शून्य है

ii) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x} = 1$

iii) $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|}$, $x \neq 0$ के लिए और $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{|x|} = 0$

इसलिए $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

2) i) $\frac{1}{2\sqrt{b}}$

ii) 1.

iii) $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = 0$ और $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = 2$. इसलिए

$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ का अस्तित्व नहीं है

3) i) $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = 2$ और $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = 2$ इसलिए

$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ का अस्तित्व है और यह 2 है।

ii) $-3/5$

iii) 4

iv) $1/32$

4) i) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$ पर $f(1) = 0$ इसलिए 1 पर f असंतत है

ii) $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = 1$ और $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = 0$ इसलिए

$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ का अस्तित्व नहीं है। अतः 1 पर f असंतत है।

iii) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ का अस्तित्व है और यह 4 के बराबर है। अतः f असंतत है।

iv) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = e$ पर $f(0) = 1$. इसलिए 0 पर f असंतत है।

v) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ पर $f(0) = 1$ इसलिए 0 पर f असंतत है।

5) Inf. $f = 0$ जिसे f प्राप्त नहीं करता

6) f का परिसर $= [1, \infty[$, जो परिबद्ध नहीं है।

7) दोनों ही फलन एक समानतः संतत हैं, क्योंकि ये परिबद्ध संवृत्त अंतराल में संतत हैं।

8. i) और iii)

9) i) $\begin{cases} f(x) = 1 & \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \\ \quad = -1 & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$

ii) $f(x) = x$ यदि x परिमेय है

$f(x) = -x$ यदि x अपरिमेय है

सांतत्य बिन्दु केवल 0 है।

iii) $f(x) = c\,x \;\forall x \in R$ जहां c एक नियत अचर है

iv) $f(x) = x,\ g(x) = \sin x \;\forall x \in R.$

f(x) और g(x) दोनों ही एक समानतः संतत हैं, या इनका गुणनफल $f(x)\,g(x) = x \sin x$, R पर एक समानतः संतत नहीं हैं।

10) i) सत्य

ii) सत्य

iii) असत्य

iv) सत्य

v) सत्य

vi) असत्य

vii) असत्य

viii) सत्य

iv) असत्य

x) सत्य