इकाई 9 सांतत्य

इकाई की रूपरेखा

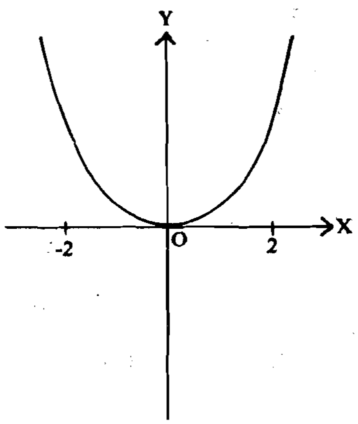
9.1 प्रस्तावना

मान लीजिए फलन या तो विवृत्त अंतराल या संवृत्त अंतराल पर परिभाषित हैं। यदि आप इन फलनों के ग्राफ खींचे तो आप पाएंगे कि कुछ ग्राफ ऐसे हैं कि उन्हें कलम उठाए बिना ही एक ही बार में संतत रूप में खींचा जा सकता है जबकि कुछ ग्राफ ऐसे हैं जिन्हें खींचने के लिए कलम को अनेक बार उठाना रखना पड़ता है। उदाहरण के लिए, निम्नलिखित दो फलनों के ग्राफ खींचिए :

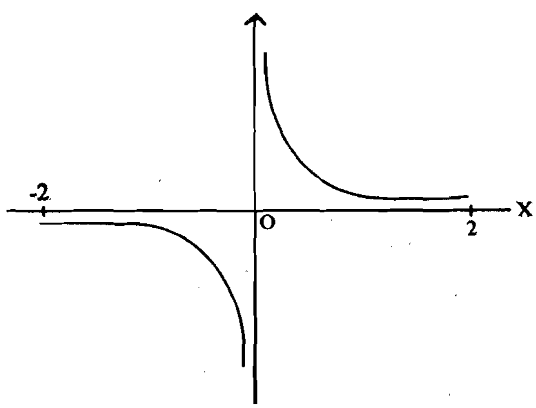
क) $f(x) = x^2, x \in [-2, 2]$

ख) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in [-2, 2], x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

इन्हें खींचने पर जो ग्राफ प्राप्त होंगे उन्हें चित्र 1(क) और 1(ख) में दिखाया गया है।



चित्र 1 (क)



चित्र 1 (ख)

यहां आप यह देख सकते हैं कि पहले फलन के ग्राफ को कागज पर से कलम उठाए बिना "संतत" गति में खींचा जा सकता है जबकि दूसरे फलन के ग्राफ को इस ढंग से नहीं खींचा जा सकता। यह पहले फलन का एक रोचक गुणधर्म है जो दूसरे फलन में नहीं है। अतः यदि इसे एक गणितीय अर्थ दिया जाए तो आश्चर्य तो हो ही सकता हैं।

वस्तुतः पिछली अनेक शताब्दियों के गणितज्ञों को इस प्रश्न का सामना करना पड़ा है कि "क्या उन वक्रों को निर्दिष्ट करने की कोई विधि है जिन्हें कलम को एक बार ही चलाकर खींचा जा सकता है ?"

इस प्रश्न का उत्तर "हां" में है और इन वक्रों को निरूपित करने वाले फलनों को संतत फलन (continuous function) के नाम से जाना जाता है। अब यह प्रश्न उठता है कि **संतत फलन का गणितीय**

अर्थ क्या हैं ? और चित्र 1 (ख) में दिखाए गए फलन जैसे फलन कैसे फलन हैं ? इस इकाई में हम इन प्रश्नों और साथ ही कुछ और प्रश्नों के उत्तर देने की कोशिश करेंगे ।

इकाई 8 में हमने संख्या A की ओर प्रवृत्त होने वाले फलन f(x) के मानों के, जबकि चर x एक दिए हुए बिन्दु a की ओर प्रवृत्त होता हो, अपने आंतःप्रज्ञ विचार को स्पष्ट कर दिया था । फलनों के सतत ग्राफों में, जैसा कि आपने चित्र 1 (क) और 1 (ख) में देखी है, x का a की ओर प्रवृत्त होने पर फलानेक मान, f(a) की ओर प्रवृत्त होता है । जब ग्राफ में कोई भंग (break) याजम्प (jump) होता है तो उस बिन्दु पर यह गुणधर्म लागू नहीं होता । अतः सांतत्य (continuity) की यह संकल्पना $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ के मान और बिन्दु a पर फलन f के मान से संबंधित होती हैं । इस इकाई में हम शुद्ध गणितीय भाषा में एक दिए हुए बिन्दु a पर एक फलन का सांतत्य परिभाषित करेंगे । तब हम फलन के सांतत्य को f के प्रांत, जो कि f का पूरा प्रांत भी हो सकता है, के अरिक्त उपसमुच्चय (non-empty subset) पर भी लागू करेंगे । हम संतत फलनों पर जोड़, घटाना, गुणा और भाग जैसी बीजीय संक्रियाओं के प्रभाव का भी अध्ययन करेंगे ।

संतत फलनों के गुणधर्मों पर चर्चा करने और एक समान सांतत्य (uniform continuity) की संकल्पना को समझने के लिए हम इन परिणामों का प्रयोग इकाई 10 में करेंगे ।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन कर लेने के बाद आपः

- अपने प्रांत के एक बिन्दु पर फलन का सांतत्य परिभाषित कर सकेंगे,
- यह मालूम कर सकेंगे कि दिया हुआ फलन संतत है कि नहीं,
- एक दिए हुए वर्ग के संतत फलनों से नए संतत फलन प्राप्त कर सकेंगे ।

9.2 संतत फलन (Continuous functions)

हमने यह देखा है कि फलन f की सीमा जबकि चर x फलन f के प्रांत के एक दिए हुए बिन्दु a की ओर प्रवृत्त होता हो, उस बिन्दु a पर फलन के मान पर बिल्कुल निर्भर नहीं करती बल्कि वह केवल a के समीपस्थ बिन्दुओं पर फलन के मानों पर निर्भर करती है । वास्तविकता तो यह है कि यदि फलन f, a पर परिभाषित न भी हो तो भी $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ का अस्तित्व हो सकता है । उदाहरण के लिए $\lim\limits_{z \to 1} f(x)$ का अस्तित्व होता है जबकि

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

हालांकि x = 1 पर f परिभाषित नहीं है ।

हमने यह भी देखा है कि यदि $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ का अस्तित्व हो, तो भी यह आवश्यक नहीं है कि यह f(a) ही हो जबकि इसका अस्तित्व हो , (इकाई 8 का उदाहरण 2 देखिए) अतः हम उस विशेष स्थिति पर विचार करना चाहेंगे जबकि $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ और f(a) का अस्तित्व हो और दोनों बराबर हों । जिस फलन के ये गुणधर्म होते हैं, उसे बिन्दु a पर संतत फलन कहा जाता है । हम इसकी परिशुद्ध परिभाषा यहां दे रहे हैं ।

परिभाषा 1 : एक बिन्दु पर फलन का सांतत्य

समुच्चय R के उपसमुच्चय S पर परिभाषित फलन f को बिन्दु $a \in S$ पर संतत कहा जाता है, यदि

i) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ का अस्तित्व हो और परिमित हो

---

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

ध्यान दीजिए कि इस परिभाषा में हम यह मानकर चलें हैं कि S बिन्दु a को आविष्ट करने वाले विवृत्त अंतराल को आविष्ट करता है । यदि हम यह मान लें कि $c \in R$ के लिए S में आविष्ट एक अर्धविवृत्त अंतराल (half open interval), [a, c [का अस्तित्व हो, तो ऊपर दी गई परिभाषा में हम $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ के स्थान पर $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ रख सकते हैं और यह कह सकते हैं कि फलन a की दायीं ओर से संतत है या f, a पर दक्षिण संतत (right continuous) हैं ।

इसी प्रकार $\lim_{x \to a} f(x)$ के स्थान पर $\lim_{x \to a-} f(x)$ रखकर हम a पर वाम सांतत्य (left continuity) को परिभाषित कर सकते हैं। इस तरह f, a पर दायीं ओर से संतत होता है, यदि ओर केवल यदि

$f(a+) = f(a)$.

यह a पर बायीं ओर से संतत होता है यदि और केवल यदि

$f(a-) = f(a)$.

बिन्दु a पर फलन f सांतत्य की परिभाषा और सीमाओं के गुणधर्मों से यह पता चलता है कि $f(a+) = f(a-) = f(a)$ यदि और केवल यदि f, a पर संतत हो। यदि कोई फलन एक बिन्दु a पर दायीं ओर से संतत और बायीं ओर से संतत दोनों हों तो यह a पर संतत होता है और इसका विलोम भी सही होता है।

परिभाषा 1 को सांतत्य की सीमा-परिभाषा (limit definition) के नाम से जाना जाता है।

क्योंकि $\lim_{x \to a} f(x)$ को भी ε और δ के पदों में भी परिभाषित किया जाता है, इसलिए ε और δ के पदों में परिभाषा 1 की एक तुल्य परिभाषा प्राप्त होती है। ध्यान दीजिए कि जब कभी हम S के बिन्दु a पर फलन f के सांतत्य के बारे में चर्चा करते हैं, तब हम हमेशा यह मानकर चलते हैं कि S में a को आविष्ट करने वाला एक प्रतिवेश (neighbourhood) आविष्ट होता है। आप यह भी ध्यान में रखिए कि यदि इस प्रकार का एक प्रतिवेश है, तो ऐसे अनंततः अनेक (infinitely many) प्रतिवेश होते हैं। ε और δ के पदों में सांतत्य की तुल्य परिभाषा इस प्रकार दी जाती है :

परिभाषा 2 : सांतत्य की (ε S) – परिभाषा

$x = a$ पर फलन f संतत होता है यदि f, a के प्रतिवेश में परिभाषित हों और एक दी हुई संख्या $\varepsilon > 0$ के संगत एक ऐसी संख्या $\delta > 0$ का अस्तित्व होता है कि $|x - a| < \delta$ से यह पता चलता है कि $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. ध्यान दीजिए कि यहां $|x - a| < \delta$ के लिए $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ होना चाहिए जबकि सीमा की परिभाषा के साथ यह बात नहीं होती।

ये दो परिभाषाएं तुल्य हैं। हालांकि देखने में यह बिल्कुल स्पष्ट नजर आता है, फिर भी उचित तो यही होगा कि इसे सिद्ध कर दिया जाए।

प्रमेय 1 : सांतत्य की सीमा परिभाषा और सांतत्य की (ε, δ) परिभाषा तुल्य है।

उपपत्ति : मान लीजिए सीमा-परिभाषा के संबंध में बिन्दु a पर f संतत हैं। तब $\varepsilon > 0$ दिया हुआ हो, तो एक ऐसा $\delta > 0$ प्राप्त होता है जिससे कि $0 < |x - a| < \delta$ से यह पता चलता है कि $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. तब $x = a$ पर तो तुच्छ रूप में (trivially) हमें यह प्राप्त होता है :

$|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$

अतः $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

जो कि (ε, δ)–परिभाषा हैं।

विलोम के रूप में अब हम यह मान लेते हैं कि (ε, δ)–परिभाषा के संबंध में f संतत हैं। तब प्रत्येक $\varepsilon > 0$ के लिए एक ऐसे $\delta > 0$ का अस्तित्व होता है कि

$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

यदि बिन्दु "a" को छोड़ दें तो इसे हम इस रूप में लिख सकते हैं।

$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

इससे यह पता चलता है कि $\lim_{x \to a} f(x)$ का अस्तित्व है और $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

ध्यान दीजिए कि व्यापक रूप में परिभाषा 2 का δ दिए हुए फलन f, ε और बिन्दु a पर निर्भर करता है और $|x - a| < \delta$ यदि और केवल यदि $a - \delta < x < a + \delta$ और $]a - \delta, a + \delta[$ एक विवृत्त अंतराल हैं जो a को आविष्ट करता है। इसी प्रकार $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ यदि और केवल यदि $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$.

यहां हम यह देखते हैं कि बिन्दु a पर f संतत होता है, यदि f(a) के दिए हुए (विवृत्त) ε-प्रतिवेश U के संगत a का एक ऐसा (विवृत्त) δ-प्रतिवेश V का अस्तित्व होता है कि $f(V) \subset U$ ध्यान दीजिए कि यह वही है जो कि $x \in V \Rightarrow f(x) \in U$ बिन्दु a पर सांतत्य की यह **फलन f को समुच्चय S पर संतत कहा जाता है, यदि यह समुच्चय के प्रत्येक बिन्दु पर संतत होता हो।** यह स्पष्ट है कि S पर परिभाषित एक अचर

फलन S पर संतत होता है। आइए अब हम कुछ उदाहरणों और प्रश्नों पर विचार करें :

उदाहरण 1 : बताइए कि निम्नलिखित फलन संतत हैं कि नहीं :

1) निरपेक्ष मान (मापांक) (modulus) फलन

2) चिह्न फलन (signum function).

हल : (1) इकाई 4 में आपने देखा है कि निरपेक्ष मान फलन $f:R \to R$, $f(x) = |x| \; \forall x \in R$, के रूप में परिभाषित होता है।

यह फलन प्रत्येक बिन्दु $x \in R$ पर संतत होता है। यदि $\varepsilon > 0$ दिया हुआ हो तो हम स्वयं $\delta = \varepsilon$ ले सकते हैं। यदि $a \in R$ कोई बिन्दु हो, तो $|x - a| < \delta$ से पता चलता है कि

$$|f(x) - f(a)| = ||x| - |a|| \leq |x - a| < \varepsilon.$$

(2) जैसा कि आप इकाई 4 से जानते हैं, चिह्न फलन एक फलन $f:R \to R$ होता है जो निम्न रूप में परिभाषित होता है

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 && \text{यदि } x > 0 \\ &= 0 && \text{यदि } x = 0 \\ &= -1 && \text{यदि } x < 0. \end{aligned}$$

यह फलन बिन्दु $x = 0$ पर संतत नहीं है। इकाई 8 में हम यह देख चुके हैं कि $f(0+) = 1$, $f(0-) = -1$. क्योंकि $f(0+) \neq f(0-)$, इसलिए $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ का अस्तित्व नहीं होता। अतः $x = 0$ पर फलन संतत नहीं होता और प्रत्येक बिन्दु $x \neq 0$ पर फलन f संतत होता है। यह बात इकाई 4 में खींचे गए फलन f के ग्राफ से आसानी से देखी जा सकती हैं। 0 के प्रतिवेश (neighbourhood) में परिभाषित f(x) के मानों में बिन्दु $x = 0$ पर एक जम्प (jump) है। ध्यान दीजिए कि यदि $f:R \to R$ निम्न रूप में परिभाषित हो,

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 && \text{यदि } x \geq 0 \\ &= -1 && \text{यदि } x < 0 \end{aligned}$$

तो यह आसानी से देखा जा सकता है कि यह फलन $x = 0$ पर दायीं ओर से संतत है, पर बायीं ओर से संतत नहीं है। यह प्रत्येक बिन्दु $x \neq 0$ पर संतत है।

इसी प्रकार, यदि f निम्न रूप में परिभाषित हों :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 && \text{यदि } x > 0 \\ &= -1 && \text{यदि } x \leq 0. \end{aligned}$$

तो फलन f, $x = 0$ पर बायीं ओर से संतत होता है, पर दायीं ओर से संतत नहीं होता।

प्रश्न 1

बताइए कि निम्नलिखित फलनों में से कौन-कौन से फलन संतत हैं :

1) बिन्दु $x = 0$ पर

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

से परिभाषित फलन $f : R \sim \{0\} \to R$

2) $$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

से परिभाषित फलन $f : R \sim \{1\} \to R$

3) $$f(x) = \frac{1}{x}$$

से परिभाषित फलन $f : R \sim \{0\} \to R$

उदाहरण 2 : वास्तविक रेखा R पर फलन sin x के सांतत्य पर चर्चा कीजिए।

हल : मान लीजिए $f(x) = \sin x \; \forall x \in R$

$(\mathcal{E}, \delta)$-परिभाषा से हम यह दिखाएंगे कि R के प्रत्येक बिन्दु पर f संतत हैं ।

एक स्वेच्छा बिन्दु (arbitary print) $a \in R$ लीजिए । तब

$$|f(x) - f(a)| = |\sin x - \sin a| = \left|2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}\right|$$

$$= 2 \left|\sin \frac{x-a}{2}\right| \left|\cos \frac{x+a}{2}\right|$$

$$\leq 2 \left|\sin \frac{x-a}{2}\right| \left(\text{क्योंकि } \left|\cos \frac{x+a}{2}\right| \leq 1\right).$$

त्रिकोणमिति से आप यह जानते हैं कि $|\sin \theta| \leq |\theta|$ इसलिए

$$\left|\sin \frac{x-a}{2}\right| \leq \left|\frac{x-a}{2}\right| = \frac{|x-a|}{2}$$

इस प्रकार $|f(x) - f(a)| \leq |x - a| < \mathcal{E}$ if $|x - a| < \delta$ where $\delta = \mathcal{E}$

इस तरह, हम यह देखते हैं कि बिन्दु a पर f संतत हैं और क्योंकि a, R का कोई एक बिन्दु है, इसलिए sin x वास्तविक रेखा R पर संतत है ।

प्रश्न 2

वास्तविक रेखा R पर cosx के सांतत्य पर चर्चा कीजिए ।

इकाई 8 में हमने फलन की सीमा और वास्तविक संख्याओं के अनुक्रम (sequence) की सीमा के बीच संबंध स्थापित किया है । इसी प्रकार हम फलन के प्रांत में वास्तविक संख्याओं के अनुक्रम की भाषा में फलन के सांतत्य पर चर्चा कर सकते हैं । इसकी व्याख्या निम्नलिखित प्रमेय में दी गई है ।

प्रमेय 2 : S के बिन्दु a पर फलन $f : S \rightarrow R$ संतत होता है यदि और केवल यदि a की ओर अभिसरित होने वाले प्रत्येक अनुक्रम (x_n), $(x_n \in S)$ के लिए $f(x_n)$, $f(a)$ की ओर अभिसरित होता है ।

उपपत्ति : आइए हम यह मान लें कि a पर f संतत हैं ।

तब $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$\mathcal{E} > 0$ दिया हुआ हो, तो एक ऐसे $\delta > 0$ का अस्तित्व होता है कि

$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x)| < \mathcal{E}$

यदि x_n एक अनुक्रम हो, जो a की ओर अभिसरित होता हो, तो $\delta > 0$ के संगत एक ऐसे धन पूर्णांक M का अस्तित्व होता है कि

$|x_n - a| < \delta$, $n \geq M$ के लिए

इस तरह $n \geq M$ के लिए हमें $|x_n - a| < \delta$ प्राप्त होता है, जिससे यह पता चलता है कि

$|f(x_n) - f(a)| < \mathcal{E}$.

इस तरह यह सिद्ध हो जाता है कि $f(x_n)$, $f(a)$ की ओर अभिसरित होता है ।

विलोम के रूप में आइए हम यह मान लें कि जब कभी x_n, a की ओर अभिसरित होता है, $f(x_n)$, $f(a)$ की ओर अभिसरित होता है । तब हमें यह सिद्ध करना होता है कि a पर f संतत हैं । इसके लिए हमें यह दिखाना होता है कि $\mathcal{E} > 0$ के संगत एक ऐसे $\delta > 0$ का अस्तित्व होता है कि

$|f(x) - f(a)| < \mathcal{E}$ जब कभी $|x - a| < \delta$.

यदि ऐसा नहीं है, अर्थात् यदि a पर f संतत नहीं है, तो एक ऐसे $\mathcal{E} > 0$ का अस्तित्व होता है कि हम जो कुछ भी $\delta > 0$ लें, तो एक ऐसे x_δ का अस्तित्व होता है कि $|x_\delta - a| < \delta$ पर $|f(x_\delta) - f(a)| \geq \mathcal{E}$. उन्नरोत्रर रूप में $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots,$ लेने पर हमें एक अनुक्रम (x_n) प्राप्त होता है, जहां $\delta = \frac{1}{n}$ के लिए $x_n = x_\delta$ जिससे कि $|(x_n) - f(a)| \geq \mathcal{E}$. अनुक्रम (x_n), a की ओर अभिसरित होता है क्योंकि

यदि $m > 0$, तो एक ऐसे M का अस्तित्व होता है कि $n \geq M$ के लिए $\frac{1}{n} < m$. अतः $n \geq M$ के लिए $|x_n - a| < m$. पर $f(x_n)$, $f(a)$ की ओर अभिसरित नहीं होता जो कि हमारी परिकल्पनों का अंतर्विरोध करता है। इससे प्रमेय की उपपत्ति पूरी हो जाती है।

कभी-कभी प्रमेय 2 का प्रयोग अभिसारी अनुक्रमों (convergent sequence) के पदों में फलन के सांतत्य की परिभाषा के रूप के रूप में किया जाता है। इस परिभाषा का सांतत्य की अनुक्रमिक परिभाषा (sequential definition of continuity) के नाम से जाना जाता है। इसका कथन हम नीचे दे रहे हैं :

परिभाषा 3 : फलन का अनुक्रमिक सांतत्य

मान लीजिए f एक वास्तविक मान फलन हैं, जिसका प्रांत, समुच्चय R का एक उपसमुच्चय है। बिन्दु a पर फलन f को संतत कहा जाता है, यदि a की ओर अभिसरित होने वाले f के प्रांत के प्रत्येक अनुक्रम (x_n) के लिए, हमें यह प्राप्त होता हो

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a).$$

अगले उदाहरण में इस परिभाषा को समझाया गया है।

उदाहरण 3 : मान लीजिए $f : R \to R$ एक फलन है जो

$$f(x) = 2x^2 + 1 \ \forall \ x \in R$$

से परिभाषित है।

फलन के सांतत्य की अनुक्रमिक परिभाषा का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि R पर f संतत है।

हल : मान लीजिए (x_n) एक अनुक्रम है जो R के बिन्दु "a" की ओर अभिसरित होता है। तब,

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} (2x_n^2 + 1) = 2 (\lim_{n \to \infty} x_n)^2 + 1 = 2a^2 + 1 = f(a)$$

इससे यह पता चलता है कि बिन्दु $a \in R$ पर f संतत है। क्योंकि a, R का एक स्वेच्छ अवयव है, इसलिए f, R पर सर्वत्र (everywhere) संतत हैं।

प्रश्न 3

सांतत्य की अनुक्रमिक परिभाषा का प्रयोग करके यह सिद्ध कीजिए कि $f(x) = \sqrt{x}$ से परिभाषित फलत $f:R \to R$, $x = 0$ पर संतत है।

9.3 संतत फलनों का बीजगणित

जिस प्रकार हमने इकाई 8 में दो फलनों के योगफल अंतर, गुणनफल आदि के लिए सीमा प्रमेयों को सिद्ध किया था, ठीक उसी प्रकार के परिणाम हमें संतत फलनों के लिए भी प्राप्त होते हैं। सांत्तय की सीमा परिभाषा का प्रयोग करके संतत फलनों पर इन बीजीय संक्रियाओं को इकाई 8 में दिए गए फलनों की सीमाओं पर आधारित प्रमेयों से निगमित किया जा सकता है। इस निगमन (deduction) को हम एक प्रश्न के रूप में आपके लिए छोड़ रहे हैं। फिर भी, एक अन्य विधि से, जो प्रमेय 2 के प्रयोग को प्रदर्शित करता है, इन बीजीय संक्रियाओं की एक औपचारिक उपपत्ति हम यहां दे रहे हैं। इसके लिए हम निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 3 : मान लीजिए f और g वास्तविक फलन हैं जो बिन्दु $a \in R$ पर संतत हैं। तब

1) किसी वास्तविक संख्या α के लिए $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ द्वारा परिभाषित αf बिन्दु a पर संतत होता है।
2) $(f + g)(n) = f(x) + g(x)$ द्वारा परिभाषित $f + g$ बिन्दु a पर संतत होता है,
3) $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ द्वारा परिभाषित $f-g$ बिन्दु a पर संतत होता है।
4) $(fg)(x) = f(x) g(x)$ द्वारा परिभाषित $f.g$ बिन्दु a पर संतत होता है।

5) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ द्वारा परिभाषित $\frac{f}{g}$ बिन्दु a पर संतत होता है जबकि $g(a) \neq 0$.

उपपत्ति : मान लीजिए x_n एक स्वेच्छा अनुक्रम है जो a की ओर अभिसरित होता है। तब f और g के सांततव्य से यह पता चलता है कि अनुक्रम $f(x_n)$ और $g(x_n)$ क्रमशः f(a) और g(a) की ओर अभिसरित होते हैं। दूसरे शब्दों में

$\lim f(x_n) = f(a), \lim g(x_n) = g(a)$

यदि अपरिमित संख्या में x_n के पद ऐसे हों कि $g(x_n) = 0$ तो $g(x_n) \to g(a)$ से यह पता चलता है कि $g(a) = 0$ जो एक अंतर्विरोध है।

इकाई 5 में बताए गए अनुक्रमों के बीजगणित का प्रयोग करके हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि

$\lim \alpha f(x_n) = \alpha f(a)$

$\lim (f+g)(x_n) = \lim f(x_n) + \lim g(x_n) = f(a) + g(a)$

$\lim (f-g)(x_n) = \lim f(x_n) - \lim g(x_n) = f(a) - g(a)$

$\lim (fg)(x_n) = \lim f(x_n) \cdot \lim g(x_n) = f(a) \cdot g(a)$

इससे भाग (1), (2), (3) और (4) सिद्ध हो जाते हैं । भाग (5) को सिद्ध करने के लिए हम निम्नलिखित प्रक्रिया अपनाते हैं।

क्योंकि $g(a) \neq 0$, इसलिए हम एक ऐसा $\alpha > 0$ प्राप्त कर सकते हैं जिससे कि अंतराल $]g(a) - \alpha, g(a) + \alpha[$, $g(a) > 0$ या $g(a) < 0$ के अनुसार या तो पूरा का पूरा शून्य की दायीं ओर होता है या बायीं ओर होता है। $\alpha > 0$ के संगत एक ऐसे $\delta_1 > 0$ का अस्तित्व होता है जिससे कि

$|x - a| < \delta_1$ से यह पता चलता है कि $|g(x) - g(a)| < \alpha$

अर्थात् $g(a) - \alpha < g(x) < g(a) + \alpha$

इस तरह, ऐसे x के लिए जिससे कि $|x - a| < \delta_1$ $g(x) \neq 0$, यदि (x_n), a की ओर अभिसरित होता हो, तो, यदि आवश्यक हुआ तो परिचित संख्या में अनुक्रम के कुछ पदों को छोड़कर, हम यह मान सकते हैं कि सभी n के लिए $g(x_n) \neq 0$

अतः $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$, $\frac{f(a)}{g(a)}$ की ओर अभिसरित होता है और f/g बिन्दु a पर संतत है। इससे प्रमेय की उपपत्ति पूरी हो जाती है।

भाग (5) में यदि हम f को $f(x) = 1$ से परिभाषित करें, तो इससे यह पता चलता है कि यदि a पर g संतत हैं और $g(a) \neq 0$ तो इसका व्युत्क्रम फलन $\frac{1}{g}$ बिन्दु a पर संतत होता है।

अब हम एक अन्य प्रमेय सिद्ध करेंगे। इस प्रमेय से यह पता चलता है कि संतत फलन का संतत फलन संतत होता है।

प्रमेय 4 : मान लीजिए f और g दो वास्तविक फलन हैं, जहां g का परिसर (range) f के प्रांत में आविष्ट है। यदि $x = a$ पर g संतत हो, $b = g(a)$ पर f संतत हो और g के प्रांत के x के लिए $h(x) = f(g(x))$, तो a पर h संतत होता है।

उपपत्ति : $\varepsilon > 0$ दिया हुआ हो तो $y = b = g(a)$ पर f के सांतत्य से पता चलता है कि एक ऐसे $\eta > 0$ का अस्तित्व होता है कि

$|y - b| < \eta$ के लिए $|f(y) - f(b)| < \varepsilon$, ...(1)

$x = a$ पर g के सांतत्य से हमें $\eta > 0$ के संगत एक ऐसा $\delta > 0$ प्राप्त होता है कि

$|x - a| < \delta$ से यह अर्थ निकलता है कि $|g(x) - g(a)| < \eta$ ....(2)

(1) और (2) का संयोजन करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$|x - a| < \delta \text{ से यह अर्थ निकलता है कि } |h(x) - h(a)| = |f(g(x)) - f(g(a))| = |f(y) - b| < \varepsilon$$

जहां हमने $y = g(x)$ लिया है।

अतः a पर h संतत है। इस तरह प्रमेय सिद्ध हो जाता है। आइए अब हम नीचे दिए गए उदाहरण पर विचार करें:

उदाहरण 4 : निम्नलिखित फलनों के सांत्तय की जांच कीजिए :

1) $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$

से परिभाषित बहुपद फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (इकाई 4 देखिए)

2) $f(x) = \dfrac{f(x)}{q(x)}$, $\forall$ x, जिसके लिए $q(x) \neq 0$,

से परिभाषित परिमेय फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (इकाई 4 देखिए)

हल : यह स्पष्ट है कि $f(x) = x$, $x \in R$, पूरी वास्तविक रेखा पर संतत है। प्रमेय 3(4) से यह पता चलता है कि सभी फलन $x^2, x^3, ...$, संतत है और प्रमेय 3(1) और 3(2) से और साथ ही इस बात से कि अचर फलन संतत होते हैं, हमें यह प्राप्त होता है कि x वाला कोई बहुपद f(x) अर्थात्,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_n x^n,$$

से परिभाषित फलन f, R पर संतत होता है।

2) प्रमेय 3(5) से यह पता चलता है कि

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + ... + a_n x^n}{b_0 + b_1x + ... + b_nx^n}$$

द्वारा परिभाषित परिमेय फलन प्रत्येक बिन्दु $a \in \mathbf{R}$, जहाँ $q(a) \neq 0$ पर संतत होता है।

अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए।

प्रश्न 4

निम्न रूप से परिभाषित फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ से सांतत्य की जांच कीजिए

1) $f(x) = x^3$, बिन्दु $a \in \mathbf{R}$ पर;

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{यदि } x \neq 2 \\ 1, & \text{यदि } x = 2 \end{cases}$.

9.4 असंतत फलन

आपने यह देखा है कि फलन के प्रांत के एक बिन्दु पर फलन संतत हो भी सकता है और नहीं भी हो सकता है। आइए हम यह देखें कि कोई फलन संतत क्यों नहीं हो पाता।

फलन $f: S \to R$ अपने प्रांत पर संतत नहीं हो पाता यदि यह S के एक विशेष बिन्दु पर संतत नहीं हो। इससे यह अर्थ निकलता है कि एक ऐसे बिन्दु $a \in \mathbf{R}$ का अस्तित्व होता है जहाँ कि या तो (1) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ का अस्तित्व नहीं होता या (2) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ का अस्तित्व तो होता है, पर यह f(a) के बराबर नहीं होता।

पर आप यह जानते हैं कि एक बिन्दु "a" पर फलन संतत होता है, यदि और केवल यदि

$f(a+) = f(a-) = f(a)$.

इस तरह हम यह पाते हैं कि यदि f, a पर संतत नहीं है तो निम्नलिखित बातों में से एक बात अवश्य होगी।

1) या तो f(a +) का या f(a –) का अस्तित्व नहीं होता (इस में वह स्थिति भी शामिल है जिस में f(a+) और f(a–) दोनों का ही अस्तित्व नहीं होता।)

2) f(a +) और f(a–) दोनों का अस्तित्व है पर $f(a+) \neq f(a-)$.

3) f(a +) और f(a–) दोनों का अस्तित्व है और $f(a+) = f(a-)$ पर ये f(a) के बराबर नहीं है।

यदि प्रत्येक $b \in S$ के लिए फलन $f : S \to R$ असंतत (discontinuous) हों, तो हम यह कहते हैं कि f, S पर पूर्णतः असंतत हैं। पूर्णतः असंतत फलन प्रायः देखने में कम मिलते हैं पर यह नहीं कहा जा सकता कि ये विरले ही होते हैं। इस संबंध में एक उदाहरण हम नीचे दे रहे हैं।

उदाहरण 5: जांच कीजिए कि फलन $f : R \to R$ जो,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \\ 0 & \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \end{cases}$$

से परिभाषित है, पूर्णतः असंतत है कि नहीं।

हल : मान लीजिए b एक स्वेच्छ परनियत वास्तविक संख्या है।

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ लीजिए। मान लीजिए $\delta > 0$ नियत है तब $|x - b| < \delta$ से परिभाषित अंतराल या तो

$\{x : b - \delta < x < b + \delta\}$ होता है

या $]\, b - \delta, b + \delta\,[$.

इस अंतराल में परिमेय और अपरिमेय संख्याएं दोनों होती हैं। क्यों ? (उत्तर के लिए इकाई 2 देखिए)

यदि b परिमेय है, तो अंतराल में एक ऐसा x लीजिए जो अपरिमेय हों और यदि b अपरिमेय है तो अंतराल में एक ऐसा x लीजिए जो परिमेय हों। इनमें से प्रत्येक स्थिति में

$0 < |x - b| < \delta.$

और $|f(x) - f(b)| = 1 > \varepsilon.$

इस तरह, हम यह पाते हैं कि b पर f संतत नहीं हैं। क्योंकि b, S का एक स्वेच्छ अवयव है, इसलिए S के किसी भी बिन्दु पर f संतत नहीं है। अतः यह पूर्णतः असंतत है।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल करने की कोशिश कर सकते हैं।

प्रश्न 5

दिखाइए कि फलन $f : R \to R$ जो

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \quad \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \\ &= 0 \quad \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{aligned}$$

से परिभाषित हैं, पूर्णतः असंतत हैं। क्या किसी भी बिन्दु $a \in R$ पर $f(a+)$ और $f(a-)$ का अस्तित्व है।

कुछ ऐसे असातंत्य हैं जिन्हें हटाया जा सकता है। ऐसे असांतत्य को अपनेय असांतत्य (removable discontinuity) कहा जाता है। दिए हुए फलन $f : S \to R$ के असांतत्य्य a को अपनेय कहा जाता है,

---

यदि f(x) की सीमा, जबकि x, a की ओर प्रवृत्त होता हो, का अस्तित्व हो और $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

दूसरे शब्दों में, $x = a$ पर f का अपनेय असांतत्य होता है, यदि $f(a+) = f(a-)$ पर इनमें से कोई भी f(a) के बराबर नहीं है।

असांतत्य बिन्दु a पर फलन के मान में परिवर्तन करके फलन के अपनेय असांतत्य को हटाया जा सकता है। अपनेय असांतत्य वाले इस फलन को संतत प्रायः (almost continuous) फलन माना जा सकता है। अपनेय असांतत्य वाली कुछ स्थितियों को अच्छी तरह से समझने के लिए नीचे हम एक उदाहरण दे रहे हैं।

उदाहरण 6 : निम्नलिखित फलनों के असांतत्य की प्रकृति पर चर्चा कीजिए :

1) $$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - 4}{x - 2}, \; x \neq 2 \\ &= 1, \qquad x = 2 \end{aligned}$$

$x = 2$ पर

2) $f(x) = 3, x \neq 3$

$= 1, x = 3$

$x = 3$ पर

3) $f(x) = x^2, x \in]-2, 0[\cup]0, 2[$

$= 1, \quad x = 0$

$x = 0$ पर

हल :

1) $x = 2$ पर यह फलन असंतत है। यह एक अपनेय असांतत्य है। क्योंकि यदि हम $f(x) = 4$ को फिर से परिभाषित करें तो हम $x = 2$ के सांतत्य को पुनः प्राप्त कर सकते हैं।

2) $x = 3$ पर यह भी अपनेय असांतत्य वाली स्थिति है। अतः यदि f को $f(x) = 3 \ \forall \ x \in R$ से परिभाषित करें तो यह $x = 3$ पर संतत होता है।

3) $x = 0$ पर यह फलन असंतत है। बता सकते हैं, क्यों ? यह अपनेय असांतत्य वाली स्थिति है। असांतत्य को हटाने के लिए $f(0) = 0$ लीजिए। दूसरे शब्दों में, f को इस रूप में परिभाषित करें

$f(x) = x^2, x \in]-2, 0[\cup]0, 2[$,

$= 0, x = 0$

उदाहरण 7 : मान लीजिए फलन $f : R \to R$ निम्न रूप में परिभाषित है

1) $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$

$= 0, \quad x = 0$

2) $f(x) = \frac{1}{x}$, यदि $x > 0$

$= 1$ यदि $x < 0$

3) $f(x) = \frac{1}{x}$ यदि $x < 0$

$= 1$ यदि $x > 0$

इस फलन के सांतत्य की जांच कीजिए और बताइए कि यदि असांतत्य है तो वह किस प्रकार का असांतत्य है।

हल : (1) यहां $f(0+)$ और $f(0-)$ दोनों का अस्तित्व नहीं हैं (क्योंकि ये परिमित वास्तविक संख्याएं हैं), अतः फलन असंतत हैं। पर, यह अपनेय असांतत्य वाली स्थिति नहीं है।

(2) इस स्थिति में, $f(0+)$ का अस्तित्व नहीं है, जबकि $f(0-)$ का अस्तित्व है और $f(0-) = 1$ यह अपनेय असांतत्य वाली स्थिति नहीं है।
अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

प्रश्न 6

सिद्ध कीजिए कि $f(x) = x \sin \frac{1}{x}, x \neq 0$ और $f(0) = 1$ द्वारा परिभाषित फलन $x = 0$ पर एक अपनेय असांतत्य है।

प्रश्न 7

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक वास्तविक x के लिए $|f|(x) = |f(x)|$ द्वारा परिभाषित फलन $|f|$, R पर संतत होता है, जब कभी R पर f संतत होता है।

प्रश्न 8

(1) $f(x) = x + 1$ यदि $x > 0$

$f(x) = -(x + 1)$ यदि $x < 0$

और $f(0) = 0$

से परिभाषित फलन f के $x = 0$ असांतत्य का प्रकार मालूम कीजिए।

(2) फलन f,

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}, x \neq 0$$
$$= 0, x = 0$$

से परिभाषित है ।

क्या 0 पर f संतत है ?

9.5 सारांश

इस इकाई में हमने आपको अपने प्रांत के एक बिन्दु पर और अपने प्रांत के एक उपसमुच्चय पर फलन के सांतत्य की संकल्पना से परिचित कराया है । भाग 9.2 में सीमा परिभाषा और (ε, δ) –परिभाषा दी गई हैं । यहां यह भी सिद्ध किया गया है कि दोनों परिभाषाएं तुल्य हैं । इसी भाग में सांतत्य की अनुक्रमिक परिभाषा पर चर्चा की गई है और प्रश्नों को हल करने में इसे लागू करने से संबंद्ध कुछ उदाहरण दिए गए हैं । भाग 9.3 में, संतत फलनों के बीजगणित पर विचार किया गया है और यह सिद्ध किया गया है कि एक बिन्दु पर दो संतत फलनों के योगफल, अंतर, गुणनफल और भागफल भी उस बिन्दु पर संतत होते हैं, बशर्ते भागफल के संबंध में, उस बिन्दु पर हर वाला फलन शून्य न हो । इसी भाग में हमने यह सिद्ध किया है कि संतत फलन का संतत फल संतत होता है । अंत में अर्थात् भाग 9.4 में असंतत और पूर्णतः असंतत फलनों पर चर्चा की गई है । इस भाग में ही एक प्रकार के असांतत्य, अर्थात् अपनेय असांतत्य का अध्ययन किया गया है ।

9.6 उत्तर/संकेत/हल

1) i) $x = 0$ पर फलन f परिभाषित नहीं है । अतः $x = 0$ पर f संतत नहीं है ।

ii) यह फलन प्रत्येक बिन्दु $x \neq 1$ पर संतत है, क्योंकि प्रत्येक बिन्दु $a \neq 1$ पर f परिभाषित है और $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ यह $x = 1$ पर परिभाषित नहीं है । अतः $x = 1$ पर यह संतत नहीं है । यदि हम $f(1) = 2$ परिभाषित करें तो $x = 1$ पर फलन संतत होगा ।

iii) इस स्थिति में भी सभी $x \neq 0$ पर f संतत है । चित्र 1 (ख) में ग्राफ देखिए |(ε, δ)–परिभाषा से इस बात की पुष्टि कीज़िए । $x = 0$ पर f परिभाषित नहीं है अतः $x = 0$ पर यह संतत नहीं है ।

2)
$$|\cos x - \cos a| = \left|2 \sin \frac{x+a}{2} \sin \frac{a-x}{2}\right|$$
$$= 2\left|\sin \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}\right|$$
$$= 2\left|\sin \frac{x+a}{2}\right| \left|\sin \frac{x-a}{2}\right|$$
$$\leq 2\left|\sin \frac{x-a}{2}\right|$$
$$\leq |x - a|$$

इसके बाद उदाहरण 2 में दी गई प्रक्रिया अपनाइए । अतः R पर cos x संतत हैं ।

3) मान लीजिए (x_n) एक अनुक्रम है जो 0 की ओर अभिसरित होता है । तब

$$\lim f(x_n) = \lim (\sqrt{x_n}) = \sqrt{\lim x_n} = \sqrt{0} = 0 = f(0)$$

जिससे यह पता चलता है कि $x = 0$ पर f संतत है ।

4) (1) $x = a$ पर फलन $f(x) = x^3$ पर संतत है, क्योंकि यदि (x_n) एक अनुक्रम हो, जो a की ओर अभिसरित होता हो, तो $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^3 = (\lim_{n\to\infty} x_n)^3 = a^3 = f(a)$, जिससे यह पता, चलता है कि f, a पर संतत है।

(2) $x = 2$ पर यह फलन संतत नहीं है, क्योंकि

$\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ जबकि $f(2) = 1$.

5) मान लीजिए a, **R** में परिमेय है। तब $f(a) = 1$. हमें a के निकट से निकट अपरिमेय x प्राप्त होते हैं अर्थात् a के प्रत्येक प्रतिवेश में ऐसे बिन्दु x का अस्तित्व होता है जहाँ कि $|f(x) - f(a)| = 1$ अत: यदि $\varepsilon < 1$ तो हम एक ऐसा $\delta > 0$ प्राप्त नहीं कर सकते जिससे कि $|x - a| < \delta$ के लिए, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, अर्थात्, a पर, फलन संतत नहीं है। यही बातें तब भी लागू होती हैं जबकि a अपरिमेय होता है। अत: फलन सर्वत्र असंतत है। ऊपर दिए गए तर्क से यह स्पष्ट है कि बिन्दु a पर $f(a+)$ और $f(a-)$ का भी अस्तित्व नहीं है।

6) $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$, यदि $x \neq 0$ और $f(0) = 1$. तब

$|f(x)| = \left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leq |x|$, क्योंकि ज्या फलन (sine function) एक परिबद्ध फलन है जिसका निरपेक्ष मान 1 से परिबद्ध है। $\varepsilon > 0$ के लिए, यदि $\delta = \varepsilon$, $0 < |x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$, अर्थात्, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

अत:, $f(0+) = f(0-) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

यदि हम $f(0) = 1$ को $f(0) = 0$ से पुन: परिभाषित करें, तो हम पाएंगे कि f, 0 पर संतत है। अत: 0 एक अपनेय असांतत्य है।

7) क्योंकि f, **R** पर दिया हुआ संतत फलन है, इसलिए, **R** के किसी भी बिन्दु a पर, f संतत है। अत: $\varepsilon > 0$ दिया हुआ हो, तो ऐसे $\delta > 0$ का अस्तित्व होता है जहाँ कि $|x - a| < \delta$ से यह अर्थ निकलता है कि $\big||f(x)| - |f(a)|\big| \leq |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. अब $|\,|$ की त्रिभुज असमिका से हमें यह प्राप्त होता है

$\big||f(x)| - |f(a)|\big| \leq |f(x) - f(a)| < \varepsilon$,

जिससे यह सिद्ध हो जाता है कि, a पर, $|f| : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ संतत है और क्योंकि a स्वेच्छ है, इसलिए $|f|$, R पर संतत है।

8) 1) $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0} (x + 1) = 1$ i.e., $f(0+) = 1$.

$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0} (-(x + 1)) = -1$ i.e., $f(0-) = -1$. और, इस तरह

$f(0+) \neq f(0-)$.

अत: 0 एक असांतत्य है जो कि एक अपनेय असांतत्य है।

2) फलन $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, यदि $x \neq 0$, $f(0) = 0$, का 0 पर एक अनापनेय असांतत्य (irremovable discontinuity) होता है, क्योंकि न तो $f(0+)$ का अस्तित्व है और न ही $f(0-)$ का।

9.7 शब्दावली

अपनेय असांतत्य	:	Removable discontinuity
अभिसारी अनुक्रम	:	Convergentsequence
असंतत फलन	:	Discontinuous function
असांतत्य	:	Discontinuity
चिन्ह फलन	:	Signum function
प्रतिवेश	:	Neighbourhood
संतत फलन	:	Continuous function