इकाई 12 पंक्ति प्रणालियों का अनुकार

12.1 प्रस्तावना

इस पाठ्यक्रम में अभी तक आप वास्तविक जीवन के काफी सन्निकट कुछ रोचक समस्याओं के निदर्शों का सूत्रण करने के बारे में पढ़ चुके हैं जहाँ, अनेक स्थितियों में, परिणामी निदर्श के मानक संख्यात्मक और/या गणितीय संबंध इन समस्याओं का हल प्राप्त करने में सहायक होते हैं। फिर भी, ऐसी अनेक समस्याएँ होती हैं जो इतनी जटिल होती हैं कि वैश्लेषिक रूप से इन्हें हल करना काफी कठिन होता है। और, अनेक अन्य स्थितियों में एक *वास्तविक प्रयोग* करना तो संभव ही नहीं होता। इन सभी समस्याओं का अध्ययन *अनुकार* की सहायता से किया जाता है। *अनुकार विधि* में, एक कंप्यूटर की सहायता से निदर्श का संख्यात्मक मूल्यांकन किया जाता है और जटिल प्रसंभाव्य प्रणालियों (stochastic systems), जिनके लिए वैश्लेषिक निदर्श पर्याप्त नहीं होते, के निष्पादन का आकलन करने के लिए नियंत्रित सांख्यिकीय प्रतिचयन तकनीकों से आंकड़े एकत्रित किए जाते हैं।

अभी तक के अध्ययन से आप यह अवश्य समझ गए होंगे कि *संक्रिया विज्ञान* (operations research) उन प्रणालियों के अभिकल्प विकसित करने से संबंधित होता है, जो समय के साथ प्रायिकतात्मकत: विकसित होते हैं। एक *अनिर्धारणात्मक वास्तविक प्रणाली* (non-deterministic real system) के निष्पादन का अनुकरण विभिन्न घटनाओं को, जिनकी एक प्रणाली में घटने की आशा होती है, *यादृच्छिकत: जनित* होने के लिए प्रायिकता-बंटनों का प्रयोग करके किया जाता है। सबसे पहले, प्रणाली का एक प्रारंभिक अभिकल्प विकसित करने के लिए हम कुछ प्राथमिक सैद्धांतिक विश्लेषण करते हैं। तब, यह आंकलन करने के लिए कि प्रणाली का वास्तविक निष्पादन क्या होगा, विशिष्ट अभिकल्पों के साथ प्रयोग करने में *अनुकार* (simulation) का प्रयोग किया जाता है। इस प्रक्रम में, सबसे पहले एक निदर्श से एक हल ज्ञात किया जाता है। तब, वर्तमान प्रणाली से संबंधित पर्याप्त आँकड़े लेकर, निदर्श को *अनुकरित* (simulated) किया जाता है। एक सु-अभिकल्पित निदर्श को सार्थक अनुकार-परिणामों की कुंजी माना जाता है।

यहाँ प्रणाली किसी न किसी रूप में एक दूसरे पर निर्भर घटकों के समुच्चय को प्रकट करता है जिसके व्यवहार की प्रागुक्ति (कम से कम) प्रणाली के विभिन्न संभव अवस्थाओं की प्रत्येक अवस्था और उसके निवेश के लिए प्रायिकता-बंटनों के रूप में किया जा सकता है।

तब, इससे न केवल समस्या का हल प्राप्त होता है, परन्तु परिवर्ती अवस्थाओं में इसके विभिन्न रूपों के व्यवहार देखने का भी सुअवसर प्राप्त होता है। एक बार इस विधि से विस्तृत अभिकल्प विकसित हो जाने पर निर्णायक अभिकल्प के उत्कर्ष (fine-tune) के लिए प्रणाली का परीक्षण वास्तविक प्रयोग द्वारा किया जा सकता है। यह याद रखना आवश्यक है कि अनुकरण-प्रक्रम के अतिरोचक पहलू हैं : *उत्पादन* (production), *समानुक्रमण* (collation), और *निर्गत आंकड़ों का निर्वचन* (interpretation of output data).

यद्यपि अनुकार को कभी-कभी अंतिम प्रयास की विधि माना जाता है, जिसका प्रयोग प्राय: तब किया जाता है जबकि अन्य सभी विधियाँ असफल हो जाती हैं, परन्तु अनुकार-क्रिया विधियों (simulation methodolgies) में हाल ही में हुई प्रगतियों, यंत्रेतर सामग्री (software) उपलब्धता, और तकनीकी विकास ने अनुकार को तंत्र-विश्लेषण (system analysis) और संक्रिया-विज्ञान (operations research) में व्यापक रूप से प्रयुक्त और स्वीकृत साधन बना दिया है। अनुकार का प्रयोग दो अलग-अलग प्रकार की समस्याओं, अर्थात् (i) आधारभूत विज्ञान में सैद्धांतिक समस्याओं, और (ii) उद्योग, व्यापार, अर्थ-व्यवस्था, व्यावहारिक अध्ययनों, युद्ध की रणनीतियों, आदि जैसी व्यावहारिक समस्याओं में किया जाता है।

भाग 12.2 में, हम अनुकार के उद्देश्य और प्रकार की व्याख्या करेंगे। आगे, भाग 12.3 में, हम यादृच्छिक संख्याओं के बारे में चर्चा करेंगे और यादृच्छिक विचरों की जनन-विधि पर विचार करेंगे जिन्हें एकसाथ लेने पर एक प्रकार से अनुकार प्रक्रम का निर्माण आधार प्राप्त हो जाता है। इसके बाद, भाग 12.4 में, अनुकार का प्रयोग करके हम एकल सेवक पंक्ति-प्रणाली के निदर्शन पर चर्चा करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप

- अनुकार निदर्शन के प्रयोजन और उद्देश्य पर चर्चा कर सकेंगे;
- *छद्म यादृच्छिक संख्याओं* की एक जनन-विधि का वर्णन कर सकेंगे;
- (सांख्यिकीय) *यादृच्छिक विचरों* के जनन और प्रयोग के बारे में बता सकेंगे; और
- एक M/M/1 पंक्ति-प्रणालियों के निदर्शन के लिए अनुकार-तकनीक के अनुप्रयोग की व्याख्या कर सकेंगे।

12.2 अनुकार के उद्देश्य और प्रकार

जैसा कि ऊपर बताया जा चुका है, अनुकार एक अंकीय कंप्यूटर (digital computer) *पर उन तर्क संगत और गणितीय संबंधों वाली एक संख्यात्मक तकनीक है जो एक बढ़ायी गयी अवधि में एक जटिल वास्तविक जगत प्रणाली के व्यवहार और संरचना की व्याख्या के लिए अन्योन्यक्रिया* (interact) *करते हैं।*

यहाँ आधारभूत अभिधारणा यह है कि वास्तव में जटिल प्रणालियों (जैसे हथियार, इंजन, विमान, आदि) का निर्माण करने के स्थान पर इन प्रणालियों के गणितीय गुणधर्मों का संक्षिप्तीकरण किया जा सकता है और यह देखने के लिए कि वास्तविक जीवन की स्थिति में हम क्या प्रत्याशा करते हैं, परिणामी प्रणालियों को विभिन्न स्थितियों के लिए कंप्यूटर स्क्रीन पर अनुकरित किया जा सकता है।

उदाहरण के लिए, एक ऐसी अनुकरित लड़ाई लड़ी जा सकती हैं जहाँ वास्तविक जीवन की स्थितियों से आकलित क्रियाओं की प्रायिकताएँ इसके परिणाम को निर्धारित करती हैं। वास्तव में, उस स्थिति में, अनुकार की सहायता से किसी भी प्रक्रम का अध्ययन किया जा सकता है जबकि हम इसका उपयुक्त ढंग से निदर्शन कर सकें और अंतर्निर्मित प्रायिकताओं (built in probabilities) के अनुसार इसे विकसित होने दें।

अधिक जटिल प्रणालियों वाली स्थिति में अनुकार से, संबंधित चरों में अति महत्त्वपूर्ण अंतर्दृष्टि (valuable insight) प्राप्त करने और इस बात का निर्णय लेने में कि प्रणाली का कौन-सा चर अन्य चरों से अधिक महत्त्वपूर्ण है और यह चर किस प्रकार एक दूसरे को प्रभावित करते हैं, काफी सहायता प्राप्त होती है। और, यह उन नयी स्थितियों के साथ प्रयोग करने में काफी उपयोगी होता है जिनके बारे में हमें लेशमात्र या कोई भी जानकारी नहीं होती जिससे कि हम अपने को इस बात के लिए तैयार रख सकें कि आगे क्या हो सकता है।

वैकल्पिक रूप में, हम कह
हैं कि अनुकार एक तकनीक
समय के साथ विकसित
वेक जीवन की स्थिति के
न का अनुकरण करता है।

इस तरह, हम कह सकते हैं कि अनुकार एक प्रणाली के निदर्श पर प्रतिचयन प्रयोग करने की एक तकनीक है। प्रयोग स्वयं वास्तविक प्रणाली पर न करके निदर्श पर किए जाते हैं क्योंकि वास्तविक प्रणाली पर किया गया प्रयोग असुविधाजनक, खर्चीला और अधिक समय लगने वाला होता है।

आइए सबसे पहले हम एक जुआरी की स्थिति पर चर्चा करें।

प्रश्न 1 : एक कैसिनो आपको ऐसा खेल खेलने के लिए आमंत्रित करता है, जहाँ आपको एक उचित

आने की संख्या में तीन का अंतर नहीं हो जाता। सिक्का उछालने के लिए आपको हर बार 1 रुपया देना होता है और खेल के अंत में आपको 8 रुपया मिलेगा। (यहां खेल को बीच में छोड़कर जाने की अनुमति नहीं है।) अतः, निष्कर्ष यह होता है कि यदि तीन का अंतर पाने के लिए आपको सिक्का 8 से अधिक बार उछालना पड़ता हो, तो इस स्थिति में आप अपनी धनराशि हार जाते हैं और, यदि उछालों की संख्या 8 से कम है तो आप धनराशि जीत जाते हैं। इस तरह, जीती हुई धनराशि $8 - n$ के बराबर होती हैं (ऋणात्मक लाभ का अर्थ है हानि), जहाँ n अपेक्षित उछालों की संख्या है। आप यह निर्णय कैसे लेंगे कि यह खेल खेलना चाहिए या नहीं?

हल : निर्णय लेने के लिए, इस खेल को आपको स्वयं खेलते रहना होगा जब तक कि यह स्पष्ट नहीं हो जाता कि धन जीतने के लिए यह खेल खेला जा सकता है या नहीं। इसके लिए आप एक उचित सिक्का (fair coin) लेकर उसे आधे घंटे तक बार-बार उछालिए और एक ठीक अनुमान प्राप्त करने के लिए अपनी काल्पनिक कमाई और हानि को दर्ज कर लीजिए। यह क्रिया और कुछ नहीं, बल्कि अनुकरण है, क्योंकि सही माने में हारे या जीते बिना ही आप वास्तविक खेल का अनुकरण कर रहे हैं।

आइए, अब हम इस खेल का अनुकरण एक कंप्यूटर पर करने के बारे में सोचें। ऐसा करने से समय की काफी बचत हो जाएगी और हम सिक्का उछालने और जीत की धनराशि के परिणामों को लिखने की मेहनत से भी बच जाएंगे।

दुर्भाग्य तो यह है कि क़ंप्यूटर सिक्का नहीं उछाल सकता। फिर भी, क्योंकि एक कंप्यूटर *यादृच्छिक संख्याएँ* जनित कर सकता है, इसको करने की एक अन्य विधि होती है।

हम यादृच्छिक संख्याओं पर चर्चा अगले भाग में करेंगे।

आप जानते हैं कि एक उचित सिक्के के लिए, *चित पड़ने की प्रायिकता = पट पड़ने की प्रायिकता = 0.5* और, एक यादृच्छिक अंक के 10 संभव मान, अर्थात् 0, 1, 2,..., 9, होते हैं जहाँ इनमें से प्रत्येक की प्रायिकता = 0.1. अतः, यदि हम पांच अंकों 0, 1, 2, 3, 4 में से किसी भी एक अंक के आने पर यह मान लें कि चित पड़ता है और शेष पांच अंकों में से किसी भी एक अंक के आने पर पट पड़ना मान लें, तब हमें एक कंप्यूटर द्वारा एक उचित सिक्के को उछालने की विधि प्राप्त हो जाती है।

एक यादृच्छिक अंक k जनित कीजिए। यदि k = 0,1,2,3 या 4 तो चित पड़ा है। अन्यथा इसे पट पड़ा मान लीजिए।

मान लीजिए, एक कंप्यूटर T H H T H T H T T T T H T...... को निरूपित करने वाले यादृच्छिक अंकों का एक अनुक्रम जनित करता है। तब T H H T H T H T T T T खेल की एक बाज़ी को अनुकरित (simulates) करता है। बेशक, खेल की इस बाज़ी में हम 3 रु० हार जाएंगे। इसी प्रकार, इसके बाद के H और T खेल की और बाजियों को अनुकरित करेंगे। इस प्रयोग को काफ़ी बार दोहराया जा सकता है। अर्थात्, ऊपर की तरह ही इसे बार-बार खेलिए और लाभ तथा हानि दर्ज करते रहें। तब, इन अंको के औसत से (हानि को ऋण लाभ मान लीजिए), औसत के चिह्न के अनुसार, आप को अपना औसत लाभ या हानि के बारे में एक संकेत मिल जाता है।

---------- × ----------

अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए।

E1) मान लीजिए दो पाशकों को फेंका गया है और X पाशकों पर आयी संख्याओं के जोड़ को निरूपित करता हो। असंतत यादृच्छिक चर X के मान जनित कीजिए।

अब, आप यह प्रश्न लीजिए : वास्तविक जीवन से जुड़ी किसी स्थिति का अनुकरण करने के लिए किस प्रकार के आंकड़ों की आवश्यकता होती है? इस संबंध में, आप यह प्रश्न भी कर सकते हैं : यादृच्छिक संख्याओं की आवश्यकता क्यों होती है और एक व्यावहारिक समस्या का अनुकरण करते समय इनका प्रयोग कैसे किया जाता है? इन प्रश्नों का उत्तर ज्ञात करने के लिए आइए हम एक व्यावहारिक स्थिति पर विचार करें।

प्रश्न 2 : दांतों का एक डाक्टर अपने सभी रोगियों को 20-20 मिनट का समय देने का निर्णय लेता है। नीचे की सारणी के पहले तीन स्तंभों में *विभिन्न प्रकार के उपचारों, उपचार पूरा करने में लगने*

वाला वास्तविक समय और *उनकी प्रायिकताओं* के ब्यौरे दिए गए हैं।

उपचार का प्रकार	लगा समय (मिनटों में)	प्रायिकता	संचयी प्रायिकता	यादृच्छिक संख्या
भरना	50	0.30	0.30	00 – 29
क्राउन	60	0.15	0.45	30 – 44
सफाई करता	20	0.20	0.65	45 – 64
निकालना	40	0.20	0.85	65 – 84
जांच करना	10	0.15	1.00	85 – 99

यहाँ यह मान लीजिए कि सभी रोगी निदानशाला (clinic) पर ठीक समय पर पहुँच जाते हैं और पहला रोगी 8 बजे प्रात: पहुँच जाता है। यादृच्छिक संख्याओं 40, 85, 15, 35, 20, 65, 25, 80 को लेकर, दांतों के डाक्टर की निदानशाला (clinic) का 6 घंटे तक की अवधि के लिए अनुकरण कीजिए और रोगियों का औसत प्रतीक्षा काल तथा डाक्टर के निष्क्रिय रहने का समय ज्ञात कीजिए।

हल : *रोगी के आने का समय, विभिन्न प्रकार के उपचारों में लगा समय* और *संचयी प्रायिकताओं* (जो कि ऊपर की सारणी के चौथे स्तंभ में दिए गए हैं) से संबंधित दी हुई जानकारी से हम रोगियों के प्रतीक्षा काल, दी गई यादृच्छिक संख्याओं के लिए, अभिकलित करेंगे।

यादृच्छिक संख्याएँ जनित करने की विधि पर चर्चा हम इस इकाई में बाद में करेंगे।

सामान्यत:, अगला चरण यादृच्छिक संख्याओं का चयन करना या जनित करना होता है। इस समस्या में हम उपलब्ध यादृच्छिक संख्याओं का प्रयोग करेंगे। विभिन्न प्रकार के उपचारों से जुड़ी यादृच्छिक संख्याओं के आबंटन का परिसर (range) ऊपर की सारणी के अंतिम स्तंभ में दिया गया है।

यहाँ, आने वाले रोगियों की प्रथम यादृच्छिक संख्या 40 है, जो कि परिसर 30 – 44 में स्थित है, और यह 60 मिनट के अनुकरित सेवा-काल को सूचित करता है। सभी अनुकरित सेवा-काल का अभिकलन इसी प्रकार किया जा सकता है। (नीचे की सारणी देखिए।)

रोगी संख्या	आने का समय	यादृच्छिक संख्या	उपचार का प्रकार	सेवा-काल (मिनटों में)
1	8.00	40	क्राउन	60
2	8.20	85	जांच	10
3	8.40	15	भरना	50
4	9.00	35	क्राउन	60
5	9.20	20	भरना	50
6	9.40	65	निकालना	40
7	10.00	25	भरना	50
8	10.20	80	निकालना	40

दी हुई यादृच्छिक संख्याओं द्वारा अनुकरित सेवा-काल अभिकलित कर लेने के बाद, हमारा अगला चरण रोगियों के *आगमन-काल, प्रस्थान काल* और *प्रतीक्षा काल* अभिकलित करना होता है। यह सूचना नीचे की सारणी में दी गई है।

समय	घटना (रोगी सं.)	रोगी की अवस्थिति सं. (जाने का समय)	प्रतीक्षा (रोगी सं.)
8.00	1 आता है	1(60)	–
8.20	2 आता है	1(40)	2
8.40	3 आता है	1(20)	3
9.00	1 जाता है; 4 आता है	2(10)	3,4
9.10	2 जाता है	3(50)	4
9.20	5 आता है	3(40)	4,5

क्रमश:

(जारी)

9.40	6 आता है	3(20)	4, 5, 6
10.00	3 जाता है; 7 आता है	4(60)	5, 6, 7
10.20	8 आता है	4(40)	5, 6, 7, 8
11.00	4 जाता है	5(50)	6, 7, 8
11.50	5 जाता है	6(40)	7, 8
12.30	6 जाता है	7(50)	8
13.20	7 जाता है	8(40)	–
14.00	8 जाता है	–	–

इस सारणी से, यह स्पष्ट हो जाता है कि पूरे अनुकरित अवधि में दांतों का डाक्टर कभी भी निष्क्रिय नहीं रहा और विभिन्न रोगियों का *प्रतीक्षा-काल* नीचे की सारणी में दिया गया है।

रोगी संख्या	आने का नियत समय	सेवा प्रारंभ करने का समय	प्रतीक्षा काल (मिनटों में)
1	8.00	8.00	0
2	8.20	9.00	40
3	8.40	9.10	30
4	9.00	10.00	60
5	9.20	11.00	100
6	9.40	11.50	130
7	10.00	12.30	150
8	10.20	13.20	180

अतः, *औसत प्रतीक्षा काल* $= \frac{690}{8} = 86.25$ *मिनट.*

—————— × ——————

ऊपर दी गई समस्या (और नीचे दिए गए प्रश्न) से यह पता चल जाता है कि किस प्रकार वास्तविक जीवन से संबंधित आंकड़ों को प्रायिकता घनत्व फलनों (probability density functions) में रूपांतरित किया जा सकता है और किस प्रकार इनका प्रयोग वास्तविक जीवन से जुड़ी किसी स्थिति के व्यवहार को निरूपित करने वाले *यादृच्छिक प्रेक्षणों* (या *विचरों*) (random observations) को जनित करने में किया जा सकता है।

अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए।

E2) एक बेकरी किसी लोकप्रिय ब्रांड वाले केक का स्टॉक रखता है। पिछले अनुभव से प्राप्त संबंधित प्रायिकताओं के आधार पर केक की दैनिक मांग का प्रतिरूप ठीक वैसा है जैसा कि नीचे दिया गया है

दैनिक मांग :	0	10	20	30	40	50
प्रायिकता :	0.01	0.20	0.15	0.50	0.12	0.02

निम्नलिखित यादृच्छिक संख्याओं के लिए अगले 10 दिनों की मांग को अनुकरित कीजिए।
25, 39, 65, 76, 12, 05, 73, 89, 19, 49.

अभी तक इस इकाई में हमने जिन तथ्यों पर चर्चा की है उससे यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि अनुकरण एक प्रतिचयन-क्रियाविधि है जो कि एक समस्या का कंप्यूटर आधारित हल प्राप्त करने के लिए आवश्यक सुसंगत सांख्यिकीय आंकड़े उत्पन्न करता है। अर्थात्, अपेक्षित परिणाम प्राप्त करने के लिए, यह प्रतिचयन प्रक्रम का प्रयोग करता है। फिर भी, ध्यान दीजिए कि स्वयं प्रतिचयन प्रक्रम में एक उपयुक्त प्रायिकता-बंटन, जिससे प्रतिदर्श (samples) लिए जाते हैं, द्वारा विचाराधीन समस्या की व्याख्या करना आवश्यक होता है।

और, क्योंकि अनुकरण करने में प्रायः काफ़ी कंप्यूटर समय की आवश्यकता होती है, अतः, की जाने वाली अनुकार मात्रा से, यथा संभव परिशुद्ध आंकड़ा प्राप्त करना आवश्यक होता है।

इस खंड की पिछली दो इकाइयों में, आप यह पढ़ चुके हैं कि एक पंक्ति प्रणाली के *आगमन-काल*

सामान्यतः यादृच्छिक चर की परिवर्तनशीलता को उसके बारंबारता बंटन से निरूपित किया जाता है।

इस इकाई में हम केवल *असंतत घटना अनुकार* पर चर्चा करेंगे।

भाग 12.4 में, एकल सेवक पंक्ति प्रणाली के अनुकार पर चर्चा करते समय हम इस पर और अधिक विचार करेंगे।

सेवा-काल और *प्रतीक्षा-काल* जैसे प्राचल (parameters) यादृच्छिक होते हैं और निश्चितता के साथ इनकी प्रागुक्ति (prediction) नहीं की जा सकती है। अधिक व्यापक रूप में, *अनुकार में यादृच्छिकता तब आती है जबकि उत्तरोत्तर घटनाओं के बीच का अंतराल प्रायिकतात्मक* (probabilistic) *होता है*। अतः, एक अनुकार-विश्लेषक, यह मानकर कि इसी प्रकार की परिवर्तनशीलता की प्रत्याशा भविष्य में भी की जा सकती है, इन *कालों* को इस प्रकार जनित करने का प्रयास करता है जिससे अतीत में प्रेक्षित परिवर्तनशीलता पुनरुत्पादित होगी।

क्योंकि अनुकार-निदर्शों का विकास, समय के एक फलन के रूप में, प्रणालियों के व्यवहार का विश्लेषण करने के लिए किया जाता है, इसलिए अनुकार दो प्रकार के होते हैं : **असंतत अनुकार** (discrete simulation) और **संतत अनुकार** (continuous simulation).

असंतत अनुकार में, अनुकरित प्रणाली को समय के केवल कुछ चुने हुए पलों पर ही देखा जाता है जबकि, *संतत अनुकार* में, अनुकार का मानिटरन समय के प्रत्येक पल पर किया जाता है। फिर भी, अनुकार संतत हो या असंतत, हमारा चरम उद्देश्य संगत आंकड़ों को एकत्रित करना है जिनका प्रयोग अनुकरित प्रणाली के व्यवहार की व्याख्या करने में किया जा सके।

असंतत अनुकार का एक प्रतिरूपी उदाहरण *पंक्ति प्रणाली* (waiting line system) होता है जिसमें ग्राहक या तो पंक्ति में लग जाता है या फिर सेवा में प्रवेश करता है और तब, सेवा पूरी हो जाने के बाद, वह सेवा सुविधा से चला जाता है।

संतत प्रणाली में, स्थिति का मॉनिटरन केवल संतत आधार पर करके आंकड़े एकत्रित किए जा सकते हैं। उदाहरण के लिए, *विश्व जनसंख्या गतिकी* (world population dynamics) *के अध्ययन* में *जनसंख्या में परिवर्तन, प्राकृतिक संसाधनों में परिवर्तन,* आदि जैसे कुछ चर होते हैं, जिनका मॉनिटरन (समय के एक फलन के रूप में) होता है।

असंतत घटना के अनुकारों में, प्रणाली की अवस्था में परिवर्तन समय के यादृच्छिक पलों पर असंतत घटनाओं के घटने के कारण होता है। यहाँ पर, *संभव अवस्थाएँ और घटनाएँ,* अनुकरित समय के अभिलेखन के लिए *अनुकार घड़ी* (simulation clock), *विभिन्न प्रकार की घटनाओं को यादृच्छिकतः जनित करने की क्रियाविधि,* और *अवस्था संक्रमणों* (state transitions) *को जनित करने की क्रियाविधि* जैसी कुछ आधारभूत धारणाएँ होती हैं।

विशेष रूप से, एक पंक्ति-प्रणाली का अनुकरण करने के लिए, हमे हर समय कुछ चरों पर दृष्टि बनाए रखने की आवश्यकता होती है जिससे कि हम यह जान सकें कि किस प्रकार यह समय के साथ लगातार विकसित होते रहते हैं। सामान्यतः, निम्नलिखित तीन प्रकार के चरों का उपयोग किया जाता है।

1) *काल चर* **t** (time variable) जिसका संबंध व्यतीत हो गए (अनुकरित) समय से होता है;
2) *मणित्र चर* (counter variable) समय **t** तक घटित घटनाओं की संख्या की गिनती करता है।
3) *प्रणाली अवस्था चर* (system state variable) समय t पर प्रणाली की अवस्था की व्याख्या करता है।

समय 0 से प्रारंभ करके, अनुकार घड़ी एक अनुकरण के चलने तक व्यतीत हुए समय को दर्ज करती है। उदाहरण के लिए, एक पंक्ति-प्रणाली की वर्तमान अवस्था (अर्थात्, *प्रणाली की अवस्था*) यह होती है

S(t) = समय t पर, प्रणाली में ग्राहकों की संख्या।

घटनाएँ जो प्रणाली की अवस्था परिवर्तित कर देती हैं वे या तो एक नए ग्राहक के *आगमन* के कारण होता है या सेवा पूरा हो जाने पर ग्राहक के प्रस्थान के कारण होता है। संक्रमण क्रियाविधि निम्नलिखित की पुनःस्थापन करने से होती है।

$$S(t) = \begin{cases} S(t)+1, & \text{जबकि, समय } t \text{ पर, कोई } \textit{आगमन} \text{ होता हो,} \\ S(t)-1, & \text{जबकि, समय } t \text{ पर, कोई } \textit{प्रस्थान} \text{ करता है।} \end{cases}$$

ऊपर जिन तथ्यों पर चर्चा की गई है, उन्हें और अच्छी तरह से समझने के लिए आइए हम जुआरी वाली स्थिति पर पुन: विचार करें।

उदाहरण 1 : एक अनुकार घड़ी अभी तक घटी अनुकरित उछालों की संख्या दर्ज करती है। यहाँ, n उछालों के बाद, प्रणाली की अवस्था यह होती है

$$S(n) = \text{चित पड़ने की संख्या} - \text{पट पड़ने की संख्या}$$

वे घटनाएँ जो प्रणाली की अवस्था परिवर्तित कर देती हैं, चित के आने या पट के आने पर होती हैं। घटना जनन क्रियाविधि से यादृच्छिक अंक का जनन होता है, जहाँ पाँच अंकों 0, 1, 2, 3, 4 में से कोई भी अंक *चित* पड़ने को सूचित करता है और शेष पाँच अंकों 5, 6, 7, 8, 9 में से कोई भी अंक *पट* पड़ने को सूचित करता है। अवस्था संक्रमण क्रियाविधि निम्नलिखित को स्थापित करने से होती है।

$$S(n) = \begin{cases} S(n-1)+1, & \text{यदि } n \text{वां उछाल एक चित हो,} \\ S(n-1)-1, & \text{यदि } n \text{वां उछाल एक पट हो।} \end{cases}$$

n के उस प्रथम मान पर अनुकरित खेल समाप्त हो जाता है, जबकि $S(n) = \pm 3$ और इस को बाज़ी खेलने में (8–n)रु० की धनराशि लगती है (यह धनात्मक या ऋणात्मक हो सकती है)। मान लीजिए कंप्यूटर निम्नलिखित यादृच्छिक अंकों का (परिमित) अनुक्रम जनित करता है

8, 1, 3, 7, 2, 7, 1, 6, 5, 5, 7, 9, 0, 0, 3, 4, 3, 5, 3, 5, 6, 8, 5, 8, 9, 4, 8, 0, 4, 8, 6, 5, 3, 5, 9, 2, 5, 7, 9, 7, 2, 9, 3, 9, ...

चित को H से और *पट* को T से प्रकट करने पर, हम ऊपर के अनुक्रम को इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$\underbrace{\text{THHTHTHTTTT}}\ \underbrace{\text{THHHH}}\ \underbrace{\text{HTTTT}}\ \underbrace{\text{TTHTHHTTT}}$$

$$\underbrace{\text{HTTHTTT}}\ \text{THTHTT}\ldots\ldots$$

T H H T H T H T T T T इस खेल की पहली अनुकरित बाज़ी है। इसके लिए एक सिक्के की 11 अनुकरित उछालों की आवश्यकता होती है। खेल की दूसरी अनुकरित बाज़ी T H H H H है। खेल की तीसरी अनुकरित बाज़ी H T T T T है आदि, आदि। आप यहाँ यह देख सकते हैं कि, प्रत्येक स्थिति में, उछाले गए चितों की संख्या और उछाले गए पटों की संख्या का अंतर तीन है। *खेल के निर्धारित नियमों के अनुसार* पहली बाज़ी में खिलाड़ी 3 रु० हारता है और दूसरी और तीसरी बाज़ी में 3 रु० जीतता है।

* * *

ऊपर के उदाहरण में, हम प्रतिदर्श औसत लेकर खेल की एक बाज़ी (मान लीजिए खेल की प्रथम दस बाज़ियों में) के लिए आवश्यक उछालों की संख्या का कुछ संकेत प्राप्त कर सकते हैं। यदि प्रतिदर्श औसत 8 *से कम* है तो इससे यह संकेत मिलता है कि खिलाड़ी को यह खेल खेलना चाहिए, क्योंकि खिलाड़ी की हर बार एक रुपया जीतने की संभावना होती है। यदि प्रतिदर्श-औसत 8 *से अधिक* हो, तो खिलाड़ी को को यह खेल नहीं खेलना चाहिए।

वास्तव में, अधिकांश समस्याओं में, सही निर्णय लेने के लिए और अधिक सांख्यिकीय विश्लेषण करने की आवश्यकता होती है।

नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए।

E3) आपको एक उचित सिक्का दिया गया है। प्रायिकताओं $1/8, 1/8, 3/8, 3/8$ के साथ 4 अलग-अलग मान वाले एक असंतत बंटन द्वारा जनित एक अनुकरण योजना व्युत्पन्न कीजिए।

अनुकार घड़ी को *आगे बढ़ाने* (advancing) और प्रणाली के प्रचालन को दर्ज करने के लिए निम्नलिखित दो आधारभूत विधियों का अग्रगामी प्रयोग किया जाता है।

1) *नियत वर्धमान काल अग्रगामी* (fixed incrementing time advance); और

2) *अगली-घटना काल अग्रगामी* (next-event time advance)।

भाग 12.4 में चर्चित दो उदाहरणों से ये संकल्पनाएँ और अधिक स्पष्ट हो जाती हैं।

और, *नियत-वर्धमान काल अग्रिम* के संबंध में, निम्नलिखित दो चरण क्रियाविधि का प्रयोग बार-बार किया जाता है।

1) काल को एक नियत मात्रा से आगे बढ़ाइए।
2) बीतें हुए समय-अंतराल में घटी घटनाओं को ज्ञात करके और प्रणाली की परिणामी अवस्था पर ध्यान देकर प्रणाली को आधुनिक बनाइए।

और, प्रणाली के निष्पादन से संबंधित अपेक्षित सूचना को भी दर्ज करना होता है। तब, हम पुन: चरण 1 पर आ जाते हैं। अपेक्षित सूचना प्रणाली के सम्पूर्ण व्यवहार से संबंधित निष्पादन माप को सूचित करती है। उदाहरण के लिए, एक पंक्ति-प्रणाली में, ग्राहकों की संख्या और उस ग्राहक का प्रतीक्षा-काल, जिसने अभी-अभी अपनी प्रतीक्षा (या औसत प्रतीक्षा काल) पूरी की है, ऐसे ही निष्पादन माप होते हैं।

और, *अगली घटना काल अग्रगामी* के लिए निम्नलिखित दो चरण क्रियाविधि का प्रयोग बार-बार किया जाता है।

1) काल को किसी भी प्रकार की अगली घटना के घटने के समय तक आगे बढ़ाइए। उदाहरण के लिए, एक पंक्ति-प्रणाली में, ग्राहक का आगमन या प्रस्थान ऐसी घटनाएँ होती हैं।
2) इस घटना से उत्पन्न प्रणाली की नई अवस्था ज्ञात करके और तब तक समय का यादृच्छिकत: जनन करके जब तक कि किसी प्रकार की घटना, जो कि इस अवस्था से (यदि पहले से जनित न हो) घट सकती है, इसको (प्रणाली को) आधुनिक बनाइए। और, प्रणाली के निष्पादन से संबंधित अपेक्षित सूचना भी दर्ज कीजिए।

यहाँ एक कंप्यूटर दो भावी घटनाओं पर दृष्टि बनाए रखता है। उदाहरण के लिए, पंक्ति-प्रणाली के संदर्भ में, दो भावी घटनाएँ *अगला आगमन* (next arrival) और *अगली सेवा की पूर्ति* (next service completion), जबकि ग्राहक की सेवा की जा रही हो, हो सकती है।

उस अनुकार में, जिसमें किसी भी तरह का यादृच्छिक पहलू हो, प्रायिकता बंटनों से प्राप्त प्रतिचयन (या *यादृच्छिक प्रेक्षण का जनन*) अवश्य होंगे। उदाहरण के लिए, एकल सेवक निदर्श अभिकलन में प्रयुक्त *अंतर-आगमन* काल और *सेवा-काल* वास्तव में संबंधित प्रायिकता बंटन से लिए गए प्रतिदर्श होते हैं।

वाक्यांश *यादृच्छिक प्रेक्षण का जनन* का प्रयोग उन अपेक्षित बंटन के एक यादृच्छिक चर पर प्रेक्षण प्राप्त करने की गतिविधि के संबंध में किया जाता है, जिन्हें प्राय: प्रेक्षित आंकड़ों में समंजित माना जाता है।

अगले भाग में, यह मानकर कि बंटन किसी न किसी प्रकार से निर्दिष्ट कर दिया गया है, हम दर्शाएंगे कि किस प्रकार अनुकार निदर्श को चलाने के लिए इस बंटन से यादृच्छिक प्रेक्षण जनित किए जाते हैं।

12.3 यादृच्छिक प्रेक्षण का जनन

क्योंकि अनुकरण एक सांख्यिकीय प्रयोग है, इसलिए यह (समय के एक फलन के रूप में) निर्गत (output) में परिवर्तन प्रदर्शित करता है। सामान्यत: निर्गत में दो भाग होते हैं : *क्षणिक अवस्था* (transient state) और *स्थायी अवस्था* (steady state). अधिकांश प्रणालियों का अभिकल्प प्राय: *स्थायी अवस्थाओं* पर आधारित होता है जहाँ स्थायी अवस्था वह स्थिति होती है जबकि निर्गत समय से स्वतंत्र हो जाता है।

उदाहरण के लिए, एकल सेवक निदर्श के संबंध में, *स्थायी अवस्था* अधिक तेजी से प्राप्त होती है क्योंकि *सेवा-काल* की अपेक्षा *अंतर आगमन काल* में अधिक वृद्धि होती है। वास्तव में, *उस स्थिति में स्थायी अवस्था कभी भी प्राप्त नहीं होगी, जबकि सेवा-काल अंतर-आगमन काल से अधिक होता हो।*

वास्तव में, स्थायी अवस्था प्राप्त हो जाने के बाद ही हम प्रेक्षण (observations) एकत्रित करना चाहते हैं, क्योंकि ऐसा करने से प्रतिचयन त्रुटि काफी कम होगी और अधिक परिशुद्ध परिणाम प्राप्त होंगे। आदर्श रूप में, इसे हम निम्नलिखित क्रियाऐं करके प्राप्त कर सकते हैं।

1. स्थायी अवस्था प्राप्त करने की सम्भावना में सुधार लाने के लिए काफी लंबे समय के लिए अनुकार लागू (simulation run) करके;
2. यादृच्छिक संख्याओं के विभिन्न अनुक्रमों के साथ अनुकार लागू करने में पुनरावृत्ति करके और हर बार एक नये प्रेक्षण को निरूपित करें।

अत:, अब हमें दो महत्त्वपूर्ण प्रश्नों पर विचार करना है।

(क) *किस प्रकार एक दिए हुए प्रायिकता बंटन से यादृच्छिक प्रेक्षणों का अवश्य जनित किया जाता है?*

(ख) *एक बंटन से यादृच्छिक प्रेक्षण जनित करने में यादृच्छिक संख्याओं की आवश्यकता क्यों होती है?*

इस भाग के अगले दो अंशों में हम इन प्रश्नों का उत्तर देने का प्रयास करेंगे।

12.3.1 यादृच्छिक संख्या

हम जानते हैं कि यादृच्छिक संख्या U(0,1) निम्नलिखित दो प्रतिबंधों को संतुष्ट करती है।

i) अंतराल [0,1] के सभी (संतत) मान *एकसमानत: बंटित* (uniformally distributed) होते हैं, अर्थात् सभी मानों का होना संप्रायिक (equally likely) होता है; और

ii) अंतराल [0,1] के ये मान *स्वतंत्र* (independent), *असहसंबंधित* (uncorrelated) होते हैं, अर्थात् , उत्तरोत्तर मान (successive values) पूर्णत: यादृच्छिक रूप से जनित होते हैं।

अन्य सभी बंटनों से यादृच्छिक प्रेक्षण जनित करने में U (0, 1) बंटन का बोध होना आवश्यक होता है। इसके *प्रायिकता बंटन फलन* (probability distribution function) और *संचयी बंटन फलन* (cummulative distribution function) क्रमश: ये होते हैं

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{अन्यथा}\end{cases} \quad \text{और} \quad F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\le x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

जैसा कि ऊपर कहा जा चुका है, *अनुकरण* वास्तव में प्रयोग किए बिना यादृच्छिक संख्याओं की सहायता से प्रेक्षण जनित करने का प्रक्रम है। यहाँ जिस आधारभूत संघटक (ingredient) की आवश्यकता होती है वह हैं i.i.d. U (0, 1) यादृच्छिक संख्याओं का स्रोत जिसके बिना किसी भी बंटन से ठीक तरह से यादृच्छिक प्रेक्षण जनित करना असंभव है। यही कारण है कि एक सांख्यिकीत: विश्वस्यनीय U (0, 1) यादृच्छिक संख्या जनक का होना अनिवार्य होता है।

छद्म-यादृच्छिक संख्या जनक (pseudo-random number generator) एक कलन विधि (algorithm) है जिससे संख्याओं का एक ऐसा अनुक्रम प्राप्त होता है जिसमें यादृच्छिकता का आभास होता है। छद्म-यादृच्छिक संख्याओं को उत्तरोत्तरत: जनित करने के लिए एक कंप्यूटर का प्रयोग किया जाता है। इन छद्म यादृच्छिक संख्याओं से, यद्यपि निर्धारणात्मकत: (deterministically) जनित होते हैं, मानों का एक अनुक्रम प्राप्त होता है जिनमें स्वतंत्र U (0,1) संख्याओं वाले सभी गुण होते हैं।

छद्म-यादृच्छिक संख्याएँ संख्याएँ जनित करने के लिए प्रयुक्त की जाने वाली अति सामान्य विधि में सबसे पहले एक आदि मान r_0, जिसे *बीज* (seed) कहा जाता है, नियत किया जाता है और तब सर्वांगसमता-संबंध (congruence relation)

एक बार पुनरावर्ती अभिकलनों का बीज प्रारंभीकरण प्राप्त हो जाने पर ऐसे सभी सदस्य पहले से ही ज्ञात हो जाते हैं। यही कारण है कि इन संख्याओं को *छद्म-यादृच्छिक* संख्या कहा जाता है।

$$r_n = ar_{n-1} \text{ (modulo m)}, \tag{1}$$

जहाँ a और m पहले से ज्ञात धन पूर्णांक हैं, को लागू करके पुनरावर्तित: उत्तरोत्तर मान $r_n, n\ge 1$, अभिकलित किए जाते हैं। यहाँ, परिभाषा के अनुसार, समीकरण (1) का r_n, ar_{n-1} को m से भाग देने पर बचे हुए शेष के बराबर होता है। अनुपात r_n/m को U (0,1) यादृच्छिक संख्या के मान का एक सन्निकटन माना जाता है। समीकरण (1) में बतायी गई क्रियाविधि को यादृच्छिक संख्याएँ जनित करने की *गुणनात्मक सर्वांगसमक विधि* (multiplicative congruential method) कहा जाता है।

हम जानते हैं कि r_n मानों $0,1,\ldots,m-1$ में से कोई भी एक मान धारण कर सकता है। अत:, इन संख्याओं के बाद के सभी मानों की पुनरावृत्ति स्वयं होगी। और, एक बार ऐसा हो जाने पर, पूरे अनुक्रम r_n की पुनरावृत्ति पुन: होने लगेगी। अत:, हमें a और m का चयन इस प्रकार करना होता है जिससे कि, किसी भी **आदि बीज** (initial seed) r_0 के लिए, वे संख्याएँ बहुत अधिक मात्रा में हो जिन्हें इस पुनरावर्तन के पहले जनित किया जा सकता है।

इसलिए, अचर a और m का चयन इस तरह किया जाता है, जिससे कि ये निम्नलिखित तीन प्रतिबंधों को संतुष्ट कर सकें।

पंक्ति निदर्श

i) किसी भी आदि *बीज* के लिए, परिणामी अनुक्रम का रूप एक स्वतंत्र U (0, 1) यादृच्छिक संख्याओं के अनुक्रम के रूप का हो।

ii) किसी भी आदि *बीज* के लिए, वे यादृच्छिक संख्याएँ जिन्हें पुनरावर्तन प्रारंभ होने से पहले जनित किया जा सकता है, बहुत अधिक मात्रा में हों।

iii) एक अंकीय कंप्यूटर (digital computer) से इन संख्याओं का अभिकलन दक्ष रूप से किया जा सकता हो।

एक मार्गदर्शी सिद्धांत, जो कि ऊपर के तीन प्रतिबंधों को संतुष्ट करने में सहायक होता है, यह है कि m का चयन एक ऐसी वृहत् अभाज्य संख्या (prime number) के रूप में करना चाहिए जिसे कि कंप्यूटर शब्द आमाप में समंजित किया जा सके। एक 32-दृयंक (bit) शब्द मशीन (जहाँ पहला दृयंक एक चिह्न दृयंक होता है) के संबंध में यह देखा गया है कि $m = 2^{31} - 1$ और $a = 7^5 = 16807$ से अपेक्षित गुणधर्म प्राप्त होते हैं।

और, एक 36 दृयंक शब्द मशीन पर $m = 2^{35} - 31$ और $a = 5^5$ का चयन अच्छी तरह से काम कर सकता है।

व्यापक रूप में प्रयुक्त होने वाला इस प्रकार का यादृच्छिक संख्या जनक **लियरमाउथ-लेविस जनक** होता है जिसकी परिभाषा यह है

$$r_{n+1} = 7^5 r_n \left(\text{modulo}\left(2^{31} - 1\right)\right).$$

ऊपर चर्चित तथ्यों को और अच्छी तरह से समझने के लिए आइए हम एक विशेष स्थिति पर विचार करें।

समशेषता, modulo m, $r_{k+1} = ar_k + c$ द्वारा दिए गए *जनक* को **मिश्र जनक** (mixed generator) कहा जाता है।

प्रश्न 3 : यादृच्छिक संख्या जनक $r_{k+1} = (ar_k + c)(\text{modulo } m), k = 0, 1, 2, \ldots,$ की सहायता से, 0 और 1 के बीच की यादृच्छिक संख्याएँ r_2 और r_3 जनित कीजिए जबकि यह दिया हुआ है कि $r_0 = 35$, $a = 13, c = 65$ और $m = 100$.

हल : क्योंकि 13(35) + 65 को 100 से भाग देने पर शेष 20 बचता है, इसलिए $r_1 = 20$. इसी प्रकार आप यह देख सकते हैं कि $r_2' = 25$ और $r_3' = 90$, अतः,

$$r_2 = \frac{25}{100} = 0.25, \quad r_3 = \frac{90}{100} = 0.9,$$

अंतराल [0, 1] में स्थित अपेक्षित यादृच्छिक संख्याएँ हैं।

अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए।

E4) मिश्रित जनक $r_{n+1} = (ar_n + c)(\text{modulo } m)$ की सहायता से r_{10} तक परिकलित कीजिए जबकि

क) $a = 5, c = 7, m = 8, r_0 = 4$; और ख) $a = 4, c = 7, m = 8, r_0 = 3$.

अनुकरण करते समय, *प्रणाली के निष्पादन माप* का आकल कुछ प्रेक्षणों पर आधारित होता है। जैसा कि अपेक्षित होता है, यादृच्छिक संख्याओं के *अलग-अलग* अनुक्रम लेने पर *परिणामी प्रेक्षण* स्वतंत्र हो जाते हैं।

इस विषय पर और गंभीर चर्चा करने से पहले आइए हम एक विशेष स्थिति पर विचार करें।

उदाहरण 2 : दो पाशकों को फेंकने पर प्राप्त हुए परिणाम का प्रायिकता बंटन लीजिए। हम जानते हैं कि 2 फेंकने की प्रायिकता 1/36 होती है, 3 फेंकने की प्रायिकता 2/36 होती है, आदि आदि।

अतः, एक यादृच्छिक संख्या के संभव मानों में से 1/36 का संबंध 2 फेंकने से होता है, मानों में से 2/36 का संबंध 3 फेंकने से है, आदि आदि। इस तरह, यदि दो अंकों वाली यादृच्छिक संख्याएँ ली जाएँ तो, तर्क के लिए, 100 मानों में से 72 मान चुन लिए जाएंगे जिससे कि उस स्थिति में यादृच्छिक संख्या अस्वीकृत कर दी जाएगी जबकि वह अन्य 28 मानों में से कोई भी एक मान धारण करती हो। तब 72 संभव मानों में से दो मानों (मान लीजिए 00 और 01) का संबंध 2 फेंकने से होगा, इनमें से चार मानों (मान लीजिए 02, 03, 04 और 05) का संबंध 3 फेंकने से होगा, आदि आदि।

नीचे की समस्या में एक द्विपद बंटन (binomial distribution) से प्रेक्षण जनित करने में यादृच्छिक अंकों 0, 1, ... ,9 के एक प्रयोग को दर्शाया गया है।

प्रश्न 4 : प्राचल $n = 8$ और $p = \frac{1}{3}$ वाले एक द्विपद बंटन से एक प्रेक्षण जनित कीजिए।

हल : यहाँ, हमें प्रायिकता सिद्धांत के निम्नलिखित मानक परिणाम की आवश्यकता होती है।

यदि $X_1,\ldots,X_n$ *स्वतंत्र, अभिन्नतः बंटित* (i.i.d) *बर्नोली* (p) *यादृच्छिक संख्याएँ हों (अर्थात्,*

$P[X_i = 1] = p$ *और* $P[X_i = 0] = 1 - p$), *तब* $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p)$.

सामान्यतः, $X \sim B(n, p)$ इस तथ्य को व्यक्त करने का संक्षिप्त रूप है कि प्राचल n और p यादृच्छिक चर X वाला द्विपदतः बंटित होता है।

अब, यह दिखाने के लिए कि इस स्थिति में अनुकार प्रतिचयन किस प्रकार किया जाता है, आप यह देख सकते हैं कि इस समस्या का हल ([0, 1] पर) 8 यादृच्छिक संख्याएँ जनित करने के बराबर होता है। मान लीजिए जनित यादृच्छिक संख्याएँ $U_1, U_2, \ldots, U_8$ हैं। और, प्रत्येक $i = 1, \ldots, 8$ के लिए, '1' लीजिए जबकि $U_i \le 0.33$, अन्यथा '0' लीजिए। अतः, 1 की संख्या की कुल गिनती $B\left(8, \frac{1}{3}\right)$ से किया गया एक प्रेक्षण होगा। (हम यहाँ $\frac{1}{3}$ का सन्निकट मान 0.33 लेते हैं।)

———— × ————

नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

E5) एक सिक्के की 6 उछालों का अनुकरण कीजिए जिसकी चित पड़ने की प्रायिकता 0.57 हो।

E6) माध्य 2.6 वाले प्वासां बंटन से एक प्रेक्षण का अनुकरण कीजिए।

यादृच्छिक प्रेक्षणों का जनन अनेक विधियों से किया जा सकता है और प्रयुक्त की गई विशेष कलन-विधि उस बंटन पर निर्भर करेगी जिससे हम यादृच्छिक प्रेक्षण जनित करना चाहते हैं। फिर भी, लगभग इन सभी तकनीकों को उनके सैद्धांतिक आधार के अनुसार वर्गीकृत किया जा सकता है।

इस भाग के अगले अंश में, हम बंटनों से यादृच्छिक प्रेक्षणों (random variates) के जनित करने की विधि की व्याख्या करेंगे।

12.3.2 प्रतिलोमन विधि (Method of inversion)

एक बंटन से यादृच्छिक प्रेक्षण जनित करना अधिकांश अनुकार प्रयोगों का एक जरूरी हिस्सा होता है। वास्तव में, विचाराधीन निदर्श की जटिलता को ध्यान में रखकर, यादृच्छिक प्रेक्षणों का जनन अनेक बार करना पड़ सकता है क्योंकि निहित भौतिक प्रक्रम (physical process) को निरूपित करने वाले अनेक बंटन हो सकते हैं।

यहाँ हमें केवल एक यादृच्छिक संख्या के संभव मानों को प्रायिकता बंटन की विभिन्न संख्याओं पर नियत करना होता है। और, यह क्रिया इन संख्याओं की प्रायिकताओं के अनुलोमानुपात (proportion) में की जाती है।

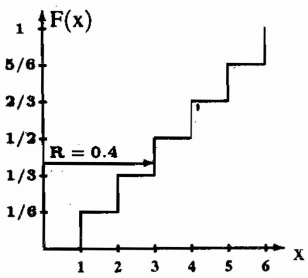
सामान्यतः, U (0,1) यादृच्छिक संख्याओं का प्रयोग एक प्रायिकता बंटन से यादृच्छिक प्रेक्षण जनित करने में किया जाता है। इस तथ्य को और अच्छी तरह से समझने के लिए आइए हम असंतत बंटन (discrete distribution) वाली एक स्थिति पर विचार करें।

उदाहरण 3 : *पाशक फेंके जाने वाले* खेल के संबंध में, हम X से परिणाम (*यादृच्छिक चर*) निरूपित करते हैं और इसके *प्रायिकता घनत्व फलन* (p.d.f.) और *संचयी बंटन फलन* (c.d.f.) के लिए क्रमशः p(X) और F(X) लिखते हैं। तब, p(X) और F(X) के मानों के लिए हमें यह प्राप्त है

X	1	2	3	4	5	6
p(X)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
F(X)	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6	1

F(X) मापक्रम की जांच करने पर, हम यह पाते हैं कि X के विभिन्न मानों में $U(0,1)$ यादृच्छिक संख्याओं का विभाजन (partitioning) स्वत: यह हो जाता है

$$X=1\ :\ 0\le F(x)\le\frac{1}{6};\quad X=4:\ \frac{1}{2}<F(x)\le\frac{2}{3};$$
$$X=2\ :\ \frac{1}{6}<F(x)\le\frac{1}{3};\quad X=5\ :\ \frac{2}{3}<F(x)\le\frac{5}{6};$$
$$X=3:\ \frac{1}{3}<F(x)\le\frac{1}{2};\quad X=6\ :\ \frac{5}{6}<F(x)\le 1.$$



चित्र 1

अब, एक $U(0,1)$ यादृच्छिक संख्या R जनित कीजिए और इसे F(x) में नियत कीजिए, तब F(x) का केवल प्रतिलोमन करने से हम परिणाम X प्राप्त कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, $R=0.4$ पर $F(X)=0.4$, जिससे $X=3$ प्राप्त होता है। इसे चित्र 1 और ऊपर सारणीयित मानों दोनों से पढ़ा जा सकता है।

* * *

ऊपर के उदाहरण 3 में हमने जो चरण लागू किए हैं वे F(X) का प्रतिलोमन करने के बराबर ही हैं और यह एक ऐसी व्यापक क्रियाविधि की एक विशेष स्थिति है जिसे *प्रतिलोमन-विधि* (method of inversion) कहा जाता है।

प्रतिलोमन विधि का प्रयोग प्राय: उन बंटनों के लिए किया जाता है जिनका संचयी बंटन फलन संवृत रूप में प्राप्त किया जा सकता हो।

प्रतिलोमन-विधि किसी भी ऐसे प्रायिकता बंटन पर लागू की जा सकती है जबकि हम यह दर्शा सकते हों कि इसका *संचयी बंटन फलन* (cummulative distribution function) अंतराल [0, 1] में एकसमानत: बंटित हो।

अब, मान लीजिए कि हम *प्रायिकता घनत्व फलन* (p.d.f.)

$P\left[X=x_j\right]=p_j,\ j=0,1,2,\ldots,$ जहाँ $\sum_{i=0}^{\infty}p_j=1,$

वाले एक असंतत यादृच्छिक चर X का मान जनित करना चाहते हैं।

इसे पूरा करने के लिए, हम एक $U(0,1)$ यादृच्छिक संख्या U जनित करते हैं, और मान लेते हैं कि

उदाहरण के लिए, यहाँ हम *गुणनात्मक सर्वांगसमक विधि* से U जनित कर सकते हैं।

$$X=\begin{cases} x_0, & \text{यदि } U<p_0\\ x_1, & \text{यदि } p_0\le U<p_0+p_1\\ x_2, & \text{यदि } p_0+p_1\le U<p_0+p_1+p_2\\ . & \ldots\\ . & \ldots\\ . & \ldots\\ x_j, & \text{यदि } \sum_{i=0}^{j-1}p_i\le U<\sum_{i=0}^{j}p_i \end{cases}$$

हम जानते है कि, $0<a<b<1$ के लिए,

$$P\left[X=x_k\right]=P\left[\sum_{i=0}^{k-1}p_i\le U<\sum_{i=0}^{k}p_i\right]=\sum_{i=0}^{k}p_i-\sum_{i=0}^{k-1}p_i=p_k.$$

अत: X का बंटन अपेक्षित होता है।

सामान्यत:, हम किसी भी ज्ञात प्रायिकता-बंटन से यादृच्छिक प्रेक्षण जनित करना चाहते हैं। यहाँ, हम यह बताएंगे कि एक यादृच्छिक संख्या से प्रतिचयन करके और परिणाम को किसी ज्ञात बंटन में रूपांतरित करके किस प्रकार किसी ज्ञात बंटन से एक यादृच्छिक प्रतिदर्श (random sample) जनित किया जा सकता है।

प्रतिलोमन विधि निम्नलिखित प्रमेय पर आधारित होता है। (संक्षिप्तता को दृष्टि में रखकर यहाँ प्रमेय 1 की उपपत्ति नहीं दी गई है।)

प्रमेय 1 : मान लीजिए U एक $U(0,1)$ यादृच्छिक संख्या है। किसी भी *संचयी बंटन फलन* $F(x) = P[X \le x]$ के लिए, $X = F^{-1}(U)$ से परिभाषित यादृच्छिक चर का बंटन F होता है।

ध्यान दीजिए कि $F^{-1}(U)$ *सुपरिभाषित है, क्योंकि* $0 \le U \le 1$, *और* F *का परिसर* [0, 1] *में स्थित होता है।*

नीचे के उदाहरण में हमने एक चरघातांकीय बंटन (exponentially distribution) से यादृच्छिक प्रेक्षण जनित करने के लिए प्रमेय 1 के प्रयोग को दर्शाया है।

उदाहरण 4 : मान लीजिए X एक यादृच्छिक चर है जिसका चरघातांकीय बंटन प्राचल μ वाला है। हम जानते हैं कि इसका *प्रायिकता बंटन फलन* $f(x) = \mu e^{-\mu x}$, जहाँ $x \ge 0$, और $f(x) = 0$, अन्यथा, होता है। और, इसका *संचयी बंटन फलन*

$$F(x) = \int_0^x \mu e^{-\mu t} dt = 1 - e^{-\mu x}, \ x \ge 0,$$

होता है। अतः, यदि R एक $U(0,1)$ यादृच्छिक संख्या हो, तो $F(x) = R$ से

$$R = 1 - e^{-\mu x} \Rightarrow x = -\frac{1}{\mu} ln(1-R) = -\frac{1}{\mu} ln\, R$$

प्राप्त होता है। यहाँ अंतिम चरण न्याय संगत है, क्योंकि यदि R एक U (0, 1) यादृच्छिक संख्या हो, तो $(1 - R)$ भी यादृच्छिक संख्या होती है। अतः, अपनी सुविधा के लिए, हम $(1 - R)$ के स्थान पर R प्रतिस्थापित कर सकते हैं। तब प्रमेय 1 के अनुसार, $x' = -\frac{1}{\mu} R$ से प्राचल μ वाले ऋणात्मक चरघातांकीयत: बंटित समष्टि से अपेक्षित यादृच्छिक प्रेक्षण प्राप्त हो जाते हैं।

* * *

अधिक व्यापक रूप में, प्रमेय 1 से हमें एक संतत बंटन से यादृच्छिक प्रेक्षण जनित करने की निम्नलिखित विधि प्राप्त हो जाती है।

यादृच्छिक चर X का प्रायिकता घनत्व फलन f(x) दिया हुआ हो, तो

$$\mathbf{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s) ds}$$

के रूप में प्रायिकता घनत्व फलन f (x) प्राप्त कीजिए। (किसी भी विधि से) एक यादृच्छिक संख्या R जनित कीजिए। F(x) = R लीजिए और x के लिए इसे हल कीजिए।

तब, चर X से अभीष्ट यादृच्छिक प्रेक्षण प्राप्त होते हैं जो कि उस बंटन से मिलते हैं जिसका p.d.f., $f(x)$ होता है।

प्रश्न 5 : निम्नलिखित प्रायिकता घनत्व फलन, जिसे *रैम्प फलन* कहा जाता है, लीजिए

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

एक यादृच्छिक प्रेक्षण जनित कीजिए जबकि दिया हुआ है कि $R = 0.81$.

हल : यहाँ प्रायिकता घनत्व फलन

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{4}, & 0 \le x \le 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

की तरह का होता है। $F(x) = R$ लेने पर हमें $x = \pm 2\sqrt{R}$ प्राप्त होता है।

इस तरह, ऊपर जो कुछ भी कहा गया है उसके अनुसार ...

बंटन के यादृच्छिक प्रेक्षण प्राप्त हो जाते हैं। तब, यादृच्छिक संख्या $R = 0.81$ के संगत $x = 2\sqrt{0.81} = 2 \times 0.9 = 1.8$ जनित होता है।

——————— × ———————

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

E7) $f(x) = (0.6)(0.4)^{x-1}, x = 1, 2, 3, \ldots,$ से दिए गए प्रायिकता घनत्व फलन (p.d.f.) वाले प्रायिकता बंटन से यादृच्छिक प्रेक्षण जनित कीजिए।

E8) $$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

से दिए गए प्रायिकता घनत्व फलन (p.d.f.) से एक यादृच्छिक प्रेक्षण जनित कीजिए।

यहाँ इस बात का उल्लेख कर देना आवश्यक है कि यद्यपि *प्रतिलोमन विधि* (inversion method) से किसी भी संतत बंटन से यादृच्छिक प्रेक्षण जनित करने की एक उत्तम विधि प्राप्त हो जाती है, फिर भी इस विधि की कुछ सीमाएँ होतीं हैं। विशेष रूप से, तब जबकि F(x) का एक जटिल रूप हो और इसके प्रतिलोम का परिकलन करना सरल न हो।

ऐसी स्थितियों में, ऐसी अनेक विधियाँ हैं जिन्हें लागू किया जा सकता है जैसे, *बॉक्स-मिलर रूपांतरण, स्वीकरण-अस्वीकरण तकनीक, संयोजन विधि,* और अन्य। इस इकाई में हमारा मुख्य संबंध पंक्ति-प्रणालियों के अनुकार से है, इसलिए यहाँ इन विधियों पर चर्चा करने का कोई अर्थ नहीं रह जाता।

इस भाग में उल्लेख की गई विधियों को और अच्छी तरह से समझने के लिए हम M/M/1 पंक्ति प्रणाली पर चर्चा अगले भाग में करेंगे।

12.4 पंक्ति-प्रणाली का अनुकार

जब एक ग्राहक एकल सेवक पंक्ति प्रणाली पर आता है तो सेवक की स्थिति (status) के अनुसार उसे या तो प्रतीक्षा करनी होती है या उसे तुरंत सेवा उपलब्ध करायी जाती है। यदि एक सेवा पूरी हो गई हो तो सेवक प्रतीक्षा कर रहे अगले ग्राहक को बुला सकता है, अथवा, जब तक कोई नया ग्राहक नहीं आ जाता, तब तक यह निष्क्रिय रहता है।

पंक्ति-प्रणाली के अनुकार का उद्देश्य *औसत पंक्ति लंबाई, प्रति ग्राहक औसत प्रतीक्षा काल* और *प्रति सेवक औसत निष्क्रिय काल* जैसे निष्पादन माप अभिकलित करना होता है। ऐसी प्रणाली की अवस्था में परिवर्तन केवल तब होता है जबकि (i) एक ग्राहक आता है, या (ii) सेवा उपलब्ध हो जाने के बाद, कोई ग्राहक चला जाता है। यहाँ मुख्य अभिधारणा इस तरह की है कि जब तक कि एक घटना नहीं घट जाती, तब तक काल मापक्रम (time scale) के साथ आगे बढ़ते रहना होता है। और तब, घटना के प्रकार के अनुसार, उपयुक्त कार्रवाई की जाती है।

इकाई 10 में हमने जो कुछ भी पढ़ा, उससे हम यह जानते हैं कि आगमन प्रक्रम (arrival process) (दर λ वाला) एक समांग प्वासां प्रक्रम (homogenous Poisson process) है और *प्रस्थान-प्रक्रम* भी (दर μ वाला) एक समांग प्वासां प्रक्रम होता है। इकाई 10 के प्रमेय 1 और प्रमेय 2 से, हम यह जानते हैं कि *अंतर-आगमन काल चरघातांकीयत: बंटित होता है यदि और केवल यदि आगमन-प्रक्रम प्वासां होता हो।*

अत:, हम यह निष्कर्ष निकाल लेते हैं कि माध्य $1/\lambda$ वाले स्वतंत्र चरघातांकीय यादृच्छिक चरों का एक अनुक्रम जनित करना और उन्हें उत्तरोत्तर ग्राहकों के आने के बीच का अंतराल मान लेना ही पर्याप्त होता है।

तब, उदाहरण 4 के अनुसार, यदि हम अंतराल [0, 1] पर n यादृच्छिक संख्याएँ $U_1, U_2, \ldots, U_n$ जनित करें और $X_i = -\frac{1}{\lambda} ln\, U_i$ मान लें, तब X_i को प्वासां-प्रक्रम के $(i-1)$ वीं और i-वीं घटना ([illegible] आगमन) के बीच का समय माना जा सकता है।

इसी प्रकार, $Y_i = -\frac{1}{\mu} ln\, V_i$ लेकर, जहाँ $V_1, V_2, \ldots, V_n$, अंतराल [0, 1] पर n यादृच्छिक संख्याएँ हैं, हम $Y_1, Y_2, \ldots$ को पहले, दूसरे ,......, ग्राहक की सेवा करने के लिए आवश्यक यादृच्छिक समयों का प्रापण (realisation) मान सकते हैं।

अंत में, *किसी भी समय t पर उपस्थित ग्राहकों की संख्या, सेवक के निष्क्रिय काल का अनुपात* (वह अवधि जबकि प्रणाली में कोई भी ग्राहक न हो) और *पंक्ति के अन्य रोचक लक्षणों का परिकलन,* सरलता से किया जा सकता है।

नीचे के उदाहरण में *नियत-वर्धमान काल अग्रिम* क्रियाविधि दर्शायी गई है।

उदाहरण 5 : $\lambda = 8$ प्रति घंटा और $\mu = 6$ प्रति घंटा वाला एक एकल सेवक पंक्ति प्रणाली (M/M/1) लीजिए। आइए हम 6 मिनट, अर्थात् 0.1 घंटा, को ऐसी एक नियत लघु मात्रा मान लें जिससे हर बार घड़ी को आगे बढ़ाया जाता है। क्योंकि अंतर-आगमन काल और सेवा काल के चरघातांकीय बंटन होते हैं, तब इस बात की प्रायिकता p_a कि 0.1 घंटे के समय अंतराल में एक आगमन सम्मिलित होगा, यह होती है

$$p_a = 1 - e^{-8/10} = 1 - e^{-4/5} = 0.5507.$$

और, इस बात की प्रायिकता p_d कि इसमें प्रस्थान सम्मिलित हो जाएगा, जबकि यह दिया हुआ है कि अंतराल के प्रारंभ में ही ग्राहक को सेवा उपलब्ध करायी जा चुकी थी, यह होती है

$$p_d = 1 - e^{-6/10} = 1 - e^{-3/5} = 0.4512.$$

हम एक यादृच्छिक संख्या का जनन एक अंक के साथ ना करते हुए बहु-अंकों के साथ करते हैं। अतः, इस संख्या के सामने एक दशमलव बिंदु लगा देने से एक $U(0,1)$ यादृच्छिक संख्या प्राप्त होती है जो कि 0 और 1 के बीच के एकसमान बंटन का एक यादृच्छिक प्रेक्षण है। यदि इस यादृच्छिक संख्या को r_a से प्रकट किया जाए, तो

$r_a < 0.5506 \Rightarrow$ एक आगमन होता है; और $r_a \geq 0.5506 \Rightarrow$ एक आगमन नहीं होता है।

इसी प्रकार, एक अन्य $U(0,1)$ यादृच्छिक संख्या r_d के लिए

$r_d < 0.4511 \Rightarrow$ प्रस्थान हुआ था; $r_d \geq 0.4511 \Rightarrow$ प्रस्थान नहीं हुआ था।

जबकि यह दिया गया हो कि ग्राहक की सेवा समय-अंतराल के प्रारंभ में की गई है, इस पंक्ति प्रणाली पर नियत वर्धमान समय अग्रिम क्रियाविधि लागू करने पर प्राप्त परिणाम नीचे की सारणी में दिए गए हैं। (यहाँ r_a और r_d के मान भी दिए गए हैं।)

t (मिनटों)	N(t)	r_a	अंतराल में आगमन	r_d	अंतराल में प्रस्थान
0	0	–	–	–	–
6	1	0.096	हाँ	–	–
12	1	0.569	नहीं	0.665	नहीं
18	1	0.764	नहीं	0.842	नहीं
24	1	0.492	हाँ	0.224	हाँ
30	1	0.950	नहीं	0.552	नहीं
36	1	0.610	नहीं	0.559	नहीं
42	1	0.145	हाँ	0.041	हाँ

आपको याद होगा कि N(t) समय-अंतराल t में एक घटना के घटने की संख्या को प्रकट करता है।

* * *

अब हम *अगली-घटना समय अग्रिम* (next-event time advance) विधि के एक उदाहरण पर चर्चा करेंगे। परन्तु ऐसा करने से पहले आइए हम इस विधि से संबंधित कुछ आधारभूत अभिधारणाओं पर पुनः विचार कर लें।

पंक्ति निदर्श

मान लीजिए एक अनुकारक (simulator) समय $t=0$ पर प्रारंभ होता है और तब तक $t=t_1$, $t=t_2 \ldots$, आदि, तक आगे बढ़ता रहता है, जब तक कि (समय T में) अनुकरण पूरा नहीं हो जाता। क्योंकि प्रारंभ में सेवक खाली होता है, इसलिए आते ही ग्राहक को सेवा उपलब्ध होना प्रारंभ हो जाती है। तब, ऐसी स्थिति में, निम्नलिखित दो घटनाएँ अवश्य जनित होगीं।

क) अगला आगमन; और

ख) पंक्ति के एक ग्राहक की सेवा पूर्ति।

अब, जैसा कि हम जानते हैं, (क) *अंतर-आगमन काल* से प्राप्त होता है और हम, t_2 पर, आगमन घटना के लिए $E_a(t_2)$ लिखते हैं। इसके विपरीत, (ख) *सेवा काल* से प्राप्त होता है और हम, t_3 पर, प्रस्थान घटना के लिए $E_d(t_3)$ लिखते हैं। अब, $E_a(t_1)$ और $E_d(t_3)$ को कालानुक्रमत: (chronologically) भंडारित (stored) किया जाता है जिससे अनुकारक (simulator) यह पहचान जाता है कि $E_d(t_3)$ से पहले $E_a(t_1)$ घटता है। समय t_2 पर, अगली घटना $E_a(t_2)$ होती है और यहाँ पर (अतीत की घटना होने के कारण) भंडारित सूची में से $E_a(t_1)$ को हटा दिया जाता है।

इसके बाद, घटना $E_a(t_2)$ घटना $E_a(t_4)$ जनित करती है। क्योंकि सुविधा व्यस्त है, इसलिए आने वाला ग्राहक पंक्ति में लग जाता है। अब, सूची में से $E_a(t_2)$ हटा दिया जाता हैं और $E_d(t_3)$ को लिया जाता है। इस समय पर, पंक्ति से एक ग्राहक लिया जाता है और प्रस्थान घटना $E_d(t_5)$ जनित हो जाती है। इस प्रक्रम को तब तक बार-बार दोहराया जाता है, जब तक कि पूरी अनुकरित अवधि T समाप्त नहीं हो जाती।

नीचे दिए गए उदाहरण से इनमें से कुछ तथ्य स्पष्ट हो जाएंगे।

उदाहरण 6 : मान लीजिए हम आगमन दर $\lambda = 0.35$ और सेवा दर $\mu = 0.48$ वाली एक M/M/1 पंक्ति का अनुकरण करना चाहते हैं। इसके लिए आवश्यक आंकड़े नीचे की सारणी में दिए गए हैं।

हम समय की इकाई दबा रहें हैं, परन्तु आगमन दर का अर्थ होगा प्रति इकाई समय में अनेकों का आगमन। यही टिप्पणी सेवा काल के संबंध में भी दी जा सकती है।

t (मिनट)	N(t)	r_a	अगला आगमन काल	r_d	अगला सेवा काल	अगला आगमन	अगला प्रस्थान	अगली घटना
0	0	0.29	3.54	–	–	3.54	–	A
3.54	1	0.42	2.48	0.73	0.66	6.02	4.20	D
4.20	0	–	–	–	–	6.02	–	A
6.02	1	0.17	5.06	0.57	1.17	11.08	7.19	D
7.19	0	–	–	–	–	11.08	–	A
11.08	1	0.33	3.17	0.41	1.86	14.25	12.94	D
12.94	0	–	–	–	–	14.25	–	A
14.25	1	0.62	1.37	0.23	3.06	15.62	17.31	A
15.62	2	0.81	0.60	0.12	4.42	16.22	17.31	A
16.22	3	–	–	–	–	–	17.31	D
17.31	2	–	–	–	–	–	–	–

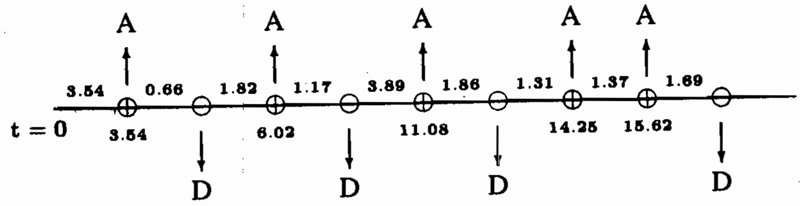
आइए हम निम्नलिखित यादृच्छिक संख्याएँ लें जिन्हें हम $U_i, i = 1, 2, \ldots,$ से प्रकट करते हैं।
0.29, 0.42, 0.17, 0.33, 0.62, 0.81, 0.73, 0.57, 0.41, 0.23, 0.12, ...

$T_i = -\dfrac{1}{\lambda} ln\, U_i = -\dfrac{1}{0.35} ln\; U_i, i = 1, 2, \ldots, 6,$ लीजिए। तब, हम एक $\text{Exp}(\lambda)$ बंटन, जहाँ $\text{Exp}(\lambda)$ माध्य $1/\lambda$ वाले *चरघातांकीय बंटन* को प्रकट करता है, से प्रेक्षण जनित करते हैं।

इस तरह, T_i, 3.54, 2.48, 5.06, 3.17, 1.37, 0.60 द्वारा प्राप्त होते हैं (ऊपर की सारणी का चौथा स्तंभ देखिए)। इन मानों से ऊपर की पंक्ति प्रणाली के लिए प्रथम 6 ग्राहकों के अंतर-आगमन काल का एक प्रापण (realisation) प्राप्त हो जाता है।

इसी प्रकार, $\mu = 0.48$ के साथ, $S_i = -\dfrac{1}{\mu} ln\; U_i, i = 7, 8, \ldots, 12$ लेकर हमें 0.66, 1.17, 1.86, 3.06, 4.42 के रूप में इन ग्राहकों के सेवा काल के **प्रापण** प्राप्त होते हैं (ऊपर की सारणी का छठा स्तंभ देखिए)।

इस तरह, हम पंक्ति-प्रणाली को निम्नलिखित ग्राफ़ से निरूपित कर सकते हैं, जहाँ प्रतीक ⊕ एक आगमन को निरूपित करता है और प्रतीक ⊖ प्रस्थान को निरूपित करता है। चित्र 2 में प्रथम 5 आगमन और प्रथम 4 सेवाएँ दिखाई गई हैं।



चित्र 2

यहाँ आप यह देख सकते हैं कि, 17.31 इकाई समय में (अर्थात्, चौथे ग्राहक के जाने के समय तक), सेवक $(3.54 + 1.82 + 3.89 + 1.31) = 10.56$ इकाई समय तक निष्क्रिय रहता है और, समय $t = 15.62$ और $t = 17.31$ के बीच, प्रणाली में 2 ग्राहक रहते हैं। इस समय पर, सेवा उपलब्ध हो जाने पर ग्राहक चला जाता है और सेवा प्राप्त करने के लिए अगला ग्राहक पंक्ति में लग जाता है।

* * *

ध्यान दीजिए कि उदाहरण 6 का चित्र 2 विभिन्न राशियों के केवल विशेष प्रापणों को निरूपित करता है।

उदाहरण के लिए, सेवक के निष्क्रिय रहने की प्रायिकता इस बात की प्रायिकता p_0 के बराबर होती है कि पंक्ति प्रणाली में कोई भी ग्राहक नहीं है, और, सैद्धांतिक रूप से, हम यह जानते हैं कि $p_0 = 1 - \lambda/\mu = 0.27$. और, $10.56/17.31 = 0.61$ समय का वह अनुपात है जिसमें सेवक निष्क्रिय रहता है, जो कि 0.27 से काफी भिन्न है। पर इस बात को लेकर कोई चिन्ता करने की आवश्यकता नही होती है, क्योंकि यह मान एक प्रापण मात्र ही है।

फिर भी, यदि हम पूरे अनुकार को बहुत बार, अर्थात् 30 या 40 बार, करें और समय के उस औसत अनुपात का परिकलन करें, जिसमें सेवक निष्क्रिय बना रहता है, तो हमें एक अधिक परिशुद्ध प्रेक्षण प्राप्त हो जाएगा।

यदि हम एक ही अनुकार करें तो लंबे समय तक प्रणाली का प्रेक्षण करने पर उत्तम परिणाम प्राप्त हो जाएंगे और तब राशियों को परिकलित कीजिए।

ऊपर के उदाहरणों पर चर्चा करने का उद्देश्य इतना ही था कि पहली बार पढ़ने वाला समझ सके कि व्यवहार में, अनुकार अध्ययन किस प्रकार किया जाता है और उससे संबंधित कुछ लक्षणों पर वह चर्चा कर सके।

नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए।

E9) (क) यादृच्छिक संख्याओं $r_a: 0.096, 0.569, 0.764, 0.492, 0.950$ और $r_d = 0.665, 0.842, 0.224, 0.552, 0.590$ के लिए, $\lambda = 5$ प्रति घंटा और $\mu = 8$ प्रति घंटा वाले चरघातांकीय बंटनों से यादृच्छिक प्रेक्षण परिकलित कीजिए।

(ख) भाग (क) में दी गई यादृच्छिक संख्याओं के समुच्चय को लेकर, $\lambda = 5$ प्रति घंटा और $\mu = 3$ प्रति घंटा वाली एकल सेवक पंक्ति प्रणाली पर *अगली-घटना काल अग्रिम* की क्रियाविधि लागू कीजिए।

इस बात पर आपको आश्चर्य हो सकता है कि हमने क्यों एक M/M/1 पंक्ति का अनुकरण किया है और दो राशियों, जैसे *समय का वह अनुपात जब सेवक निष्क्रिय होता है* और *एक निश्चित समय पर प्रणाली में ग्राहकों की संख्या*, परिकलित की जाती है। ऐसा इसलिए है क्योंकि, गणितीय रूप से M/M/1 बिल्कुल कर्षणीय (tractable) होता है और विभिन्न राशियों का वैश्लेषिक रूप से परिकलन सरलता से किया जा सकता है।

इसी के साथ, हम इस खंड के अंत में आ जाते हैं। इस इकाई में हमने जो कुछ पढ़ा है, आइए उसका संक्षिप्त विवरण यहाँ हम दे दें।

12.5 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित तथ्यों पर चर्चा की है।

1) एक उच्च नम्य साधन के रूप में अनुकार का प्रयोग, जिसका जटिल प्रणालियों का विश्लेषण करने में प्रभावी ढंग से प्रयोग किया जा सकता है।

2) छद्म यादृच्छिक संख्या जनन की *गुणनात्मक सर्वांगसमक विधि* पर चर्चा की है।

3) हमने *प्रतिलोमन विधि* पर विचार किया है और एक प्रायिकता बंटन से यादृच्छिक प्रेक्षणों के जनन में इसके प्रयोग की व्याख्या की।

4) एकल सेवक पंक्ति प्रणाली के अनुकार से संबंधित कुछ पहलुओं पर चर्चा करने के लिए एक उदाहरण दिया।

12.6 हल/उत्तर

E1) हम यादृच्छिक संख्याएँ जनित करते हैं और निम्नलिखित संबंध स्थापित करते हैं। प्रत्येक i के लिए,

यदि $U_i \le 0.16$, फलक 1 दर्ज कीजिए

यदि $0.16 < U_i \le 0.32$, फलक 2 दर्ज कीजिए

यदि $0.32 < U_i \le 0.48$, फलक 3 दर्ज कीजिए

यदि $0.48 < U_i \le 0.64$, फलक 4 दर्ज कीजिए

यदि $0.64 < U_i \le 0.80$, फलक 5 दर्ज कीजिए

यदि $0.80 < U_i \le 0.96$, फलक 6 दर्ज कीजिए

अन्यथा, अगली यादृच्छिक संख्या लीजिए। यह एक न्याय्य पाशक को फेंकने की क्रियाविधि होगी। इसे तब तक फेंकते रहिए, जब तक सभी फलक आ नहीं जाते। इस परंपरा में आवश्यक 'फेंकने' की संख्या लिख लीजिए। पूरी क्रियाविधि को दोबारा कीजिए, अर्थात् , इसे अनेक बार कीजिए और आवश्यक फेंकों की औसत संख्या अभिकलित कीजिए। अर्थात् ,

फेंक का परिणाम	प्रायिकता
2 या 12	1/36
3 या 11	2/36
4 या 10	3/36
5 या 9	4/36
6 या 8	5/36
7	6/36

यदि यादृच्छिक संख्या 1/36 से कम है, तो फेंक का परिणाम 2 होगा। यदि यादृच्छिक संख्या 1/36 और $1/36 + 2/36 = 3/36$ के बीच हो तो फेंक का परिणाम 3 होगा, आदि आदि।

E2) समस्या 2 में बताये गये चरणों को लागू करने पर यह सरलता से देखा जा सकता है कि दैनिक मांग संख्याओं : 20, 30, 30, 30, 10, 10, 30, 40, 10, 30 से प्राप्त होती है। और, औसत मांग = 24.

E3) मान लीजिए कि चार अलग-अलग मान क्रमश: x_1, x_2, x_3 और x_4 हैं। अब, एक सिक्के को तीन उत्तरोत्तर बार उछालने का अभिप्रयोग (trial) कीजिए। तब संभव परिणाम हैं : HHH, TTT, HHT, HTH, THH, TTH, HTT, THT, जिनमें प्रत्येक की प्रायिकता 1/8 है। इस तरह, हम 'सभी चितों' के परिणाम को x_1 से, 'सभी पटों' को x_2 से, 'केवल दो चितों को'

x_3 से और 'केवल 1 चित' को x_4 से संबंधित बता सकते हैं। अब, प्रत्येक 'अभिप्रयोग' द्वारा दी गई प्रायिकता से ठीक-ठीक एक प्रेक्षण प्राप्त होगा।

E4) (क) $a = 5, c = 7, m = 8$ और $r_0 = 4$ के साथ, $r_1 = 5 \times 4 + 7(\text{modulo } 8) = 3.$

इसी प्रकार, $r_2 = 6, r_3 = 5, r_4 = 0, r_5 = 7, r_6 = 2, r_7 = 1, r_8 = 4, r_9 = 3, r_{10} = 6.$

(ख) इसे आप स्वयं कीजिए।

E5) आदर्श रूप में, यदि कोई व्यक्ति ऐसे सिक्का उछाल सकता हो कि चित पड़ने की प्रायिकता $= 0.57$, तो वह इसे 6 बार उछाल सकता है और परिणाम दर्ज कर सकता है। फिर भी, इसका अनुकरण करने के लिए हम निम्नलिखित क्रियाविधि अपना सकते हैं।

मान लीजिए U एक $U(0, 1)$ यादृच्छिक संख्या है। यदि $U \le 0.57$ तो एक चित दर्ज कीजिए अन्यथा पट दर्ज कीजिए। इसे 6 बार कीजिए। इससे $P(\text{चित}) = P[0 \le U \le 0.57] = 0.57$ प्राप्त होगा, क्योंकि, अंतराल $]0, 1[$ पर, U एकसमानतः बंटित होता है।

E6) हम जानते हैं कि यदि $T_1, T_2, \ldots$, i.i.d. चरघातांकीय (λ) यादृच्छिक चर हैं, जो कि पुर्ननवीकरण प्रक्रम के अंतर-आगमन समयों को निरूपित करता हो, तो $\{N(t) : t \ge 0\}$, एक प्वासां प्रक्रम है, जहाँ $N(t) =$ समय t पर, आगमनों की संख्या है। वास्तव में, $N(t)$ प्राचल (माध्य) λt वाला एक प्वासां बंटन होता है। अतः, हम यह प्रक्रिया अपनाते हैं :

$\lambda = 2.6$ वाले, i.i.d $\text{Exp}(\lambda)$ यादृच्छिक चर जनित कीजिए और इनका संचयी योगफल तब तक लीजिए जब तक कि यह योगफल $t = 1$ से अधिक नहीं हो जाता। यदि इसे प्राप्त करने के लिए आवश्यक $\text{Exp}(\lambda)$ चरों की संख्या n हो, तो $n - 1$ माध्य $\lambda t = 2.6 \times 1 = 2.6$ वाले प्वासां-बंटन का एक प्रेक्षण होगा।

E7) एक यादृच्छिक चर X लीजिए जो प्रथम चित प्राप्त करने के लिए आवश्यक उछालों की संख्या को निरूपित करता है। इसके लिए उस सिक्का का प्रयोग किया गया है जिसकी चित पड़ने की प्रायिकता 0.6 होती है। यह सरलता से देखा जा सकता है कि $f(x)$, X का *प्रायिकता घनत्व फलन* है। प्रश्न 1 की विधि का प्रयोग करके अब हम चित पड़ने की प्रायिकता $= 0.6$ वाले सिक्के के उत्तरोत्तर उछालों का अनुकरण कर सकते हैं और चित पड़ते ही हम इसे रोक सकते हैं। अब, इसे प्राप्त करने के लिए आवश्यक उछालों की संख्या की गिनती कीजिए और वही अपेक्षित प्रेक्षण होगा।

E8) यहाँ, c.d.f.

$$F(x) = \int_0^x 3t^2 dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^3, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

होता है। अतः, एक यादृच्छिक संख्या R के लिए, हम $x^3 = R$ लेते हैं। तब, $x = R^{1/3}$ से अपेक्षित यादृच्छिक प्रेक्षण प्राप्त होते हैं।

E9) इस समस्या में दिए गए r_a और r_d के मानों का प्रयोग करते हुए उदाहरण 6 में लागू किए चरण अपनाइए। अतः, यहाँ हम निम्नलिखित यादृच्छिक संख्याएँ लेते हैं।

0,096, 0.569, 0.764, 0.492, 0.950, 0.665, 0.665, 0.842, 0.224, 0.552, 0.590, जिन्हें $U_i, i = 1, 2, \ldots, 10$, से प्रकट करते हैं। उदाहरण 6 के संकेतों का प्रयोग करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$T_1 = 0.47,\ T_2 = 0.11,\ T_3 = 0.05,\ T_4 = 0.14,\ T_5 = 0.01$: और
$S_1 = 0.05,\ S_2 = 0.02,\ S_3 = 0.19,\ S_4 = 0.07,\ S_5 = 0.07.$

शेष हल काफी सरल हैं।

ख) उदाहरण 6 के हल में अपनाए गए चरणों को लागू कीजिए।

शब्दावली

अनुकरण	simulation
अनुकरण, अनुकार	simulation
अपवर्जी घटना	exclusive event
अभिलक्षण	characteristic
अभिकल्प	design
अभिप्रयोग	trial
अभिधारणा	assumption
अंकीय कंप्यूटर	digital computer
अंतर-आगमन	inter-arrival
आकांक्षा	aspiration
इष्टतम	optimum
उप-प्रणाली	sub-system
उपांत	marginal
कलन विधि	algorithm
चरघातांकी	exponential
छद्म	pseudo
तंत्र विश्लेषण	system analysis
निर्णय निदर्श	decision model
निदर्श	model
निर्देशित	specify
निष्क्रिय	idle
निष्कर्ष	inference
निष्पादन माप	performance measure
पंक्ति-प्रणाली	queueing system
प्रत्याशित	expected
प्रतिलोमन	inversion
प्रसंभाव्य	stochastic
प्रमेय	postulate
प्रापण	realisation
प्रेक्षण	observation (variate)
मालसूची	inventory
लागत	cost
सत्ता	entity
समानुक्रमण	collation
सर्वांगसमक संबंध	congruence relation
संचयी प्रायिकता	cumulative probability
संप्रायिक	equally likely
सुसंगत	feasible
सेवा काल	service time
सेवा-स्तर	level of service